**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики**

**И.Г. Руцкова**

# Множества и функции

**Электронный курс лекций «Математический анализ», часть 1**

**Оренбург 2017**

# Множества: основные понятия, определения и обозначения

Понятие множества, как и числа, является первичным в математике и через другие понятия не определяется. Оно используется элементов, обладающих одинаковыми свойствами.

*Множества* принято ***обозначать*** заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C, …. X, Y. Элементы множеств* – малыми буквами: *a, b, c, …, x,y.*

Если *a является элементом множества A*, то это ***обозначается:***

$$\boxed{a \in A}$$

Символ «$\in$» читается «принадлежит» (от греческого слова $\varepsilon\sigma\tau\iota$ - быть).

Если *a не является элементом множества A*, то это ***обозначается***:

$$\boxed{a \notin A} \quad \text{или} \quad \boxed{a \;\overline{\in}\; A}$$

Символы «$\notin$» и «$\overline{\in}$» читаются « не принадлежит».

В зависимости от количества элементов множества подразделяются на *конечные* и *бесконечные.*

# Равные множества. Способы задания множеств

***Определение 1.*** Множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

***Обозначение:*** $A = B$.

Задать множество можно: либо перечислив его элементы, либо указав способ перечисления, либо, указав характерное свойство его элементов.

- Запись вида $A = \{a, b, c\}$ означает, что множество состоит из элементов $a, b, c$.
- Если множество $A$ состоит из элементов $a_\alpha$, где $\alpha$ пробегает некоторое множество символов $V$, то это записывается так: $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in V}$.
- Если множество состоит из элементов, обладающих определенными свойствами, то используют запись вида: $A = \{a \mid \ldots\}$ или $A = \{a : \ldots\}$, где в фигурных скобках, после вертикальной черты или двоеточия, записывается свойство элементов.

***Определение 2.*** Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*.

***Обозначение:*** $\varnothing$.

# Подмножества

***Определение 3.*** Множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$, если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$.
***Обозначение:*** $A \subset B$ или $B \supset A$.

Символ «$\subset$» означает «включается». Соответственно, символ «$\not\subset$» означает «не включается».

Определение 3, используя классические символы, применяющиеся для сокращения записи математических рассуждений:

- *«$\Rightarrow$» - следует;*
- *«$\Leftrightarrow$» - тогда и только тогда (равносильно);*
- *«$\forall$» - любой (всякий, каждый),*

можно записать компактнее в символическом виде (смотрите определение 4).

***Определение 4*** (символический вариант определения 3).
$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in A \quad \Rightarrow \quad a \in B.$$

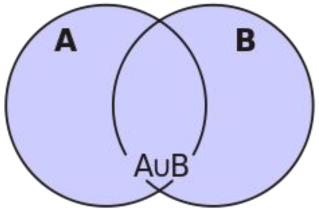
***Замечание.*** Очевидно, что для любого множества $A$: $A \subset A$. Кроме того, по определению, полагают, что пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subset A, \quad \forall A$.

***Определение 5.*** Множества $\varnothing$ и A называются *несобственными* подмножествами множества A, остальные подмножества называются *собственными.*

# Операции над множествами

***Определение 6.*** Множество $C$ называется *объединением* множеств $A$ и $B$, если оно состоит из всех элементов принадлежащих множеству $A$ или $B$.
***Обозначение:*** $C = A \cup B$.

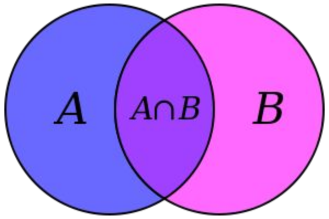
Символ «$\cup$» означает объединение.




***Определение 7*** (символическая запись определения 6).
$C = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{c \mid c \in A \quad или \quad c \in B\}$.

***Определение 8.*** Множество $C$ называется *пересечением* множеств $A$ и $B$, если оно состоит из всех элементов одновременно принадлежащих множеству $A$ и $B$.
***Обозначение:*** $C = A \cap B$.

Символ «$\cap$» означает пересечение.



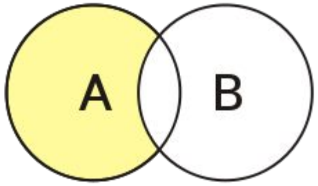

***Определение 9*** (символическая запись определения 8).
$C = A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{c \mid c \in A \quad и \quad c \in B\}$.

***Определение 10.*** Множества $A$ и $B$, имеющие общие элементы ($A \cap B \neq \varnothing$), называются *пересекающимися*, множества $A$ и $B$, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), называются *непересекающимися*.

# Операции над множествами

***Определение 11.*** Множество $C$ называется *разностью* множеств $A$ и $B$, если оно состоит из всех элементов множества $A$, не принадлежащих множеству $B$.
***Обозначение:*** $C = A \setminus B$.

Символ «\» означает разность.



A\B

***Определение 12*** (символическая запись определения 11).
$C = A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad C = \{c \mid c \in A \ \ и \ \ c \notin B\}$.

***Определение 13.*** Если $A \subset B$, то множество $B \setminus A$ называется *дополнением* множества $A$ до множества $B$.

**Пример 1.** Для множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ и $B = \{3, 5, 9\}$ определите:
$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

***Решение.***

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}; \qquad A \cap B = \{3\};$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 4, 7\}; \qquad B \setminus A = \{5, 9\}.$$

# Числовые множества

***Определение 14.*** Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми* множествами.

$N = \{1, 2, \ldots\}$ - множество *натуральных* чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - множество *целых* чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$ - множество *рациональных* чисел, $\frac{m}{n}$ - несократимая.

Множество действительных чисел $R$, чаще всего, вводится:

- либо как *множество бесконечных десятичных дробей*, причем если число рациональное, то оно представляется в виде периодической дроби, в противном случае число – иррациональное;
- либо как *некоторая совокупность*, где определены взаимосвязанные операции сложения, умножения, сравнения чисел по величине и которые обладают определенного рода непрерывностью.

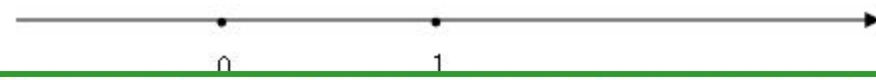
$J = R \setminus Q$ - множество иррациональных чисел.

$C = \left\{ z \middle| z = x + iy;\ x, y \in R,\ i^2 = -1 \right\}$ - множество комплексных чисел.

$$\boxed{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

## Геометрическая интерпретация действительных чисел

***Геометрически*** множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа - точками этой прямой. совокупность действительных чисел часто называют *числовой прямой*, или *числовой осью*.




Часто множество действительных чисел дополняются двумя элементами, называемыми «минус бесконечность» и «плюс бесконечность», которые обозначают соответственно: «$-\infty$» и «$+\infty$».

По определению, полагают, что $\forall x \in R \Rightarrow -\infty < x < +\infty;$

используют обозначение:

$(-\infty;+\infty) = \{x \in R \mid -\infty < x < +\infty\}$ - числовая ось – множество $R$.

***Определение 15.*** Множество $R$, дополненное элементами «$-\infty$» и «$+\infty$», называется *расширенным множеством действительных чисел (расширенной числовой прямой)*.

***Обозначение:*** $\overline{R}$.

Элементы «$-\infty$» и «$+\infty$» иногда называют *бесконечно удаленными точками расширенной числовой прямой*.

# Основные виды промежутков на множестве действительных чисел

$(a;b)=\{x\in R\mid a<x<b,\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - интервал $(a;b)$;


$[a;b]=\{x\in R\mid a\le x\le b;\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - отрезок $[a;b]$;


$[a;b)=\{x\in R\mid a\le x<b;\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - полуинтервал $[a;b)$;


$(a;b]=\{x\in R\mid a<x\le b;\quad a,b\in R;\quad a<b\}$ - полуинтервал $(a;b]$;


$(-\infty;b]=\{x\in R\mid -\infty<x\le b;\quad b\in R\}$ - луч $(-\infty;b]$;


$[a;+\infty)=\{x\in R\mid a\le x<+\infty;\quad a\in R\}$ - луч $[a;+\infty)$;


$(-\infty;b)=\{x\in R\mid -\infty<x<b,\quad b\in R\}$ - открытый луч $(-\infty;b)$;


$(a;+\infty)=\{x\in R\mid a<x<+\infty,\quad a\in R\}$ - открытый луч $(a;+\infty)$.

## Абсолютная величина действительного числа и её свойства

***Определение 16.*** *Абсолютной величиной* (или *модулем*) действительного числа $x$ называется число, обозначаемое $|x|$ и определяемое по правилу:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Например, $|5| = 5$, $|-3| = 3$.

Нетрудно заметить, что с геометрической точки зрения абсолютная величина (модуль) действительного числа – характеризует расстояние от числа $x$ до числа 0.

**Пример 1.** Решите уравнения: а) $|x| = 2$; б) $|x-4| = 5$; в) $||x-2|-3| = 6$.

***Решение.***

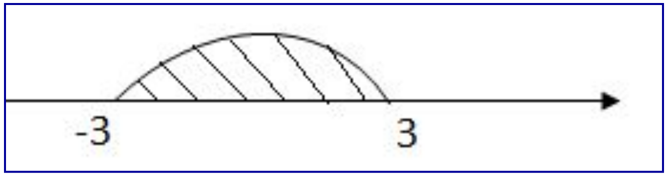
а) $|x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$ б) $|x-4| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 = 5, \\ x-4 = -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -1. \end{array}\right.$

с) $||x-2|-3| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|-3 = 6, \\ |x-2|-3 = -6; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2| = 9, \\ |x-2| = -3; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-2 = -9, \\ x-2 = 9, \end{array}\right. \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7, \\ x = 11. \end{array}\right.$

# Абсолютная величина действительного числа и её свойства

**Пример 2.** Решите неравенства: а) $|x| < 3$; б) $|x-1| < 4$.

***Решение.***



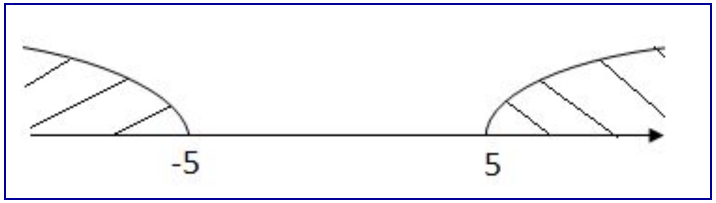

а) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-3;3)$.

б) $|x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-1 < 4 \Leftrightarrow -4+1 < x < 4+1 \Leftrightarrow -3 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-3;5)$.

**Пример 3.** Решите неравенства: $|x| > 5$; б) $|x-1| \geq 7$.

***Решение.***

а) $|x| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$.




б) $|x-1| \geq 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \geq 7, \\ x-1 \leq -7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 8, \\ x \leq -6. \end{array}\right.$

## Абсолютная величина действительного числа и её свойства

**Теорема 1**

1) $|x| \ge 0, \quad \forall x \in R;$

2) $|x| = |-x|, \quad \forall x \in R;$

3) $-|x| \le x \le |x|, \quad \forall x \in R;$

4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in R;$

5) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad \forall x, y \in R,\ y \ne 0;$

6) $|x + y| \le |x| + |y|, \quad \forall x, y \in R;$

7) $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|, \quad \forall x, y \in R.$

**Следствие 1**

1) $|x - y| \ge |x| - |y|, \quad \forall x, y \in R;$

2) $|x - y| \ge |y| - |x|, \quad \forall x, y \in R.$

$$R_+ = \{x \in R | x > 0\}, \qquad R_- = \{x \in R | x < 0\}$$

# Функции: основные понятия

Пусть $X$ и $У$ – некоторые множества.

***Определение 17.*** *Функцией*, определенной на множестве $X$ со значениями в $У$, называется правило или соответствие $f$ (отображение $f$), которое $\forall x \in X$ относит (ставит в соответствие) некоторый ***единственный*** элемент $y \in Y$.

***Обозначения:*** $f : X \to Y$ или $y = f(x)$, $x \in X$.

***Определение 18.*** Множество $X$ в этом случае называется *множеством задания функции* $f$ или *множеством определения* функции $f$.

***Определение 19.*** Множество $\{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$ в этом случае называется *множеством значений* функции $f$.

***Обозначение:*** $E(f) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$. $\boxed{E(f) \subset Y}$.

Например,

$$f(x) = x^2,\ x \in R:\ X = R = (-\infty; +\infty);\ E(f) = [0; +\infty);$$

$$f(x) = x^3,\ x \in R:\ X = R = (-\infty; +\infty);\ E(f) = (-\infty; +\infty) = R;$$

$$f(x) = \sin x, x \in R:\ X = R = (-\infty; +\infty);\ E(f) = [-1; 1].$$

# Функции: основные понятия

**Способы задания:** табличный, графический, описательный, аналитический, программный.

При аналитическом задании функции задаются с помощью формул, в которых используются ранее изученный и специально обозначенный набор функций, алгебраических действий и предельный переход.

***Определение 20***. Если $X \subset R$, $Y \subset R$, то функция $f : X \to Y$, называется *действительной функцией одного действительного переменного.*

***Определение 21***. Если $X \subset R^n$, $Y \subset R$, то функция $f : X \to Y$, называется *действительной функцией n действительных переменных.*

***Определение 22***. Если $X \subset C$, $Y \subset R$, то функция $f : X \to Y$, называется *действительной функцией одного комплексного переменного.*

***Определение 23***. Если $X \subset C$, $Y \subset C$, то функция $f : X \to Y$, называется *комплексной функцией одного комплексного переменного.*

# Функции: основные понятия

Пусть задана некоторая функция $f: X \to Y$, $X \subset R$, $Y \subset R$.

Если на плоскости задана прямоугольная система координат $OXY$, то иллюстрацией отображения $f$ будет множество точек $(x; y)$, где $y = f(x)$, $x \in X$.

***Определение 24.*** Множество точек координатной плоскости OXY $\{(x, y) | y = f(x), x \in X\}$ называется *графиком* функции $f$.

***Обозначение:*** $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x), x \in X\}$.

Для действительных функций, при аналитическом задании, т.е. в виде формулы с использованием известных функций и алгебраических операций, дополнительно вводится понятие *области определения функции* (она соответственно совпадает с множеством задания функции).

***Определение 25.*** Областью определения действительной функции $f$, заданной аналитически, называется множество тех действительных чисел, для которых:

1) указанная формула имеет смысл;
2) в процессе проведения всех необходимых вычислений получаются только действительные числа.

***Обозначение:*** $D(f)$.