

Презентация по
Математическому Анализу
Семинар 31

Тройные интегралы. Вычисление тройных интегралов. Декартовы прямоугольные координаты.

Рассматривая задачу отыскания массы неоднородного тела, получим определение тройного интеграла.

Рассмотрим тело, занимающее пространственную область T , и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела

$$\delta = \delta(x, y, z)$$

Разобьем тело произвольным образом на n частей. Объемы этих частей обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$

$$P_i(x_i, y_i, z_i)$$

Выберем затем в каждой части по произвольной точке

. Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна ее значению в точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$

получим приближенное выражение для массы

всего тела в виде суммы

$$M_n = \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (*)$$

Предел этой суммы при условии, что $n \rightarrow \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку, то есть ее диаметр стремится к 0 и даст массу M тела:

$$M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T \delta(x, y, z) dV$$

Сумма (*) называется интегральной суммой, а ее предел – тройным интегралом от функции $\delta = \delta(x, y, z)$ по пространственной области T .

К вычислению тройного интеграла приводят и другие задачи, поэтому в дальнейшем будем рассматривать тройной интеграл:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_T f(x, y, z) dV$$

где $f(x, y, z)$ – любая функция, непрерывная в замкнутой ограниченной области T , имеющей объем V . Обычно эта область ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями.

Вычисление тройных интегралов

Вычисление тройного интеграла, также как и двойного может быть выполнено посредством ряда последовательных интегрирований.

Декартовы прямоугольные координаты

Пусть дан тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ $\iiint_T f(x, y, z) dV$. Область T отнесена к системе декартовых координат $OXYZ$.

Разобьем область интегрирования T плоскостями параллельными координатным плоскостям. Тогда частичные области будут параллелепипеды с гранями параллельными OXY, OXZ, OYZ . Элемент объема будет равен произведению дифференциалов переменных, интегрирования $dV = dx dy dz$, тогда:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$$

Пусть область интегрирования T определяется неравенствами:

$$x_1 \leq x \leq x_2; y_1(x) \leq y \leq y_2(x); z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

, где $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ - непрерывные функции. Тогда тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область T , вычисляется по формуле

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (*)$$

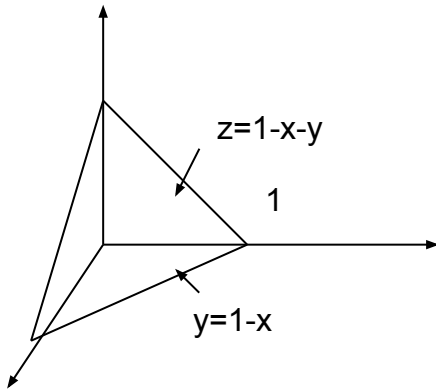
Если областью интегрирования служит внутренняя часть параллелепипеда с гранями параллельными координатным плоскостям, то пределы интегрирования постоянные во всех трех интегралах.

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz \quad (**)$$

В этом случае интегрирование можно проводить в любом порядке, пределы интегрирования при этом будут сохраняться.

Примеры с решениями:

1. Вычислить $I = \iiint_T (x + y + z) dx dy dz$, где T – область, ограниченная координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и плоскостью $x+y+z=1$



Решени

е:

Интегрирование по z совершается от $z=0$ до $z=1-x-y$.

Обозначая за D - проекцию области T на плоскость OXY , получим:

$$\iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \iint_D \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dx dy = \iint_D \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dx dy$$

Расставим пределы интегрирования по области – треугольнику, стороны которого:

$$x=0, y=0, x+y=1$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2}] = \int_0^1 dx [\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6}] \Big|_0^{1-x} =$$

$$\int_0^1 [\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6}] dx = \frac{1}{8}$$

2. Вычислить $\iiint_T z dx dy dz$, где область T определяется неравенствами

$$0 \leq x \leq 1/2; x \leq y \leq 2x; 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Имеем

$$\therefore I = \int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} (1-x^2-y^2) dy =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left[y - yx^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_x^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left(2x - 2x^3 - \frac{8}{3} x^3 - x + x^3 + \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left(x - \frac{10}{3} x^3 \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{6} x^4 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{7}{192}$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Вычислит $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, если

– прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами