

Построение Фазовых

Портретов

Выполнили:

Краснухина Ксения

Салимов Георгий

Сипягина Елена

Тельнова Лилия

динамических

систем



«Теория колебаний сегодня – это широкая всеобъемлющая наука об эволюционных процессах в природе, технике и обществе, в механике, физике, астрономии, химии, биологии, экономике... и во всем, что нас окружает, и в нас самих.»

Ю.И.

Неймарк



Качественная теория
дифференциальных
уравнений изучает свойства
решений обыкновенных
дифференциальных
уравнений без нахождения
самих решений.



Основы ее были
заложены в конце XIX
века в работах А.
Пуанкаре и А.М.
Ляпунова.

В настоящее время ее методы широко
применяются для исследования нелинейных
систем, описывающих динамические
процессы не только в механике и физике, но
и в других областях естествознания.



В чем

мораль?



Очень часто встречается ситуация, когда модель рассматриваемого процесса сводится к дифференциальному уравнению. При этом, в большинстве реальных задач это уравнение довольно сложно решить, или совсем невозможно.



И вот тут в полный голос звучит
извечный вопрос: **как быть?**



Встречайте:

фазовые портреты

(они же фазовые

диаграммы)

Динамическая система –
математический объект,
соответствующий реальным физическим,
химическим, биологическим и др.
системам, эволюция во времени, которых
на любом интервале времени
однозначно определяется начальным
состоянием.

Ответ на вопрос о том, какие режимы поведения могут устанавливаться в данной системе, можно получить из так называемого **фазового портрета системы** – совокупности всех ее траекторий, изображенных в пространстве фазовых переменных (**фазовом пространстве**).

Среди этих траекторий имеется некоторое число основных, которые и определяют качественные свойства системы. К ним относятся прежде всего точки равновесия, отвечающие стационарным режимам системы, и замкнутые траектории (предельные циклы), отвечающие режимам периодических колебаний.

Будет ли режим устойчив или нет, можно судить по поведению соседних траекторий: устойчивое равновесие или цикл притягивает все близкие траектории, неустойчивое отталкивает хотя бы некоторые из них.

Фазовое пространство в математике и физике — пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства.

Сущность понятия фазового пространства заключается в том, что состояние сколь угодно сложной системы представляется в нём одной единственной точкой, а эволюция (во времени) этой системы — перемещением этой точки.

Фазовая плоскость — координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка. Фазовая плоскость является частным случаем фазового пространства, которое может иметь бóльшую размерность.

В физике колебаний на оси абсцисс фазовой плоскости откладывается значения параметра x , а на оси ординат — первая производная x по времени (что, очевидно, связывает ось ординат с импульсом).

Каждая точка фазовой плоскости отражает одно состояние системы и называется **фазовой, изображающей** или **представляющей точкой**. Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения изображающей точки называется **фазовой траекторией**. Через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна фазовая траектория, за исключением особых точек.

Стрелками на фазовых траекториях показывается перемещение изображающей точки с течением времени. Полная совокупность различных фазовых траекторий — это **фазовый портрет**. Он даёт представление о совокупности всех возможных сочетаний системы и типах возможных движений в ней. Фазовый портрет удобен для рассмотрения движений макроскопических и квантовых частиц.

Простым языком, **фазовый портрет** — это то, как величины, описывающие состояние системы (т.е. динамические переменные), зависят друг от друга. В случае механического движения это координата и скорость, в электричестве это заряд и ток, в известной популяционной задаче это количество хищников и жертв и т.д.

Линейная автономная динамическая система

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Координатную плоскость xOy называют ее *фазовой плоскостью*. Через любую точку плоскости проходит одна и только одна фазовая кривая (траектория).

В системе (1) возможны три типа фазовых траекторий :

- точка,
- замкнутая кривая,
- незамкнутая кривая.

Точка на фазовой плоскости соответствует стационарному решению (положению равновесия, точке покоя) системы (1), замкнутая кривая – периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому.

Положения равновесия ДС

Положения равновесия системы (1) найдем, решая систему:

$$(2) \quad \begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Система (1) имеет единственное нулевое положение равновесия, если определитель матрицы системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0.$$

Если же $\det A = 0$, то, кроме нулевого положения равновесия, есть и другие, так как в этом случае система (2) имеет бесконечное множество решений.

Качественное поведение фазовых траекторий (тип положения равновесия) определяется собственными числами матрицы системы.

Классификация точек покоя

Собственные числа матрицы системы найдем, решая уравнение:

$$(3) \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Заметим, что $a + d = \text{tr } A$ (след матрицы) и $ad - bc = \det A$.

Классификация точек покоя в случае, когда $\det A \neq 0$, приведена в таблице:

Корни уравнения (3)	Тип точки покоя
λ_1, λ_2 - вещественные, одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)	Узел
λ_1, λ_2 - вещественные, разного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$)	Седло
λ_1, λ_2 - комплексные, $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 \neq 0$	Фокус
λ_1, λ_2 - комплексные, $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$	Центр

Устойчивость точек покоя

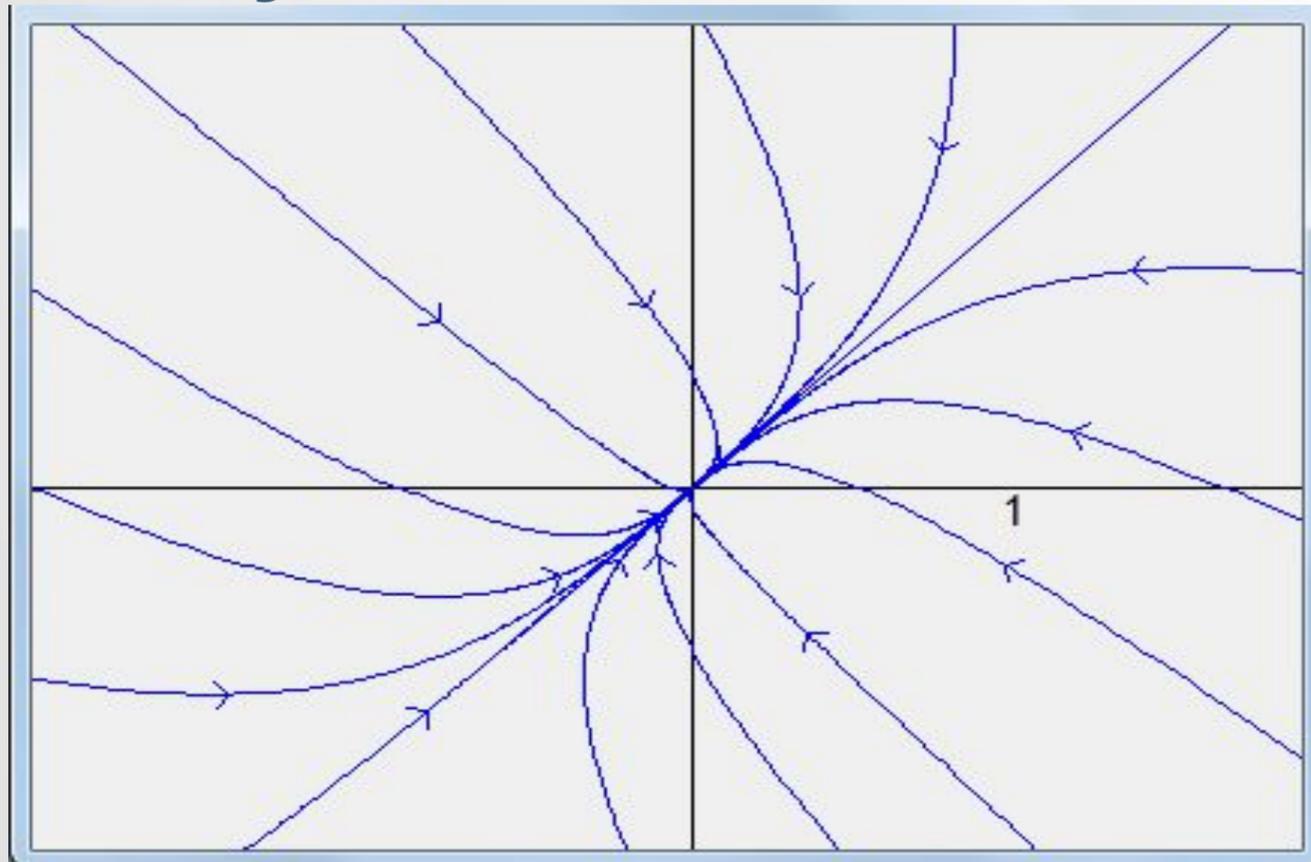
Собственные значения матрицы системы (1) однозначно определяют характер устойчивости положений равновесия:

Условие на вещественную часть корней уравнения (3)	Тип точки и характер устойчивости
1. Если вещественные части всех корней уравнения (3) отрицательны, то точка покоя системы (1) асимптотически устойчива.	Устойчивый узел, устойчивый фокус
2. Если вещественная часть хотя бы одного корня уравнения (3) положительна, то точка покоя системы (1) неустойчива.	Седло, Неустойчивый узел, Неустойчивый фокус
3. Если уравнение (3) имеет чисто мнимые корни, то точка покоя системы (1) устойчива, но не асимптотически.	Центр

Фазовые портреты

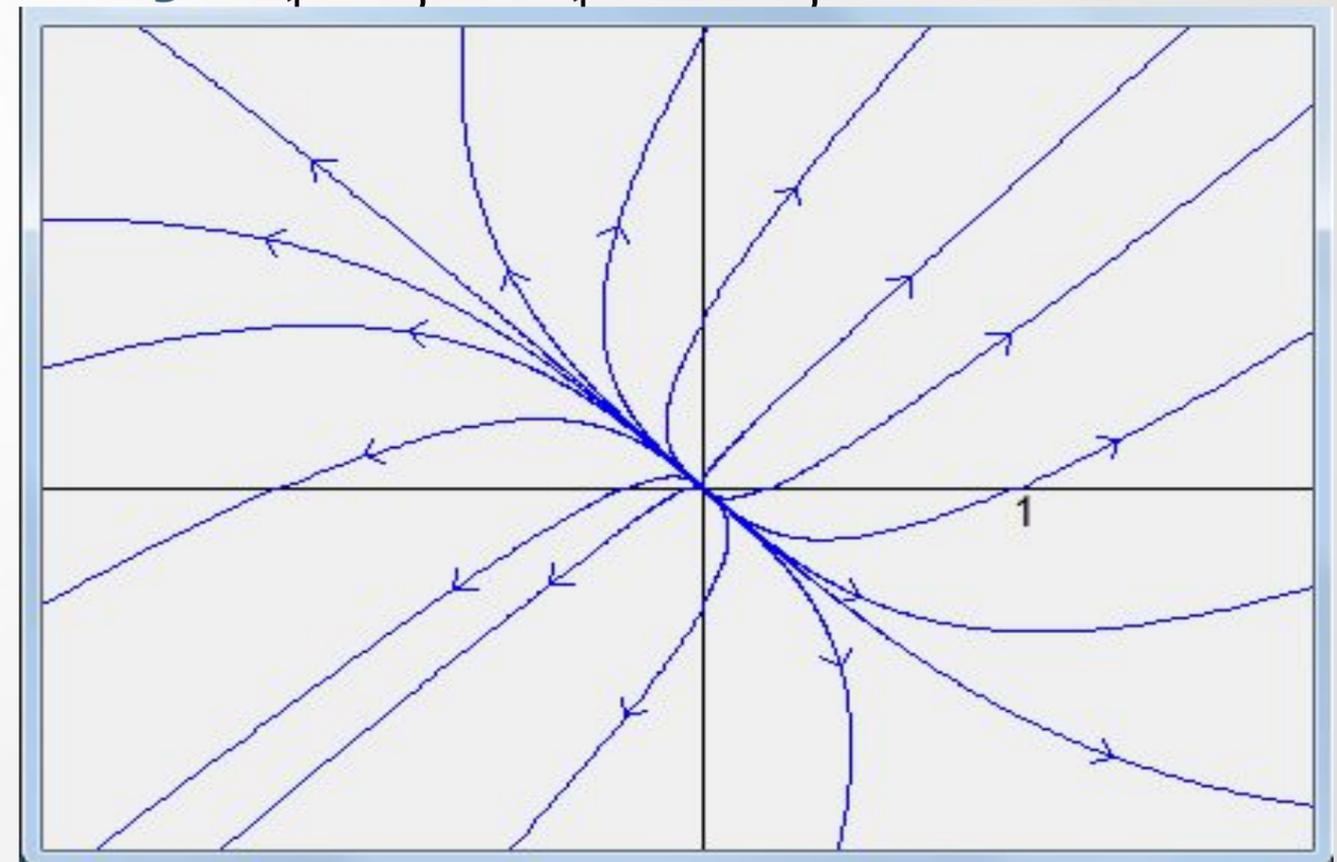
Устойчивый

узел $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$



Неустойчивый

узел $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

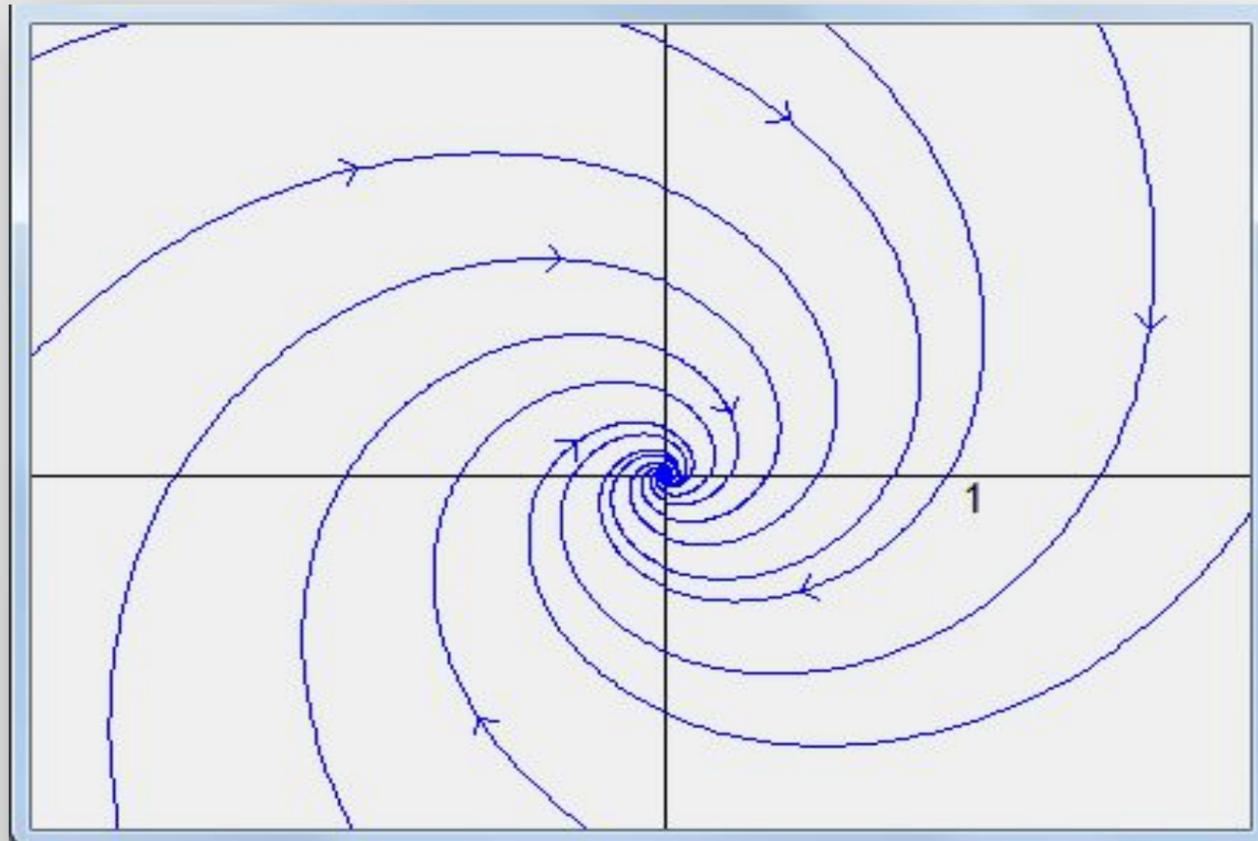


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

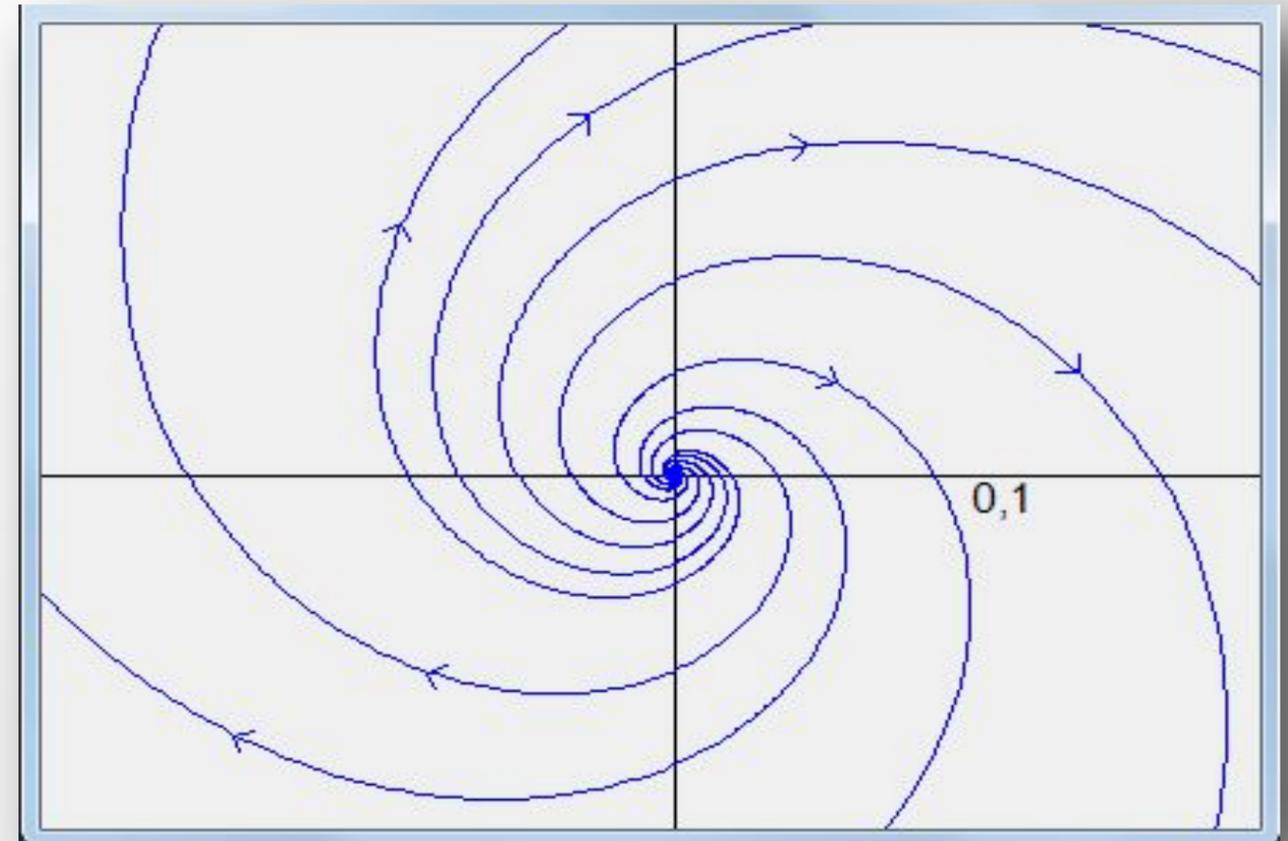
Устойчивый

фокус
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha < 0, \quad \beta \neq 0$



Неустойчивый

фокус
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta \neq 0$

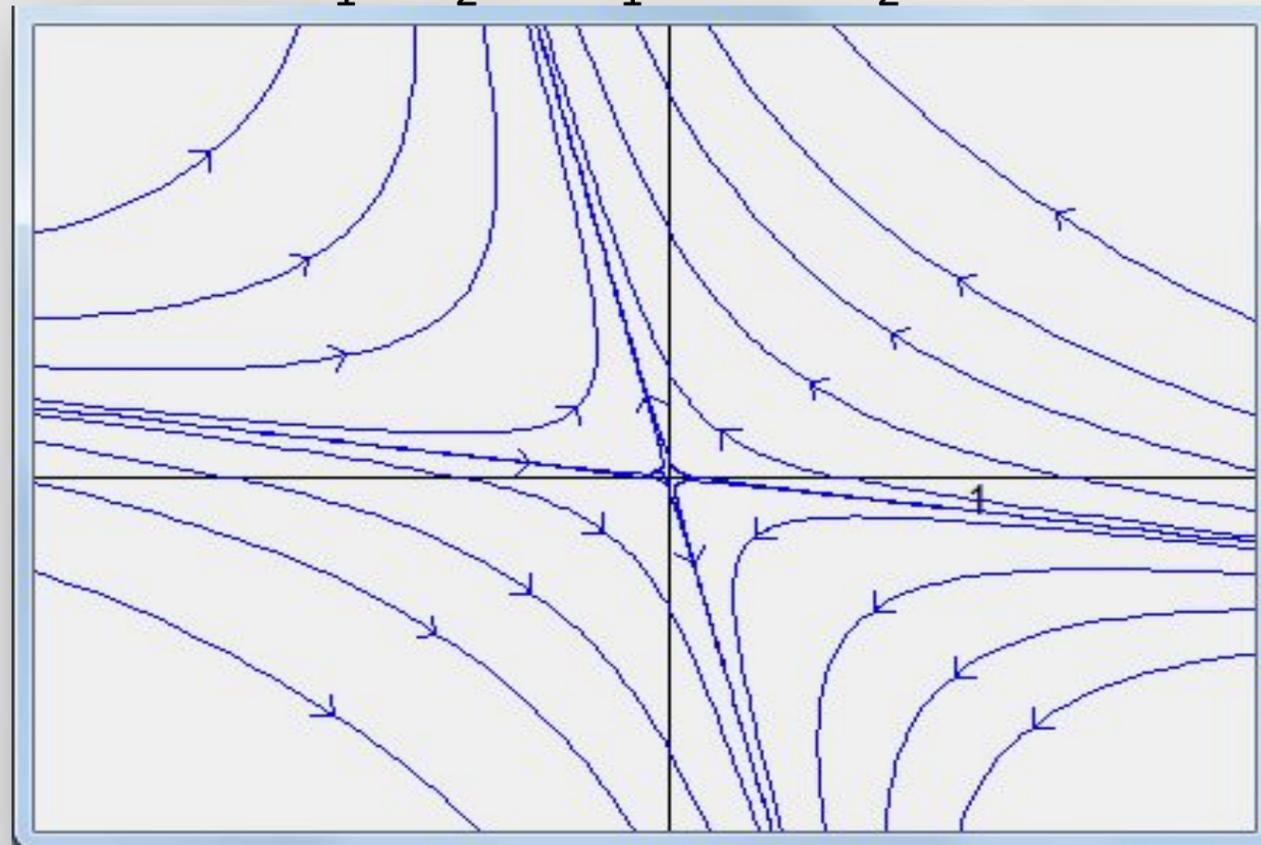


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

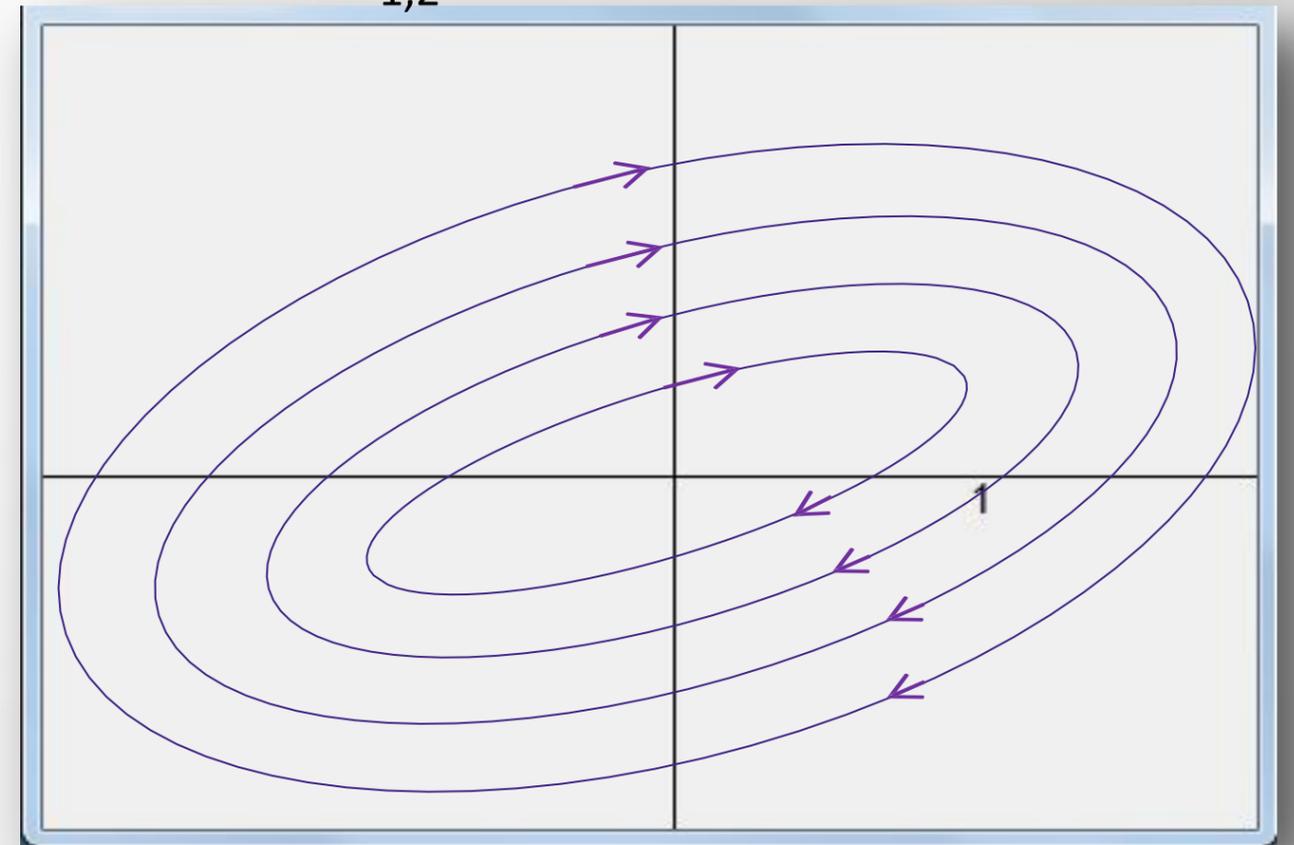
Седл

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$$



Центр

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \quad \beta \neq 0$$



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Фазовые портреты

Дикритический узел

имеет место для систем вида:

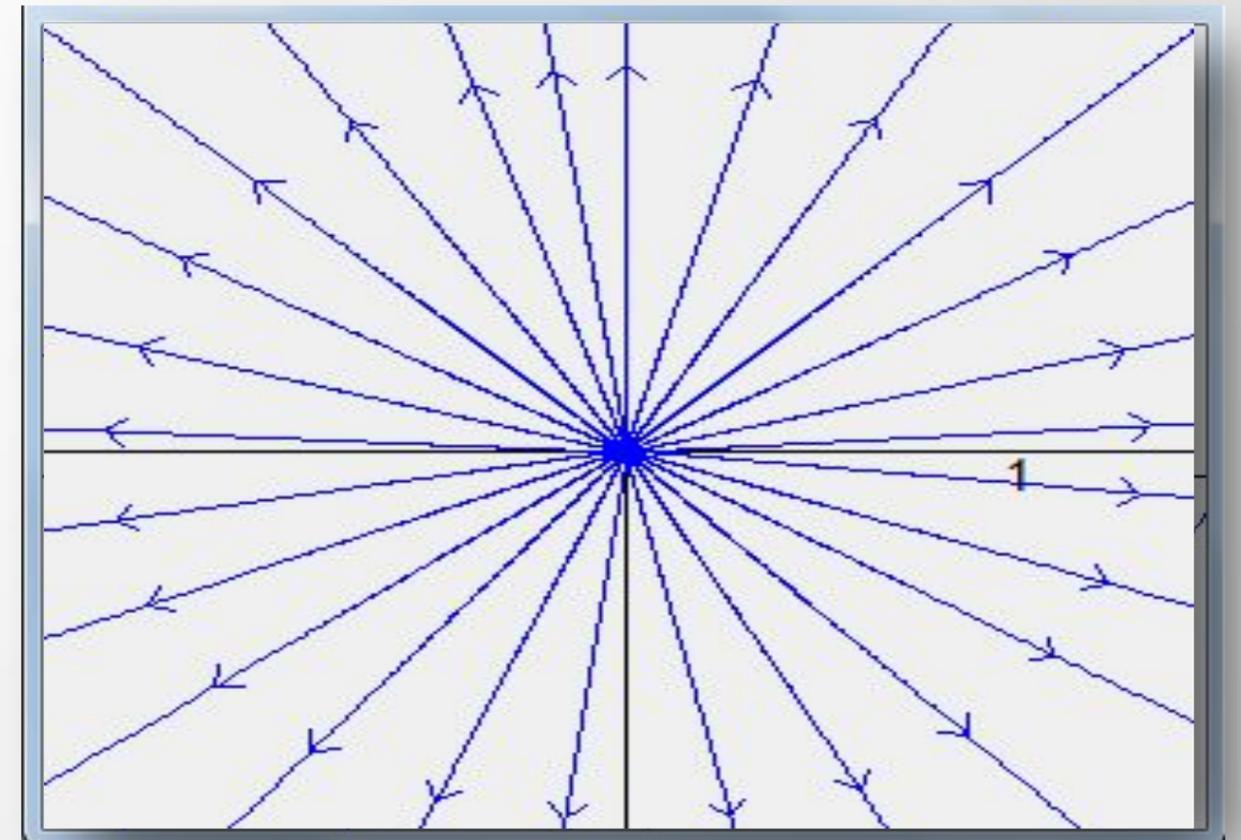
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay \end{cases}$$

когда $a \neq 0$. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Если $a < 0$, то узел асимптотически устойчив, если $a > 0$, то – неустойчив.

Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Неустойчивый дикритический узел



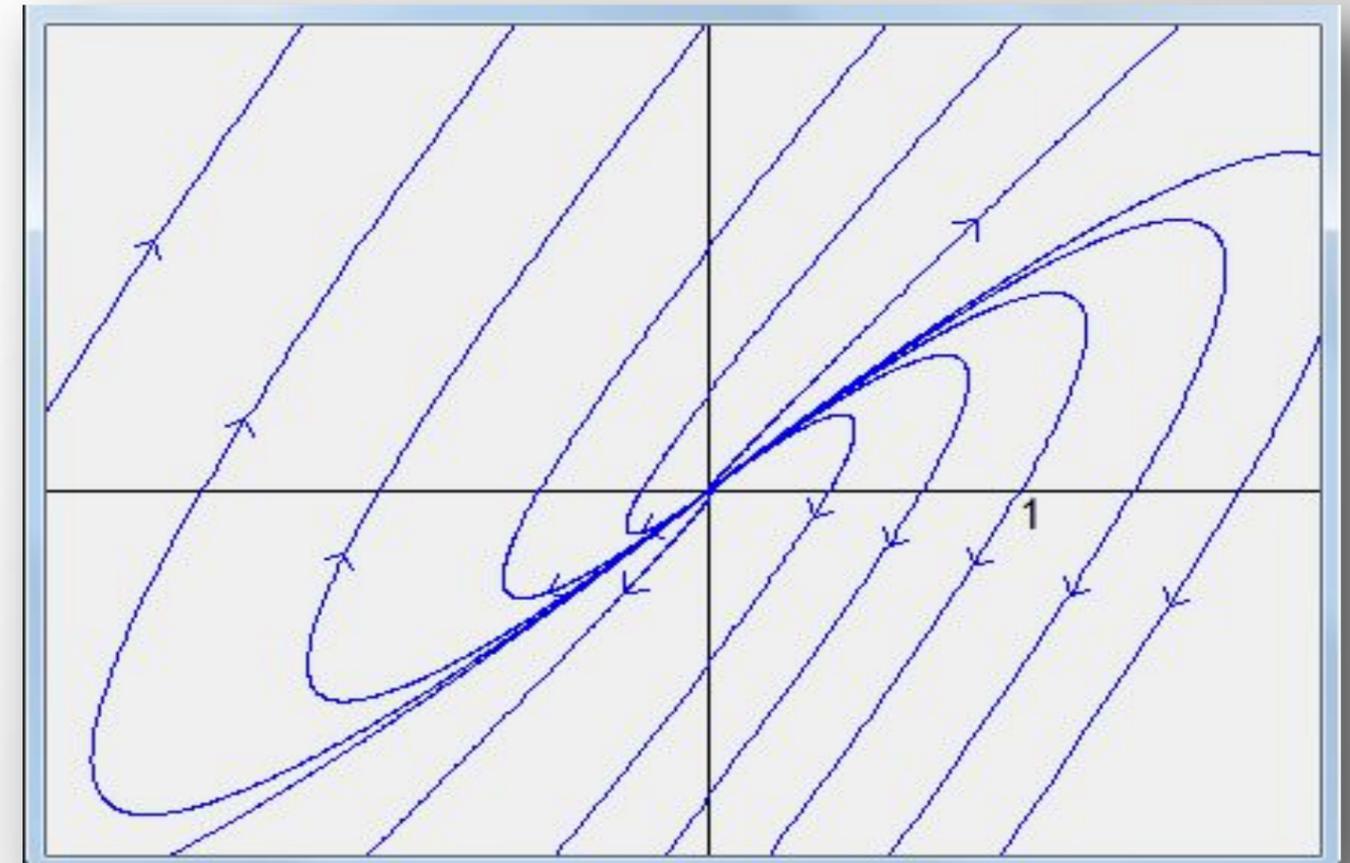
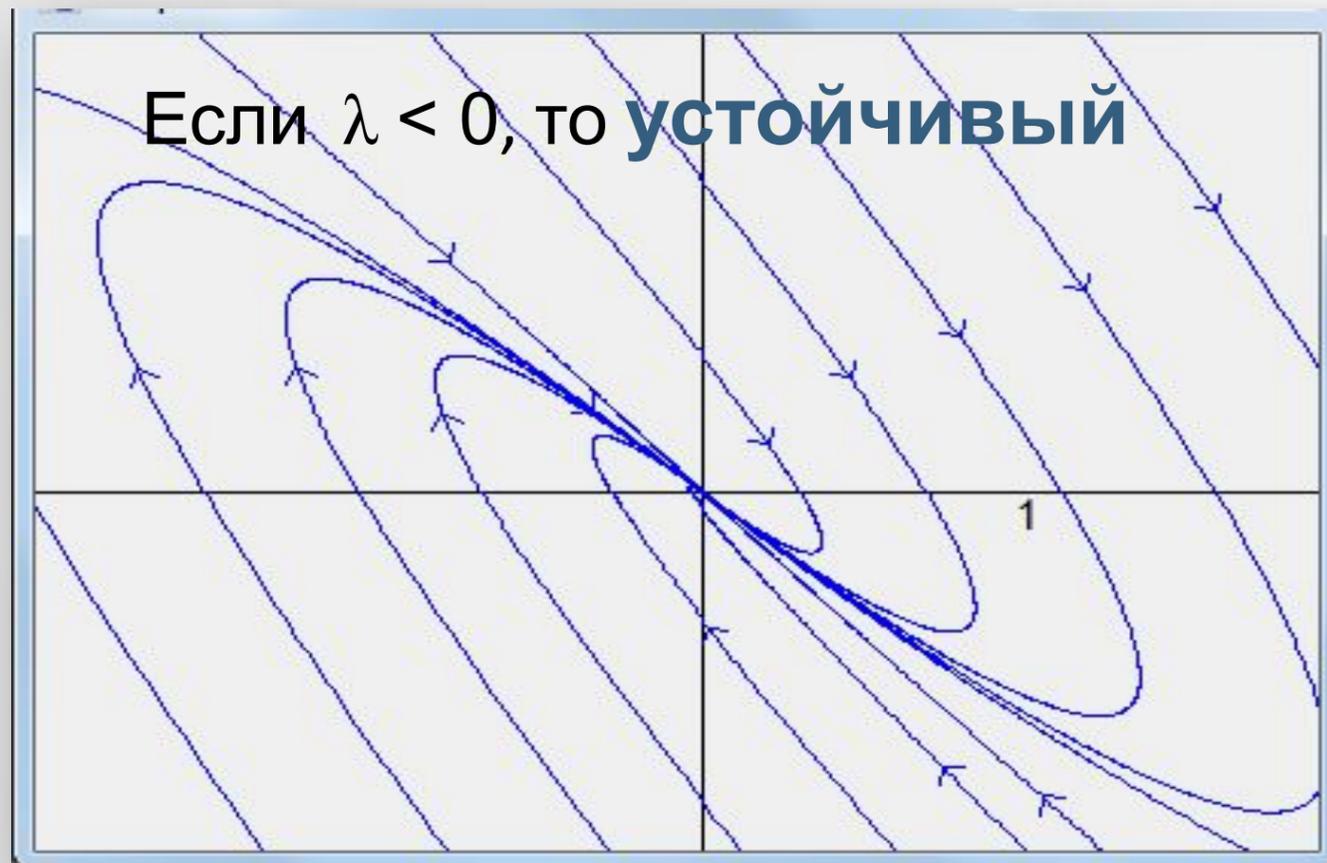
направление движения фазовой точки по

Фазовые портреты

Вырожденный узел,₁

если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ и в системе (1) $b^2 + c^2 \neq 0$.

Если $\lambda_1 > 0$, то **неустойчивый**



Направление на фазовой кривой указывает кривой при возрастании t .

направление движения фазовой точки по

Бесконечное множество точек покоя

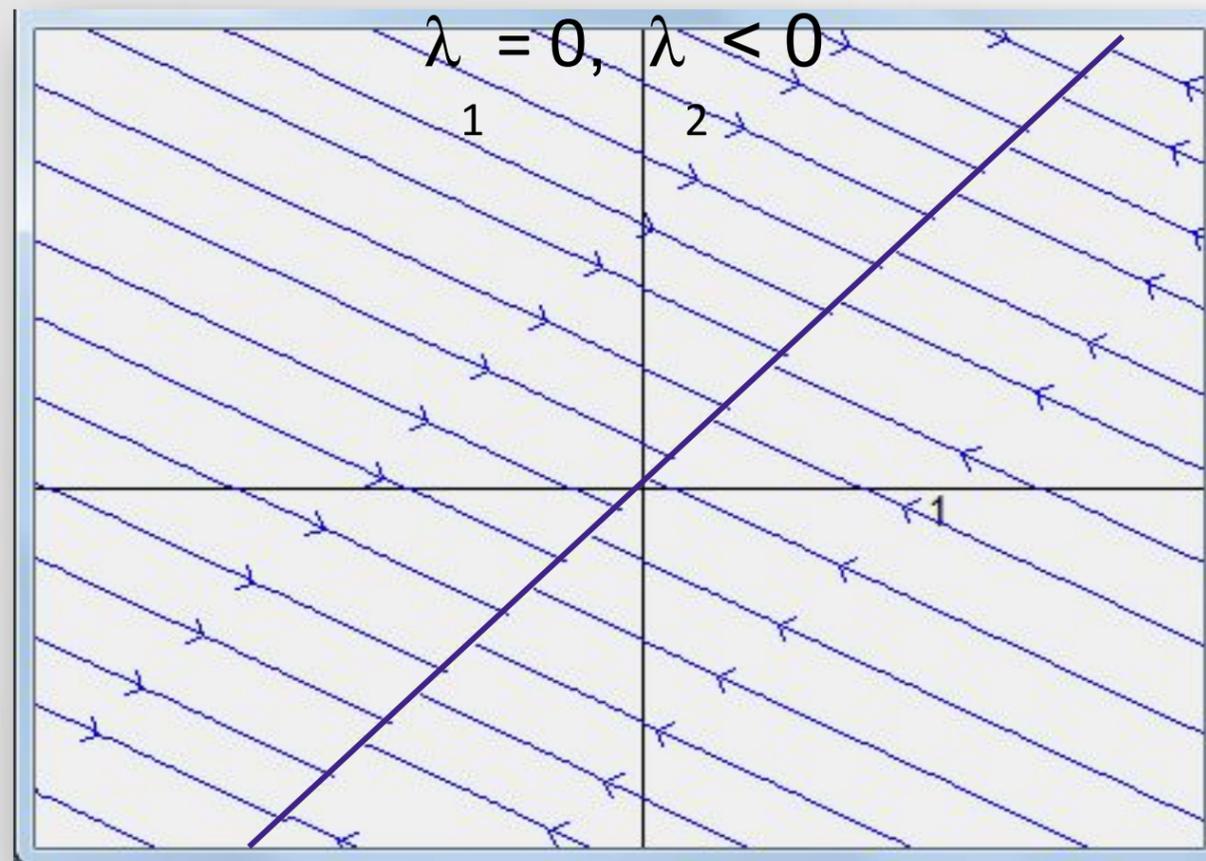
Если $\det A = 0$, то система (1) имеет бесконечное множество положений равновесия. При этом возможны три случая:

	Корни уравнения (3)	Определение точек покоя	Геометрическое место точек покоя
1	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Система (2) равносильна одному уравнению вида $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая на фазовой плоскости: $\alpha x + \beta y = 0$
2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Система (2) равносильна числовому равенству $0 = 0$	Вся фазовая плоскость
3	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Система (2) равносильна уравнению $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая $\alpha x + \beta y = 0$

Во втором случае любая точка покоя устойчива по Ляпунову. В первом же случае только, если $\lambda_2 < 0$.

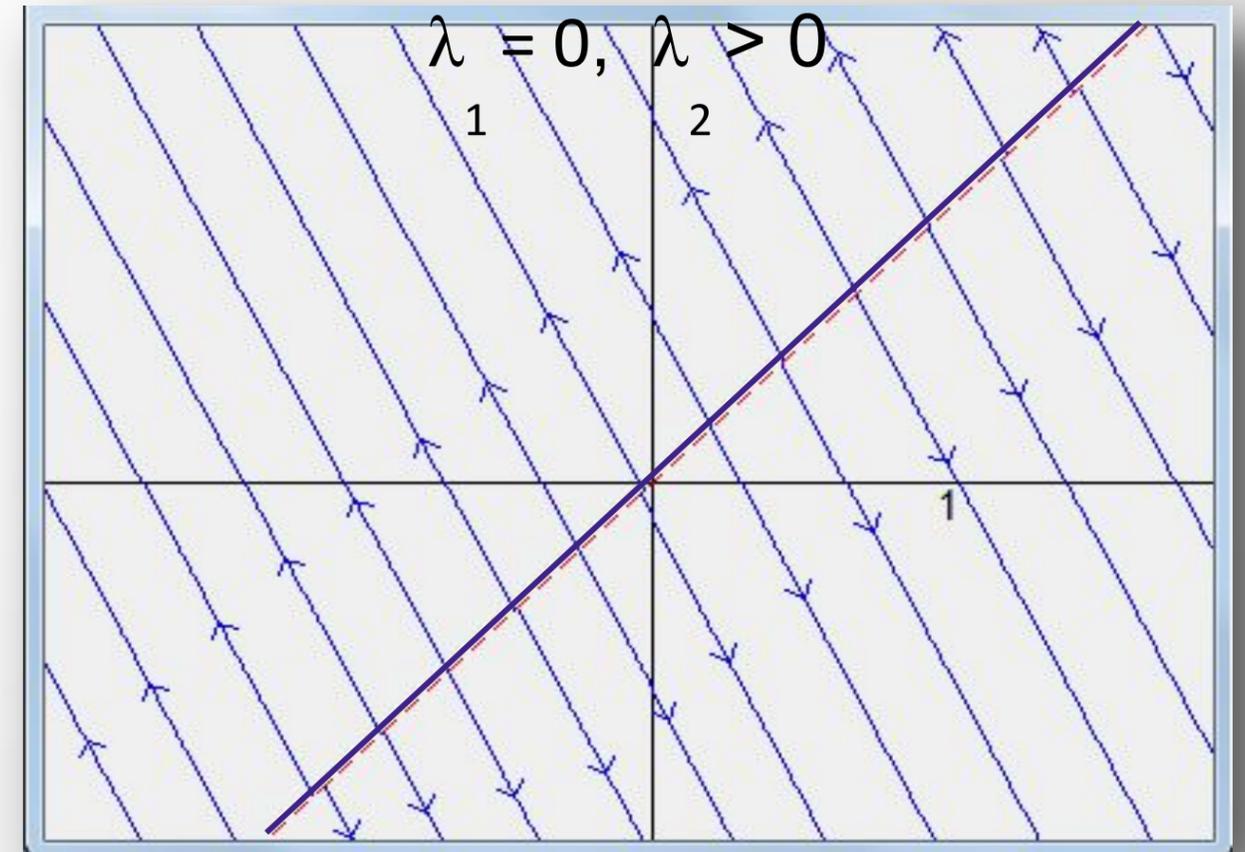
Фазовые портреты

Прямая устойчивых точек
покоя



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Прямая неустойчивых точек
покоя



направление движения фазовой точки по

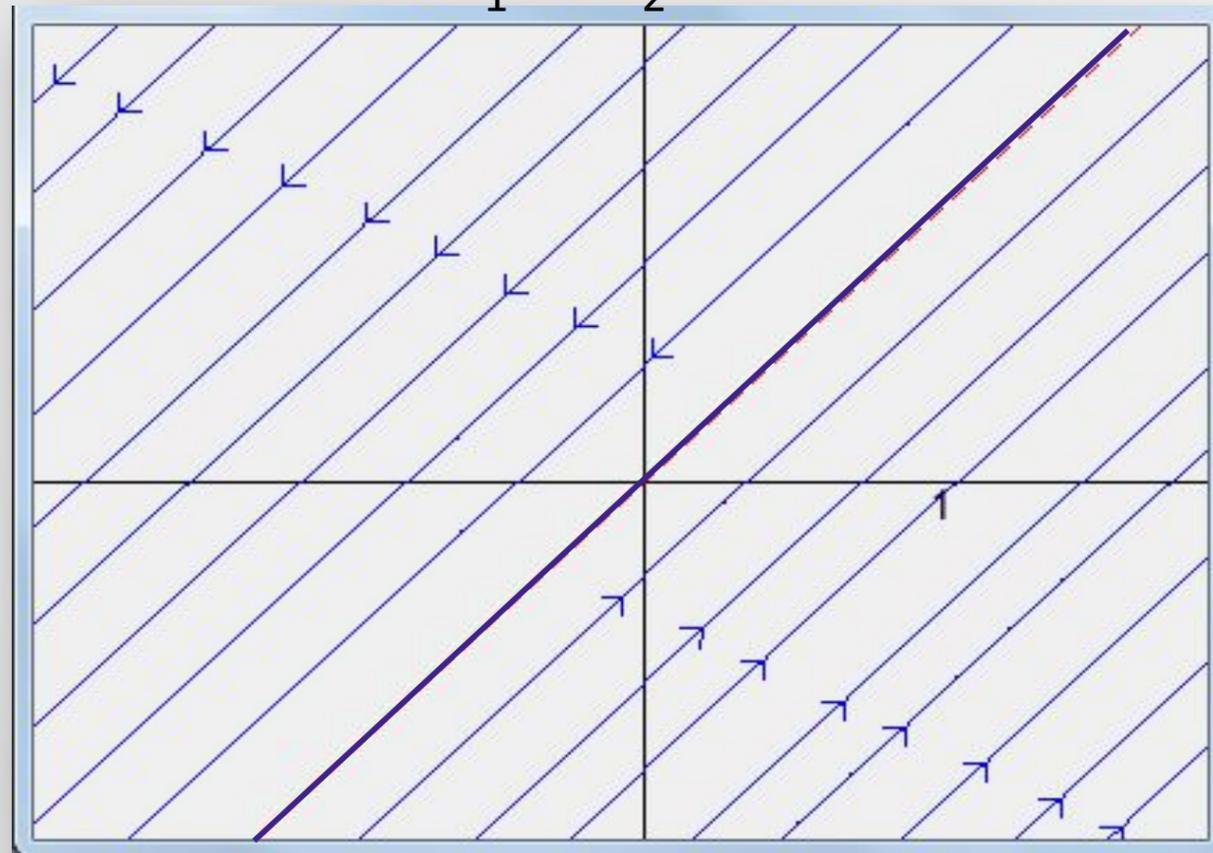
Фазовые портреты

Прямая неустойчивых точек

покоя

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

1 2



Фазовые прямые будут
параллельны прямой точек

покоя ($\alpha x + \beta y = 0$), если
первый интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

имеет вид $\alpha x + \beta y = C$,

где C – произвольная
постоянная.

Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

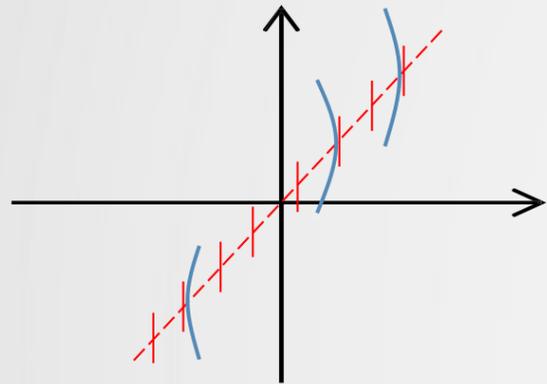
Алгоритм построения фазового портрета

1. Определить положения равновесия, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

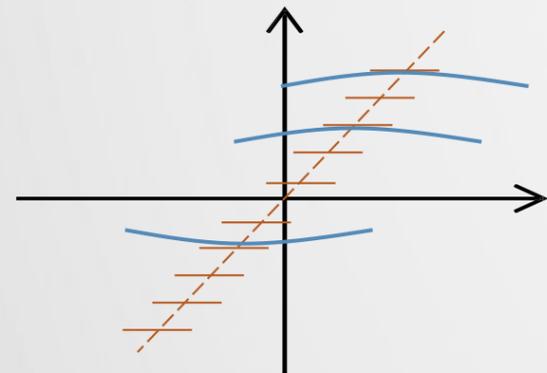
2. Найти собственные значения матрицы системы, решив характеристическое уравнение:
$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$
3. Определить тип точки покоя и сделать вывод об устойчивости.
4. Найти уравнения главных изоклин – горизонтальной и вертикальной, и построить их на фазовой плоскости.
5. Если положение равновесия является седлом или узлом, найти те фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.
6. Нарисовать фазовые траектории.
7. Определить направление движения по фазовым траекториям, указав его стрелками на фазовом портрете.

Главные изоклины



Вертикальная изоклина (ВИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная, проведенная к фазовой траектории, параллельна вертикальной оси.

Так как в этих точках фазовых траекторий $x'(t) = 0$, то для ЛДС (1) уравнение ВИ имеет вид: $ax + by = 0$.



Горизонтальная изоклина (ГИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная к фазовой траектории параллельна горизонтальной оси.

Так как в этих точках фазовых траекторий $y'(t) = 0$, то для ЛДС (1) уравнение ГИ имеет вид: $cx + dy = 0$.

Заметим, что точка покоя на фазовой плоскости – это пересечение главных изоклин. Вертикальную изоклину на фазовой плоскости будем помечать вертикальными штрихами, а горизонтальную – горизонтальными.

Фазовые траектории

Если положение равновесия является **седлом** или **узлом**, то существуют фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат. Уравнения таких прямых можно искать в виде* $y = kx$. Подставляя $y = kx$ в уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by},$$

для определения k получим:

$$(4) \quad k = \frac{c + kd}{a + bk} \Leftrightarrow bk^2 + (a - d)k - c = 0.$$

Дадим описание фазовых траекторий в зависимости от количества и кратности корней уравнения (4).

* Уравнения прямых, содержащих фазовые траектории, можно искать и в виде $x = ky$.

Тогда для нахождения коэффициентов следует решить уравнение $k = \frac{ak + b}{ck + d}$.

Фазовые траектории

Корни уравнения (4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$k_1 \neq k_2$	Седло	Прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ называют <i>сепаратрисами</i> . Остальные фазовые траектории – гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами
	Узел	Прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых. Фазовые траектории касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине λ (корень уравнения (3))

Фазовые траектории

Корни уравнения (4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$k_1 = k_2$	Вырожденный узел	Прямая $y = k x$. Остальные фазовые траектории – это ветви парабол, которые касаются в начале координат этой прямой
	Седло	Прямые* $y = k x$ и $x = 0$ – это <i>сепаратрисы</i> . Остальные фазовые траектории – гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами
$\exists! k_1$	Узел	Прямые* $y = k x$ и $x = 0$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых.

* Если уравнения прямых ищутся в виде $x = k y$, тогда это будут прямые $x = k y$ и $y = 0$.

Фазовые траектории

Корни уравнения (4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
$\forall k \in \mathbb{R}$	Дикритический $y = kx, \forall k \in \mathbb{R}$.	Все фазовые траектории лежат на прямых узел

Если положение равновесия является **центром**, то фазовые траектории являются эллипсами.

Если положение равновесия является **фокусом**, то фазовые траектории являются спиралями.

В случае, когда ЛДС имеет **прямую точек покоя**, то можно найти уравнения всех фазовых траекторий, решив уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

Его первый интеграл $ax + by = C$ и определяет семейство фазовых прямых.

Направление движения

Если положение равновесия является **узлом** или **фокусом**, то направление движения по фазовым траекториям определяется однозначно его устойчивостью (к началу координат) или неустойчивостью (от начала координат).

Правда, в случае **фокуса** требуется установить еще и направление закручивания (раскручивания) спирали – по часовой или против часовой стрелки. Это можно сделать, например, так. Определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

Значит, «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит против

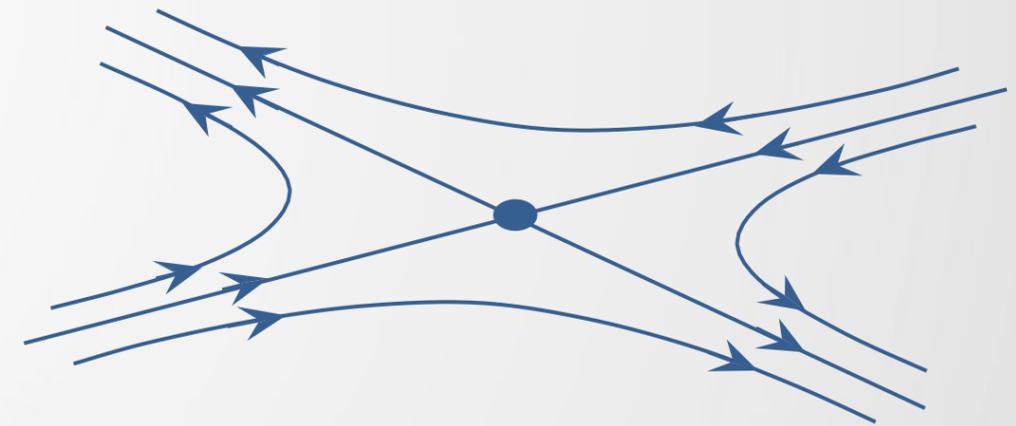
часовой стрелки.

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx < 0$, если $x > 0$, то «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит по часовой стрелке.

Направление движения

Если положение равновесия является **центром**, то направление движения по фазовым траекториям (по часовой стрелке или против) можно определить так же, как устанавливается направление «закручивания» (раскручивания)» траектории в случае фокуса.

В случае «**седла**» движение по одной из его сепаратрис происходит в направлении начала координат, по – другой от начала координат. По всем остальным фазовым траекториям движение происходит в соответствии с движением по сепаратрисам.



Следовательно, если положение равновесия – **седло**, то достаточно установить направление движения по какой-нибудь траектории. И далее можно однозначно установить направление движения по всем остальным траекториям.

Направление движения (седло)

Чтобы установить направление движения по фазовым траекториям в случае **седла**, можно воспользоваться одним из следующих способов:

Определить, какая из двух сепаратрис соответствует отрицательному собственному значению. Движение по ней происходит к точке покоя.

2 способ

Определить, как изменяется абсцисса движущейся точки по любой из сепаратрис. Например, для $y = kx$ имеем:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=kx} = ax + bkx = (a + bk)x, \quad x(t) = x(0)e^{(a+bk)t}.$$

Если $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение по сепаратрисе $y = kx$ происходит к точке покоя.

Если $x(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение происходит от точки покоя.

Направление движения (седло)

3 способ

Если ось x не является сепаратрисой, определить как изменится ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении оси x , значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит снизу вверх. Если же ордината убывает, то движение будет происходить сверху вниз.

Если определять направление движение по фазовой траектории, пересекающей ось y , то лучше анализировать изменение абсциссы движущейся точки.

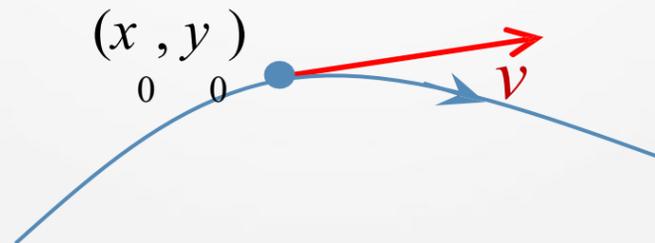
Направление движения

4 способ*

Построить в произвольной точке (x_0, y_0) фазовой плоскости (отличной от положения равновесия) вектор скорости:

$$v = \left. \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \right|_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Его направление и укажет направление движения по фазовой траектории, проходящей через точку (x_0, y_0) :



* Этот способ может быть использован при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

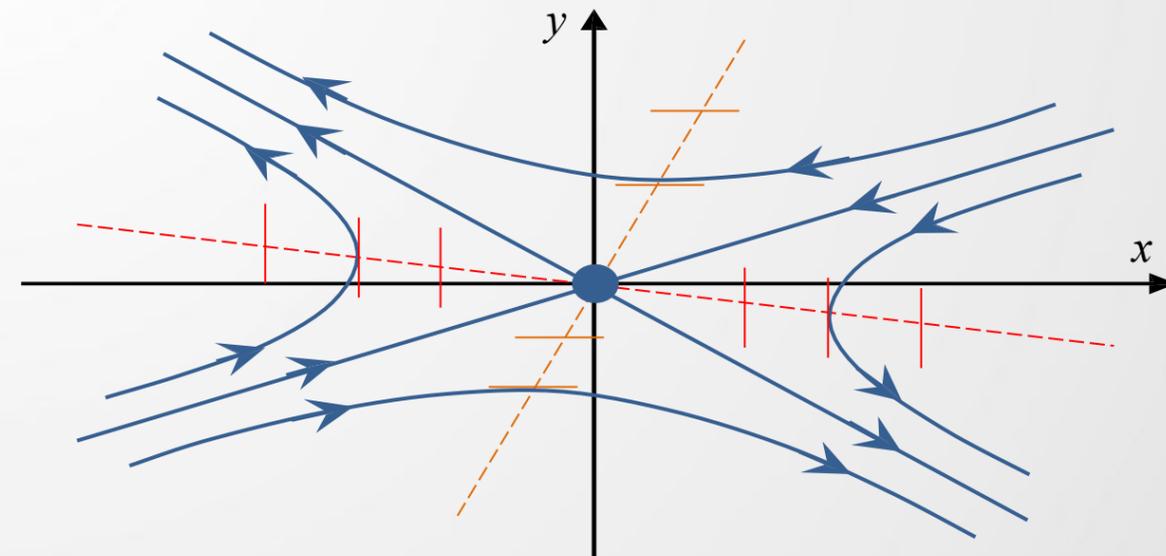
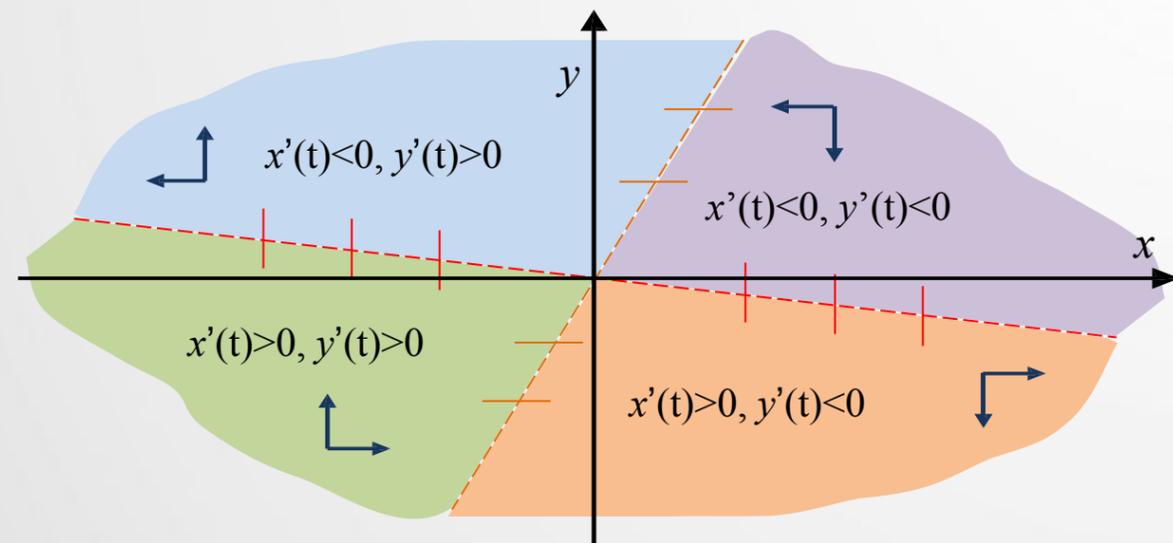
Направление движения

5 способ*

Определить области «знакопостоянства» производных:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy.$$

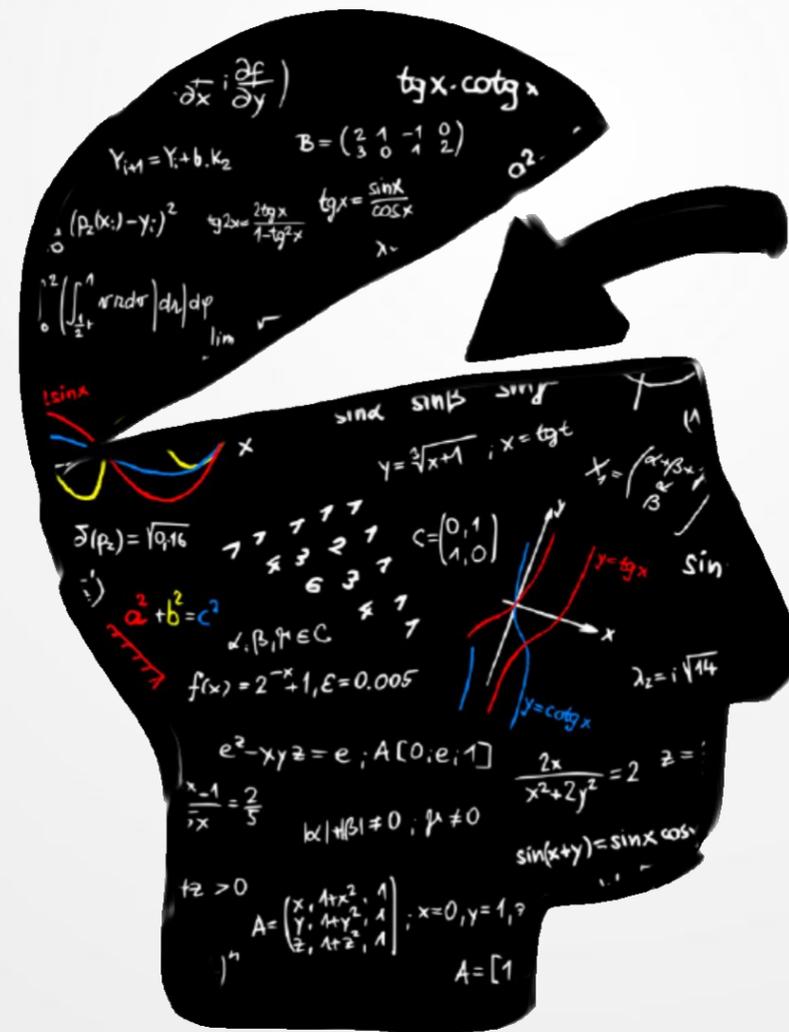
Границами этих областей будут главные изоклины. Знак производной укажет на то, как изменятся ордината и абсцисса движущейся точки по фазовой траектории в различных областях.



* Этот способ может быть использован при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

А сейчас нужны

задачи



Ключевой принцип -

от простого к

сложному

маленькими

шагами



Пример 1

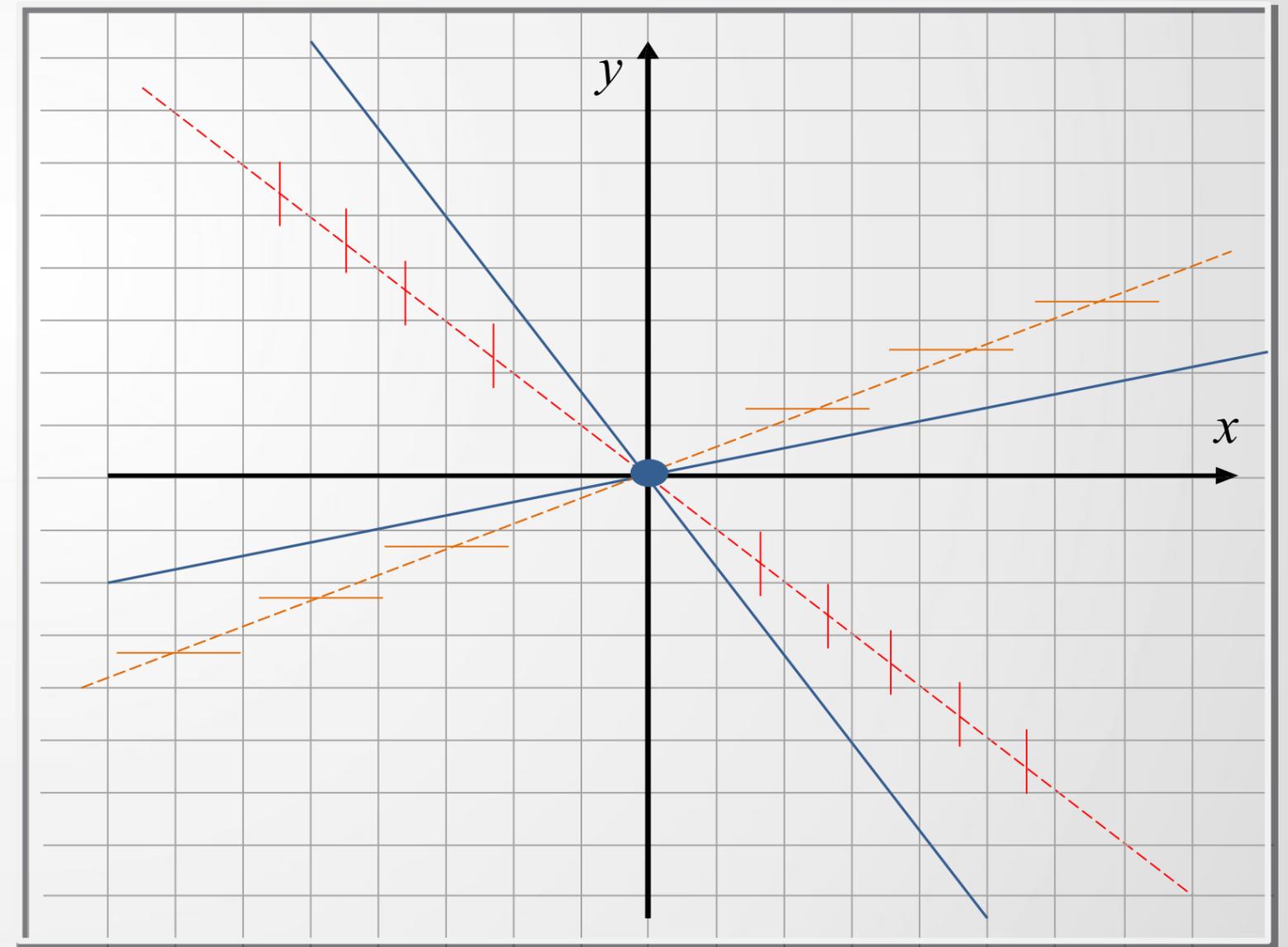
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = -6 \neq 0$.
2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6 = 0$, найдем его корни $\lambda = \pm\sqrt{6}$. Корни вещественные и разного знака. Следовательно, положение равновесия – **седло**.
3. Сепаратрисы седла ищем в виде $y = kx$
 $k = \frac{-1 + 2k}{-2 - 2k} \Leftrightarrow 2k^2 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k^{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}, k_1 \approx -2,22, k_2 \approx 0,22$.
4. Вертикальная изоклина: $x + y = 0$.
Горизонтальная изоклина: $x - 2y = 0$.

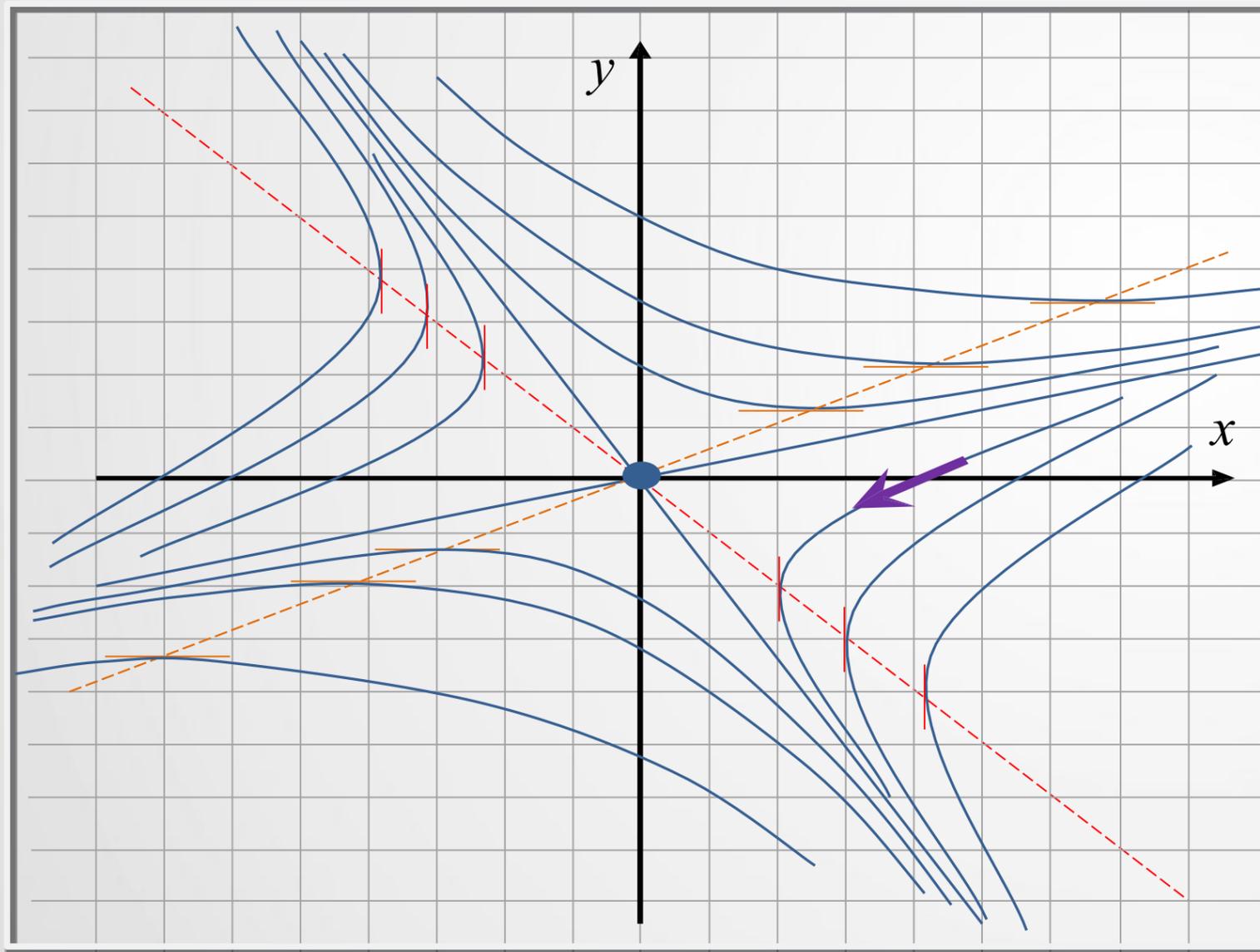
Пример 1(седло)

Нарисуем на фазовой плоскости сепаратрисы $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ и главные изоклины.

Остальную часть плоскости заполняют траектории - гиперболы, для которых сепаратрисы являются асимптотами.



Пример 1



Найдем направление движения по траекториям. Для этого можно

определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = -x < 0, \quad \text{если } x > 0.$$

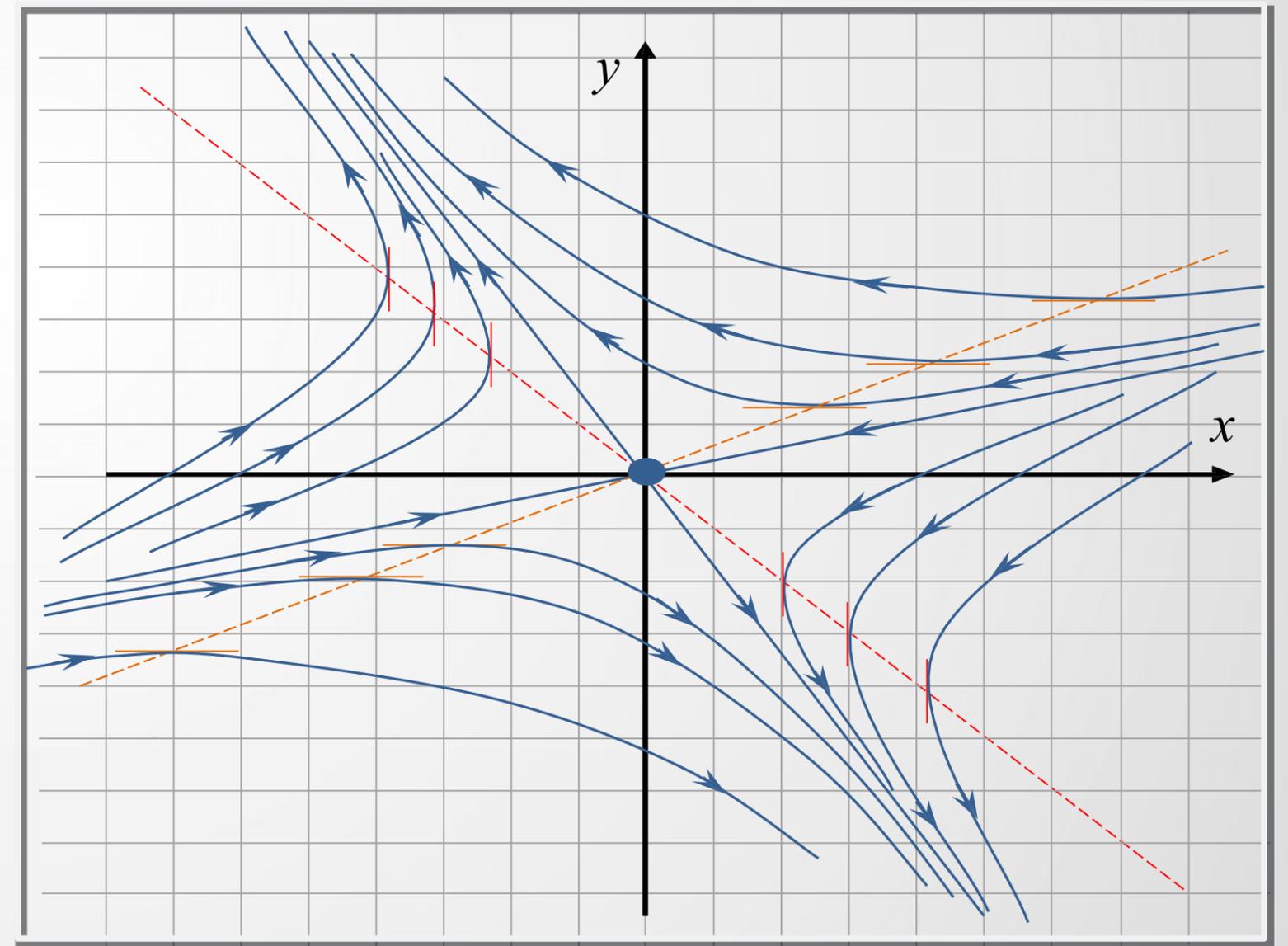
Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «по-

ложительного луча оси x » убывает. Значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим

положительную часть оси x , происходит сверху вниз.

Пример 1

Теперь легко найти
направление движения по
другим траекториям.



Неоднородные ЛДС

Рассмотрим линейную неоднородную систему (НЛДС) с постоянными коэффициентами:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \gamma \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \delta \end{cases}$$

когда $\gamma_2 + \delta_2 \neq 0$.

Решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = -\gamma \\ cx + dy = -\delta \end{cases}$$

получим состояния положения равновесия системы (5).

Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное положение равновесия $P(x_0, y_0)$.

Если $\det A = 0$, то система, либо имеет бесконечно много положений равновесия – точки прямой, определяемой уравнением $ax + by + \gamma = 0$ (или $cx + dy + \delta = 0$),

либо вообще не имеет положений равновесия.

Преобразование НЛДС

Если система (5) имеет положения равновесия, то выполнив замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

где, в случае, когда система (5) имеет бесконечно много положений равновесия, x_0, y_0 – координаты любой точки, принадлежащей прямой точек покоя, получим однородную систему:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta \end{cases}$$

Введя на фазовой плоскости x_0y_0 новую систему координат с центром в точке покоя P , построим в ней фазовый портрет системы (6). В результате на плоскости x_0y_0 получим фазовый портрет системы (5).

Пример 2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

Так как

$$\begin{cases} -2x - 2y + 12 = 0, \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 3 \end{cases}$$

то ДС имеет единственное положение равновесия $P(3;3)$. Выполнив замену

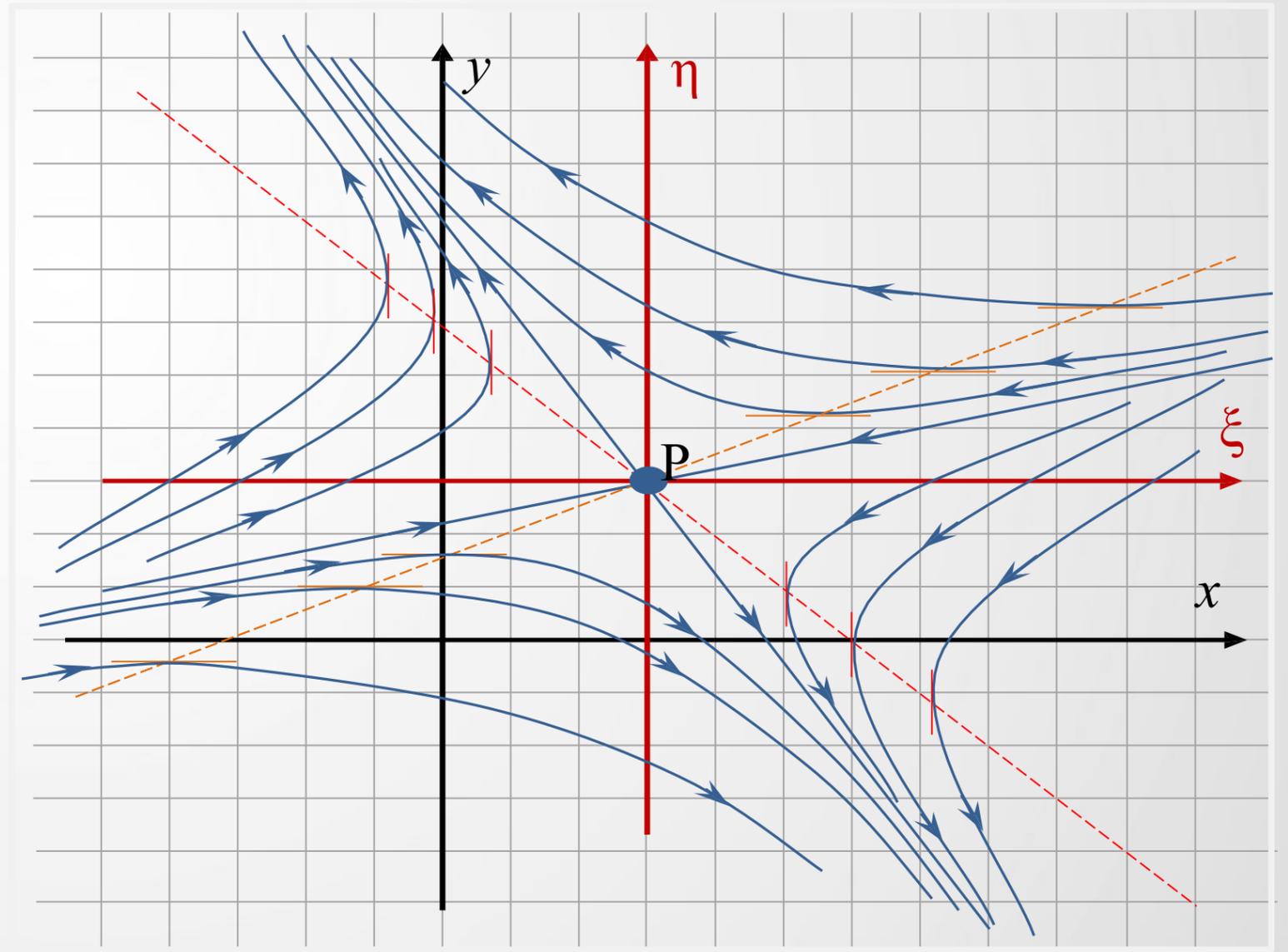
переменных $x = \xi + 3, y = \eta + 3$, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -2\xi - 2\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = -\xi + 2\eta \end{cases}$$

нулевое положение которой неустойчиво и является седлом.

Пример 2

Построив фазовый портрет на плоскости $\xi P \eta$, совместим ее с фазовой плоскостью xOy , зная, какие координаты имеет в ней точка P .



Фазовые портреты НЛДС

При построении фазовых портретов в случае, когда система (5) не имеет положений равновесия, можно использовать следующие рекомендации:

1. Найти первый интеграл уравнения

$$\frac{dx}{ax + by + \gamma} = \frac{dy}{cx + dy + \delta},$$

и таким образом определить семейство всех фазовых траекторий.

2. Найти главные изоклины: $ax + by + \gamma = 0$ (ВИ), $cx + dy + \delta = 0$ (ГИ).

3. Найти прямые, содержащие фазовые траектории, в виде $y = kx + \omega$.

При этом для нахождения коэффициентов k и ω , учитывая, что

$$c : a = d : b = \alpha,$$

построить уравнение:

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=kx+\omega} = \left. \frac{\alpha(ax + by) + \delta}{ax + by + \gamma} \right|_{y=kx+\omega} = \alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{(a + kb)x + b\omega + \gamma}$$

Фазовые портреты НЛДС

Так как выражение

$$\alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{(a + kb)x + b\omega + \gamma}$$

не зависит от x , если $a + kb = 0$, то получим следующие условия для нахождения k и ω :

$$a + kb = 0, \quad k = \alpha + \frac{\delta - \alpha\gamma}{b\omega + \gamma}.$$

Уравнение прямой можно искать и в виде $x = ky + \omega$. Условия для определения k и ω строятся аналогично.

Если существует только одна прямая, то она является асимптотой для остальных траекторий.

2. Для определения направления движения по фазовым траекториям определить области «знакопостоянства» правых частей системы (5).
3. Для определения характера выпуклости (вогнутости) фазовых траекторий построить производную $y''(x)$ и установить области ее «знакопостоянства».

Различные приемы построения фазовых портретов рассмотрим на примерах.

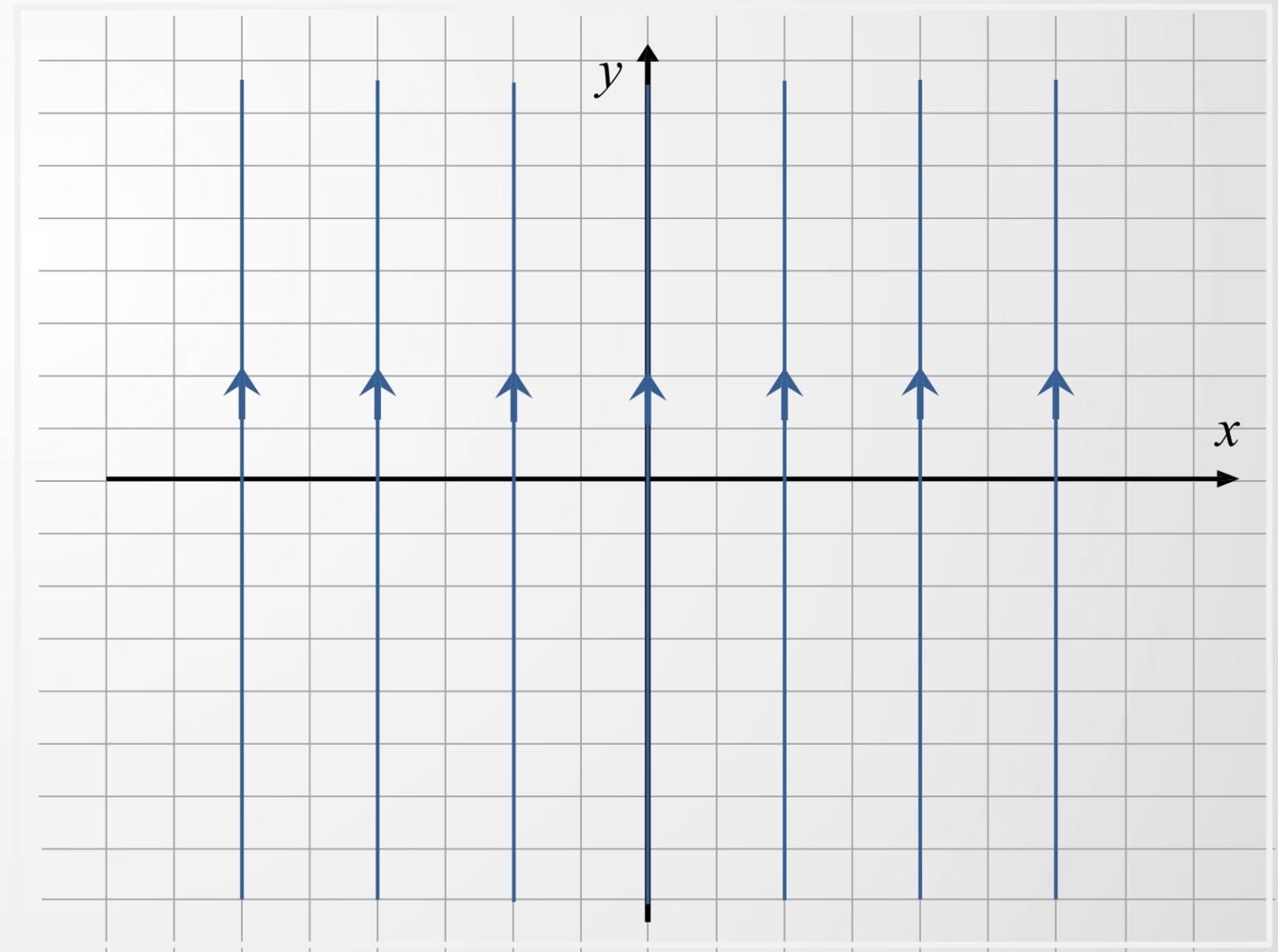
Пример 3

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 1 \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{1} = 0$,
получим, что все фазовые траектории лежат на прямых

$$x = C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Так как $y'(t) = 1 > 0$, то ордината движущейся точки по любой фазовой траектории возрастает. Следовательно, движение по фазовым траекториям происходит снизу вверх.



Пример 4

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = x - 1 \end{cases}$$

Решив уравнение: $\frac{dy}{dx} = x - 1$,

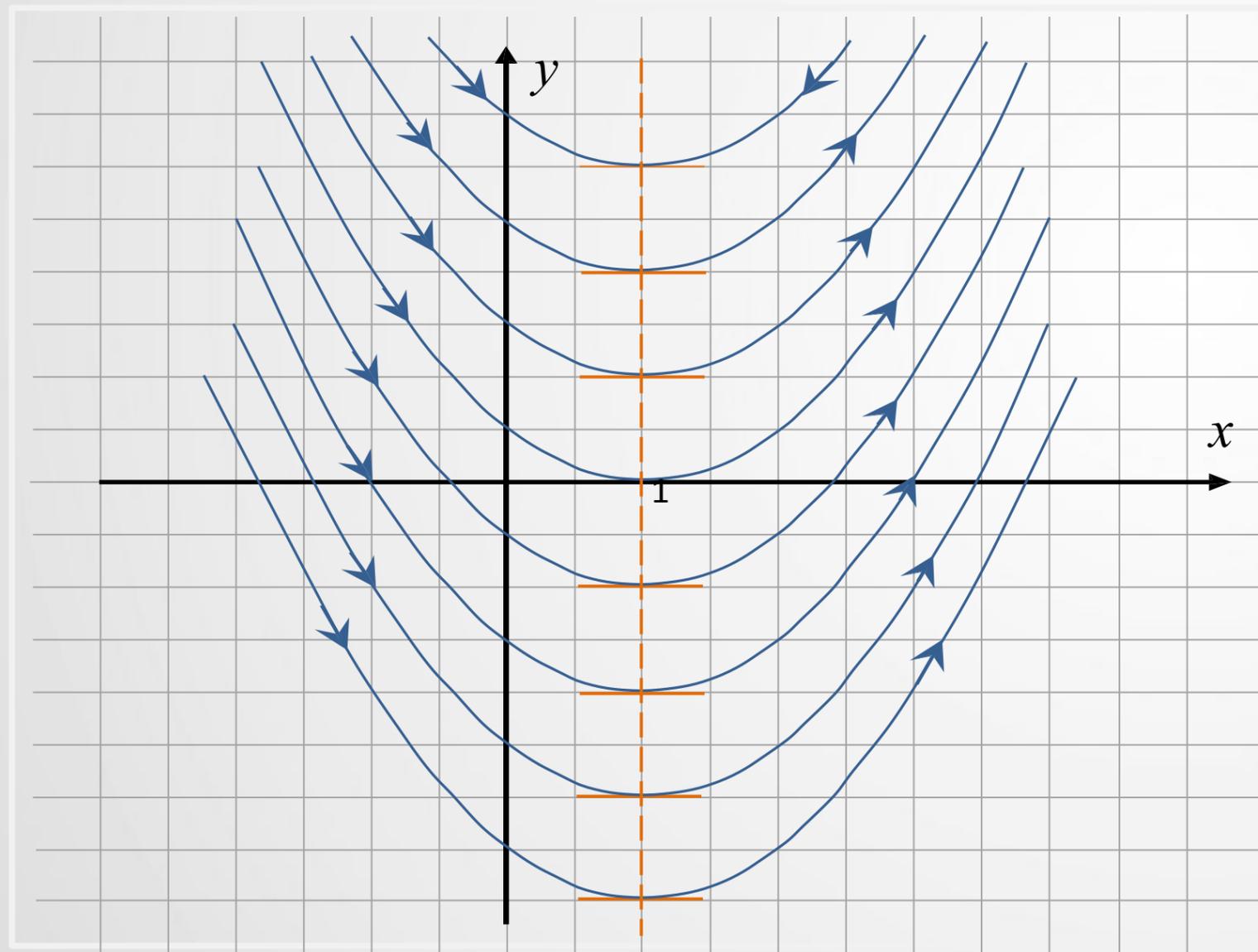
получим, что фазовыми траекториями системы являются параболы:

$$y = \frac{(x-1)^2}{2} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

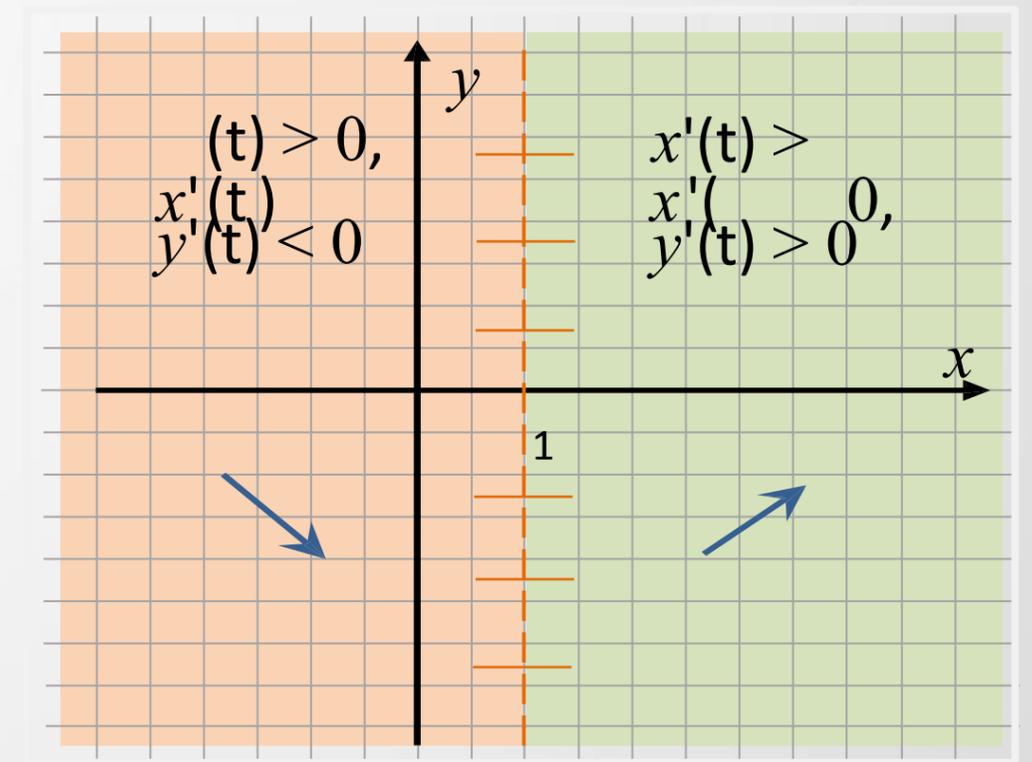
оси которых лежат на горизонтальной изоклине $x - 1 = 0$, а ветви направлены вверх.

Так как $x'(t) = 1 > 0$, то абсцисса движущейся точки по любой фазовой траектории возрастает. Следовательно, движение по левой ветви параболы происходит сверху вниз до пересечения с прямой – горизонтальной изоклиной, а далее – снизу вверх.

Пример 4



Определить направление движения по фазовым траекториям можно было бы и установив области «знакопостоянства» правых частей системы.



ХММ...

Колебания в линейном случае происходят синхронно — с одной и той же частотой. В нелинейном же случае, частота колебания с большей амплитудой **меньше**, чем у колебания с малой амплитудой



Это служит еще одним подтверждением того, что нелинейные колебания не являются гармоническими.



Знания — сила!

Теперь вы знаете

чуть больше

о её **светлой** стороне.