

Лекции по дисциплине

«Интеллектуальные информационные системы»

Лекция 6. Нечеткая логика.
Математические основы



Введение

Математическая теория **нечетких** множеств (**fuzzy sets**) и **нечеткая** логика (**fuzzy logic**) являются обобщениями классической теории множеств и классической формальной логики.

Данные понятия были впервые предложены американским ученым Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) в 1965 году.

Основной причиной появления новой теории стало наличие нечетких и приближенных рассуждений при описании человеком процессов, систем, объектов.

1. Применение нечетких экспертных систем

- **Д**ля поддержки принятия решений в медицине и экономике.
- **В** автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в области изделий бытовой техники, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений.
- **В** бизнесе и финансах нечеткая логика получила признание после того как в 1988 году экспертная система на основе нечетких правил для прогнозирования финансовых индикаторов единственная предсказала биржевой крах (*“Черный Понедельник” на Токийской бирже - знаменитая теорема FAT - Fuzzy Approximation Theorem*).
- **К**оличество успешных фаззи-применений в настоящее время исчисляется тысячами.

2. Математический аппарат

Характеристикой нечеткого множества выступает функция принадлежности (**Membership Function**). Обозначим через **MF_c(x)** – степень принадлежности к нечеткому множеству **C**, представляющей собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества.

Тогда нечетким множеством **C** называется множество упорядоченных пар вида **C={MF_c(x)/x}**, **MF_c(x) ∈ [0,1]**.

Значение **MF_c(x)=0** означает отсутствие принадлежности к множеству,

а равное **1** – полную принадлежность.

Пример 1.

Формализуем неточное определение '**горячий чай**'.

В качестве **x** (область рассуждений) будет выступать шкала температуры в градусах Цельсия.

Очевидно, что она будет изменяться от 0 до 100 градусов.

Нечеткое множество для понятия '**горячий чай**' может выглядеть следующим образом:

$C = \{0/0; 0/10; 0/20; 0,15/30; 0,30/40; 0,60/50; 0,80/60; 0,90/70; 1/80; 1/90; 1/100\}$.

*Чай с температурой **60°C** принадлежит к множеству '**Горячий**' со степенью принадлежности **0,80**. Для одного человека чай при температуре **60°C** может оказаться горячим, для другого – не слишком горячим. Именно в этом и проявляется нечеткость задания соответствующего множества.*

Для нечетких множеств, как и для обычных, определены основные логические операции. Самыми основными, необходимыми для расчетов, являются **пересечение** и **объединение**.

Пересечение двух нечетких множеств (нечеткое "И"):

$$A \cap B: MF_{AB}(x) = \min(MF_A(x), MF_B(x)).$$

Объединение двух нечетких множеств (нечеткое "ИЛИ"):

$$A \cup B: MF_{AB}(x) = \max(MF_A(x), MF_B(x)).$$

В теории нечетких множеств разработан общий подход к выполнению операторов пересечения, объединения и дополнения, реализованный в так называемых **треугольных нормах** и **конормах**.

Приведенные выше реализации операций *пересечения* и *объединения* – наиболее распространенные случаи **t-нормы** и **t-конормы**.

Для описания нечетких множеств вводятся понятия **нечеткой** и **лингвистической** переменных. **Нечеткая переменная** описывается набором (N, X, A) , где N – это название переменной, X – универсальное множество (область рассуждений), A – нечеткое множество на X .

Значениями **лингвистической переменной** могут быть *нечеткие переменные*, т.е. лингвистическая переменная находится на более высоком уровне, чем нечеткая переменная.

Каждая лингвистическая переменная состоит из:

- **Н**азвания;
- **М**ножества своих значений, которое также называется базовым *терм-множеством* **T**.

Элементы базового терм-множества представляют собой названия нечетких переменных;

- **У**ниверсального множества **X**;
- **С**интаксического правила **G**, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка;
- **С**емантического правила **P**, которое каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества **X**.

Пример 2.

Рассмотрим нечеткое понятие '**Цена акции**'.

Это и есть название лингвистической переменной.

Сформируем для нее базовое терм-множество, которое будет состоять из трех нечетких переменных:

'Низкая', **'Умеренная'**, **'Высокая'** и зададим область рассуждений

в виде **$X=[100;200]$** (единиц).

Теперь необходимо построить функции принадлежности для каждого лингвистического терма из базового терм-мноества **T**.

Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности.

Наибольшее распространение получили: *треугольная*, *трапециевидальная* и *гауссова функции принадлежности*.

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел **(a,b,c)**, и ее значение в точке x вычисляется согласно выражению:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-c}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При **(b-a)=(c-b)** имеем случай симметричной треугольной функции

принадлежности, которая может быть однозначно задана двумя параметрами из тройки **(a,b,c)**.

Для задания **трапецеидальной функции принадлежности** необходима четверка чисел **(a,b,c,d)**:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

При **(b-a)=(d-c)** трапецеидальная функция принадлежности принимает симметричный вид.

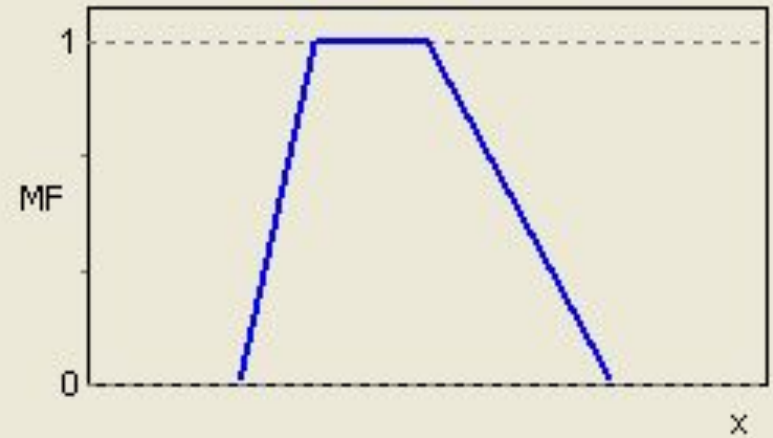
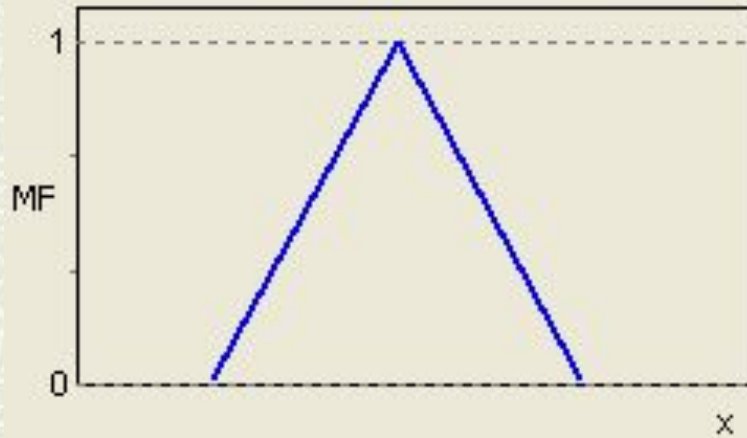


Рисунок 1. Типовые кусочно-линейные функции принадлежности.

Функция принадлежности **гауссова** типа описывается формулой:

$$MF(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - c}{\sigma} \right)^2 \right]$$

и оперирует двумя параметрами.

Параметр **c** обозначает центр нечеткого множества,
а параметр **σ** отвечает за крутизну функции.

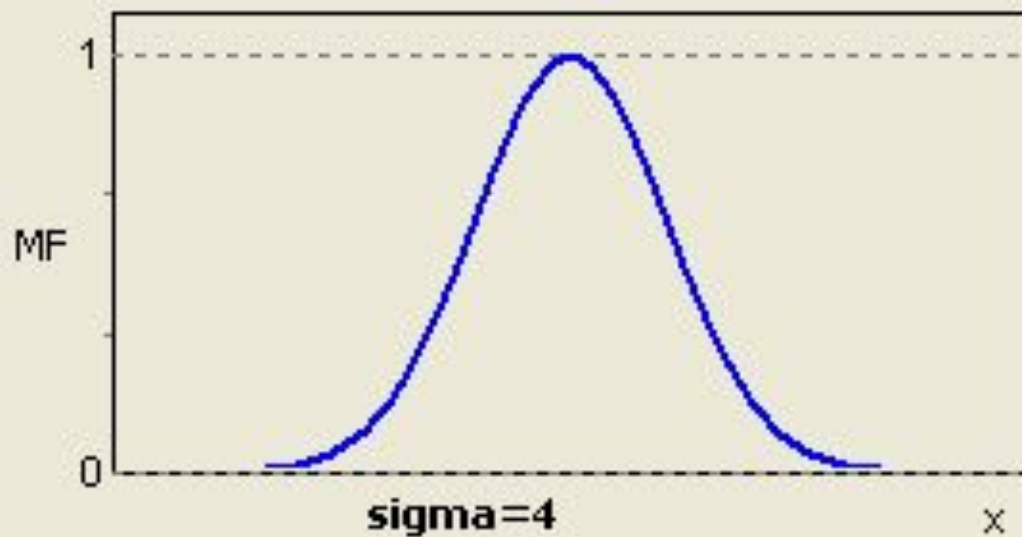


Рисунок 2. Гауссова функция принадлежности.

Совокупность функций принадлежности для каждого терма из базового терм-множества **Т** обычно изображаются вместе на одном графике.

На рисунке 3 приведен пример описанной выше лингвистической переменной '**Цена акции**'.

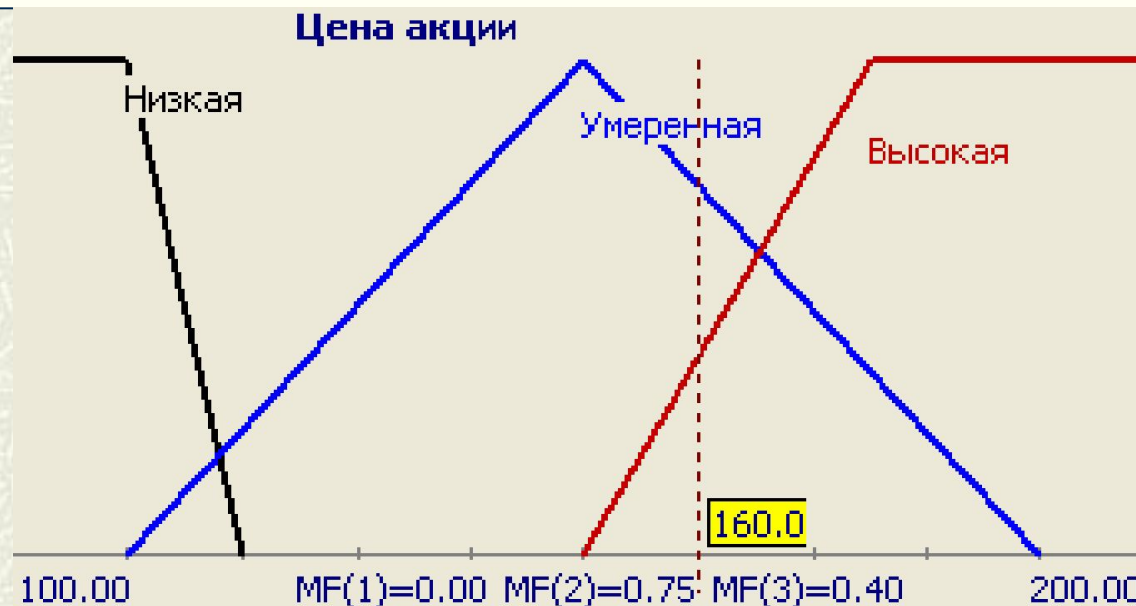


Рисунок 3. Описание лингвистической переменной '**Цена акции**'

Пример 3

На рисунке 4 представлена формализация неточного понятия **'Возраст человека'**.

Так, для человека 48 лет степень принадлежности к множеству:

'Молодой' равна **0**,
'Средний' равна **0,47**,
'Выше среднего' равна **0,20**.

Рис. 4. Описание лингвистической переменной 'Возраст'.



Количество термов в лингвистической переменной редко превышает 7.

'Молодой' равна 0,
'Средний' равна 0,47,
'Выше среднего' равна 0,20.

Рис. 4. Описание лингвистической переменной 'Возраст'.



3. Нечеткий логический вывод

Основой для проведения операции нечеткого логического вывода является **база правил**, содержащая *нечеткие высказывания* в форме '**Если-то**' и *функции принадлежности для соответствующих лингвистических термов*.

При этом должны соблюдаться следующие условия:

1. Существует хотя бы одно правило для каждого лингвистического терма выходной переменной.
2. Для любого терма входной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот терм используется в качестве предпосылки (левая часть правила).

В противном случае имеет место неполная база нечетких правил.

Пусть в базе правил имеется **m** правил вида:

R_1 : ЕСЛИ x_1 это A_{11} ... И ... x_n это A_{1n} , ТО y это B_1

...

R_i : ЕСЛИ x_1 это A_{i1} ... И ... x_n это A_{in} , ТО y это B_i

...

R_m : ЕСЛИ x_1 это A_{m1} ... И ... x_n это A_{mn} , ТО y это B_m ,

где **x_k** , $k=1..n$ – входные переменные;

y – выходная переменная;

A_{ik} – заданные нечеткие множества с функциями принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение
переменной **y^*** на основе заданных четких значений **x_k** , $k=1..n$.

Механизм логического вывода включает 4 этапа:

- ☐ введение нечеткости (фазификация),
- ☐ нечеткий вывод,
- ☐ композиция,
- ☐ приведение к четкости, или дефазификация.

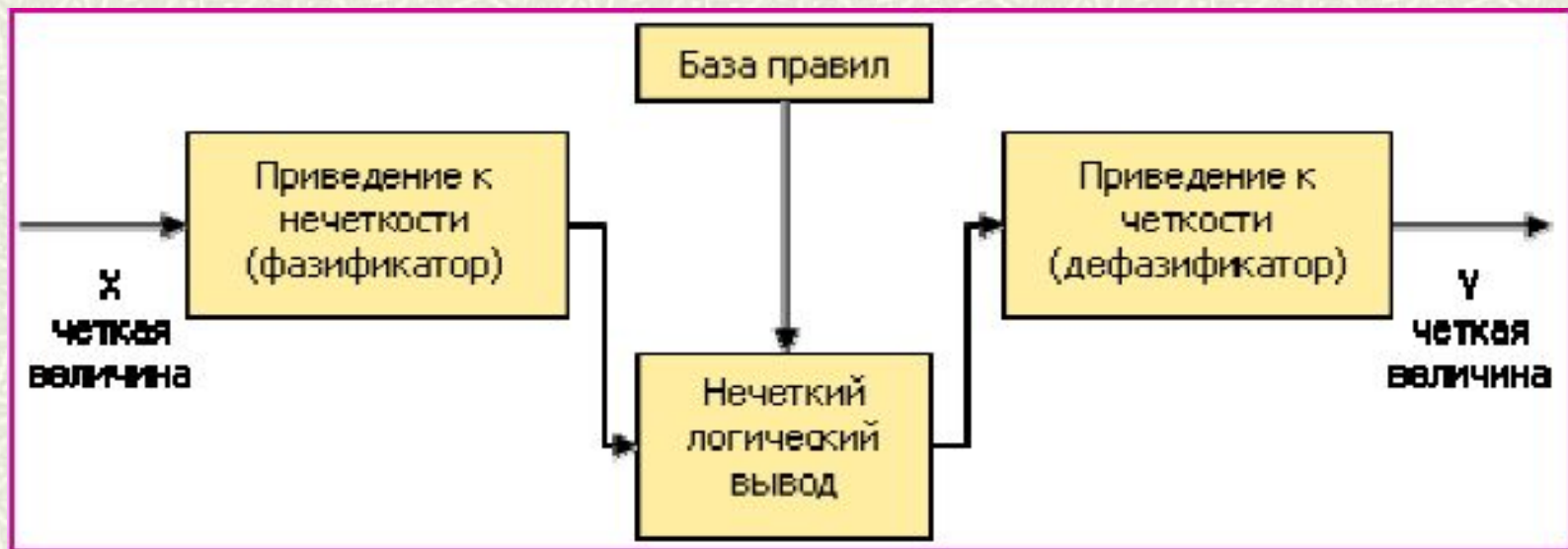


Рисунок 5. Система нечеткого логического вывода

3. Нечеткий логический вывод

Алгоритмы нечеткого вывода различаются главным образом видом

используемых правил, логических операций и разновидностью метода дефазификации.

Разработаны модели нечеткого вывода **Мамдани, Сугено, Ларсена, Цукамото**.

Подобно тому, как нечеткие множества расширили рамки классической математической теории множеств, нечеткая логика 'вторглась' практически в большинство методов **Data Mining**, наделив их новой функциональностью:

- **Нечеткие нейронные сети** (fuzzy-neural networks);
- **Адаптивные нечеткие системы** (adaptive fuzzy systems).

Список литературы:

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
2. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002.
3. Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003.
4. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
5. Масалович А. Нечеткая логика в бизнесе и финансах.