«Исследовательская работа по построению графиков функции, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины»

Выполнила: Мухаматдинова Динара, ученик 10 класса Кучуковской средней общеобразовательной школы Агрызского муниципального района РТ
Научный руководитель: **Бурганиева А. Р., у**читель математики высшей категории

Цель и задачи работы: изучить соответствующие теоретические материалы, выявить алгоритм построения графиков функции, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины.

Объект исследования: функции, содержащие знак абсолютной величины.

Предмет исследования: закономерность графиков функции $y = f|(x)|$, $y = |f(x)|$, $y = |f|(x)||$.

Методы исследования: решение примеров на построения графиков, сравнение, анализ, обобщение.

Содержание

Историческая справка

В первой половине XVII века начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма(1601-1665) и Рене Декарт (1596-1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от её абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон(1643-1727) понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки.

Термин "функция" (от латинского function – исполнение , совершение) впервые ввел немецкий математик Готфрид Лейбниц(1646-1716). У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции).

В дальнейшем швейцарский математик Иоганн Бернулли(1667-1748) и член Петербургской Академии наук знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер(1707-1783) рассматривали функцию как аналитическое выражение. У Эйлера имеется и общее понимание функции как зависимости одной переменной величины от другой.

Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера». Это многозначное слово(омоним),которое имеет множество значений и применяется не только в математике, но и в

архитектуре, физике, технике, программировании и других точных науках.

В архитектуре - это исходная единица измерения, устанавливаемая для данного архитектурного сооружения и служащая для выражения кратных соотношений его составных элементов.

В технике - это термин, применяемый в различных областях техники, не имеющий универсального значения и служащий для обозначения различных коэффициентов и величин, например модуль зацепления, модуль упругости и .т.п.

Модуль объемного сжатия(в физике)-отношение нормального напряжения в материале к относительному удлинению.

Геометрическая интерпретация понятия модуля |a|

Каждому действительному числу можно поставить в соответствие точку числовой прямой, это точка будет геометрическим изображением данного действительного числа. Каждой точке числовой прямой соответствует её расстояние от начало отсчета, или длина отрезка, начало которого в точке начала отсчета, а конец – в данной точке. Длина отрезка всегда рассматривается как величина неотрицательная. Геометрической интерпретацией действительного числа служит вектор, выходящий из начала отсчета и имеющий конец в точке, изображающей данное число. Длина этого вектора будет геометрической интерпретацией модуля данного действительного числа.

Определение. Модуль числа а или абсолютная величина числа а равна а, если а больше или равно нулю и равна -а, если а меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geq 0; \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

$$|a| \geq 0.$$

Исследование графиков функции:

1. График функции $y = f|(x)|$
2. График функции $y = |f(x)|$
3. График функции $y = |f|(x)||$

- 1.Анализ изученной литературы, построение графиков функции

  2.Выдвижение гипотезы

  3.Проверка гипотезы

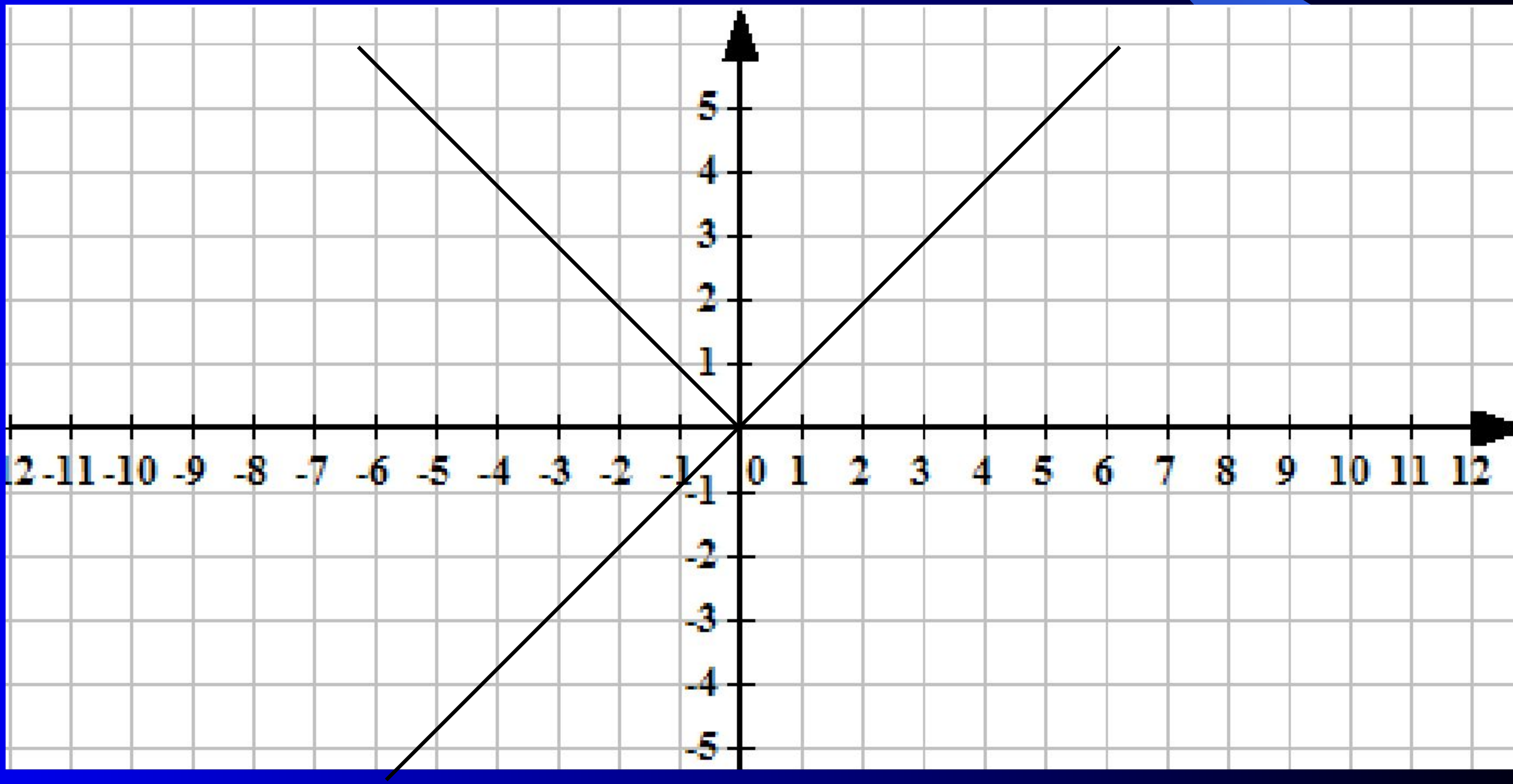
  4.Доказательство

  5.Выводы

График функции y = |x|

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и наша функция $y = x$, т.е. график совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $y = -x$. При отрицательных значениях аргумента x график данной функции – прямая $y = -x$, т.е. биссектриса второго координатного угла.



Выдвижение гипотезы:

Из сопоставления двух графиков:

y = x и y = -x, я выдвинул гипотезу, что график функции $y = f(|x|)$ получается из графика $y = f(x)$ при $x \geq 0$ симметричным отображением относительно оси ОУ.

Проверка гипотезы

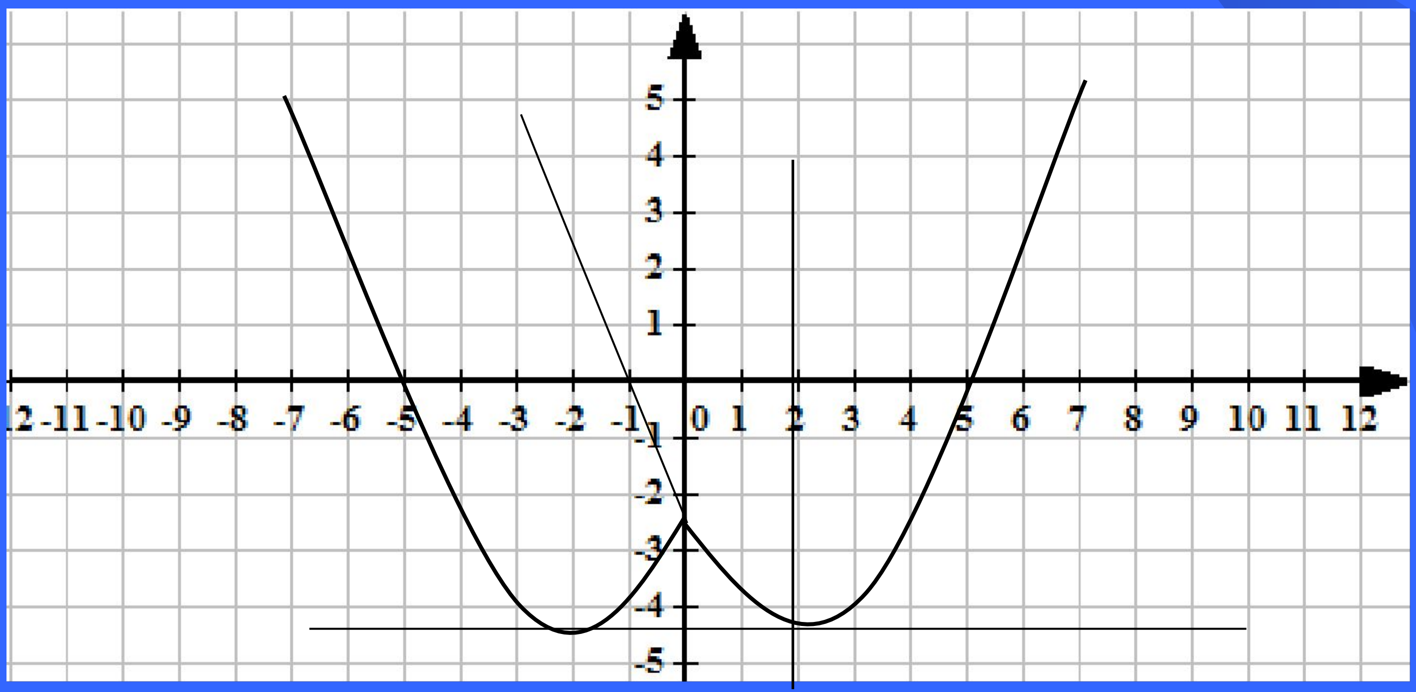
Можно ли применять этот метод построения графиков для любой функции, содержащей абсолютную величину?

Для этого я рассмотрел несколько функций, и сделала для себя выводы.

1. Построить график функции $y=0,5\ x^2 - 2|x| - 2,5$

1) Поскольку $|x| = x$ **при** $x\geq 0$, *требуемый график совпадает с параболой* $y=0,5\ x^2 - 2x - 2,5$. *Если* $x<0$, *то поскольку* $x^2 = |x|^2$, $|x|=-x$ *и требуемый график совпадает с параболой* $y=0,5\ x^2 + 2x - 2,5$.

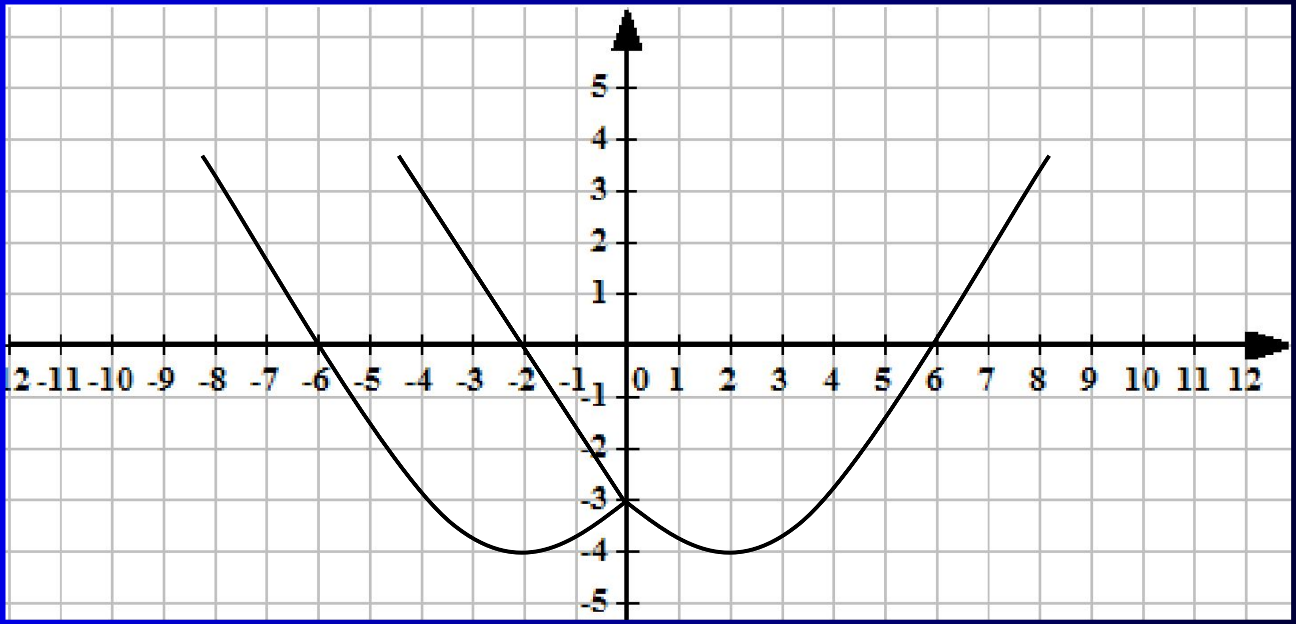
2) Если рассмотрим график $y=0,5\ x^2 -2x - 2,5$ ***при*** $x\geq 0$ ***и отобразить его относительно оси ОУ мы получим тот же самый график.***



2. **Построить график функции** $y=0,25x^2 - |x| - 3$.

1) Поскольку ***|x| = x при x≥0,*** *требуемый график совпадает с параболой* ***y=0,25 x² - x - 3.*** *Если x<0, то поскольку x² = |x|², |x|=-x и требуемый график совпадает с параболой* ***y=0,25 x² + x - 3.***

2) Если рассмотрим график ***y=0,25 x² - x - 3 при x≥0 и отобразить его относительно оси ОУ мы получим тот же самый график.***



Доказательство гипотезы:

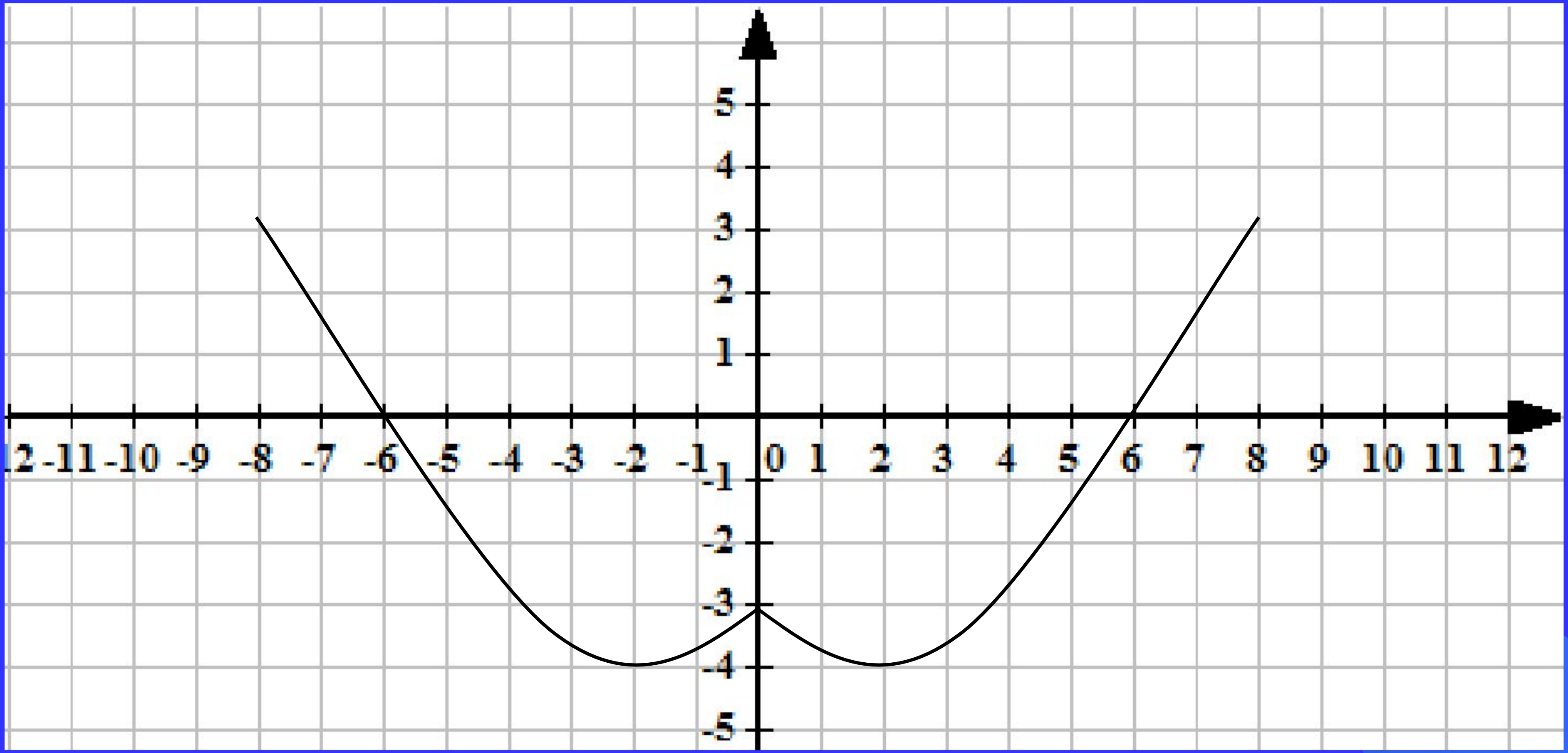
Докажем, что график функции $y = f\,|(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f\,(x)$ на множестве неотрицательных значений аргумента и симметричен ему относительно оси ОУ на множестве отрицательных значений аргумента.

Доказательство: Если $x \geq 0$, то $f\,|(x)| = f\,(x)$, т.е. на множестве неотрицательных значений аргумента графики функции $y = f\,(x)$ и $y = f\,|(x)|$ совпадают. Так как $y = f\,|(x)|$ - чётная функция, то её график симметричен относительно ОУ.

Таким образом, график функции $y = f\,|(x)|$ можно получить из графика функции $y = f\,(x)$ следующим образом:

1. построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$;

2. Для $x<0$, симметрично отразить построенную часть относительно оси ОУ.



Вывод: *Для построения графика функции y = f |(x)|*

1. построить график функции y = f(x) для x>0;

2. Для x<0, симметрично отразить построенную часть относительно оси ОУ.

График функции $y = f|(x)|$

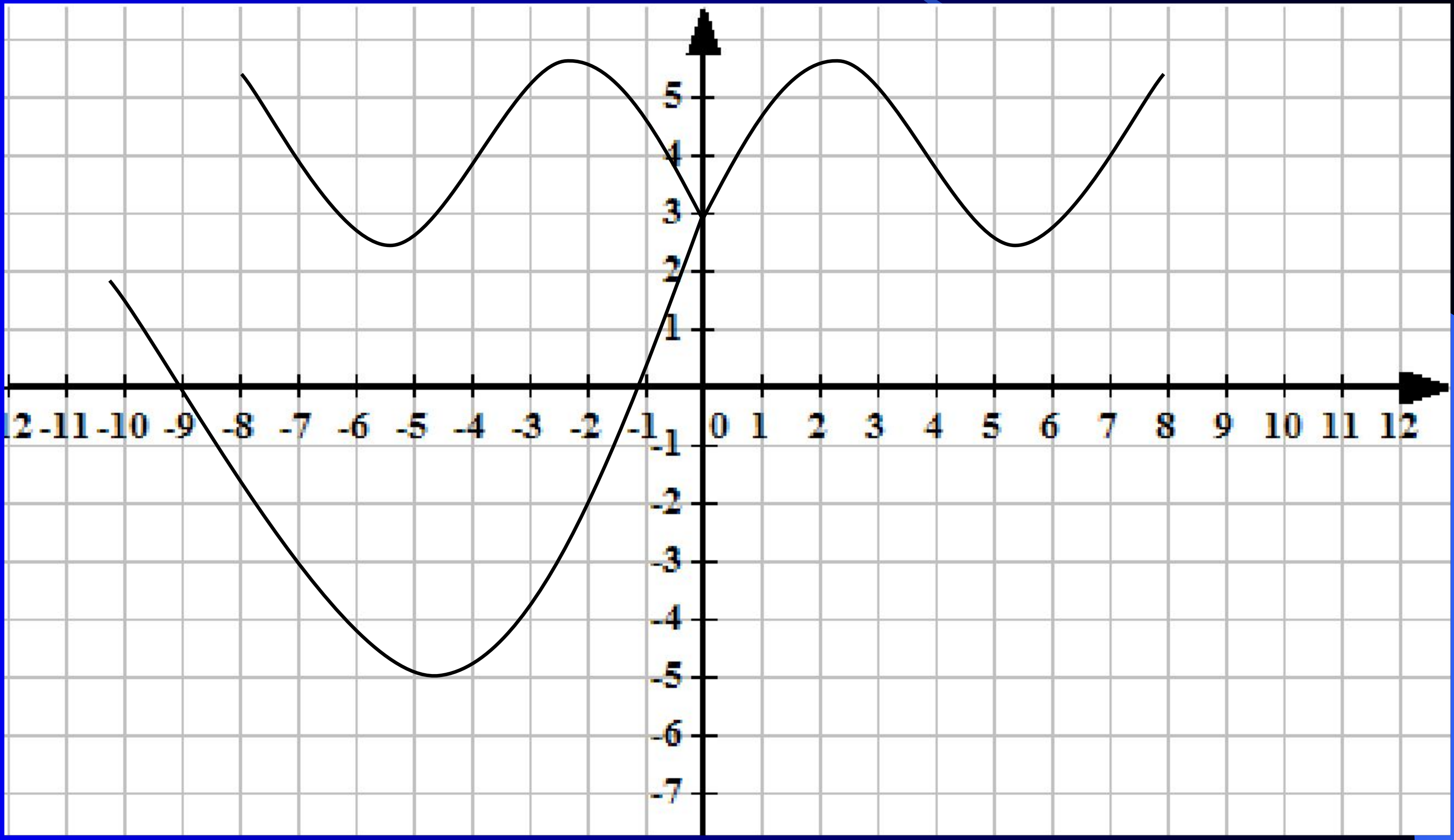


График функции

$$y = |f(x)|$$

Построить график функции у = |х² - 2х|

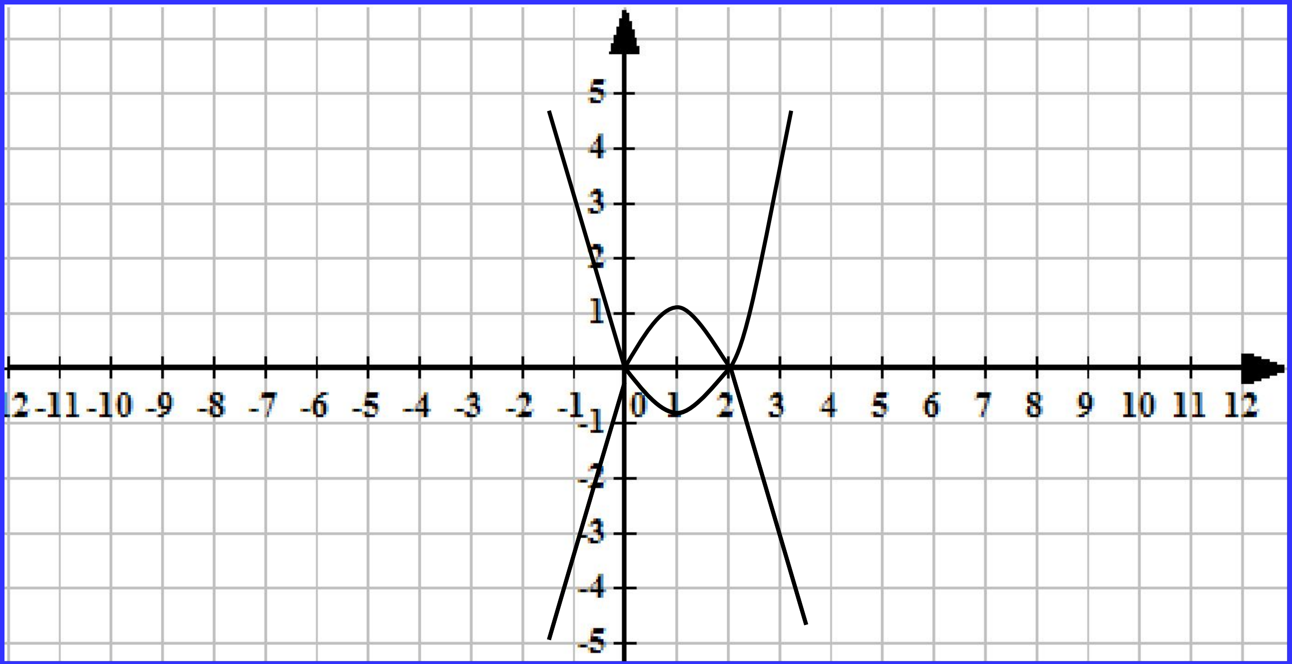
Освободимся от знака модуля по определению

Если $x^2 - 2x \geq 0$*, т.е. если* $x \leq 0$ *и* $x \geq 2$*, то* $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$

Если $x^2 - 2x < 0$*, т.е. если* $0 < x < 2$*, то* $|x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$

Я вижу, что на множестве $x \leq 0$ *и* $x \geq 2$ *графики функции* $y = x^2 - 2x$ *и* $y = |x^2 - 2x|$ *совпадают, а на множестве (0;2) графики функции* $y = -x^2 + 2x$ *и* $y = |x^2 - 2x|$ *совпадают.*

Построю их.



Выдвижение гипотезы:

График функции $y = | f(x)|$ состоит из части графика функции $y = f(x)$ при $y \geq 0$ и симметрично отражённой части $y = f(x)$ при $y < 0$ относительно оси ОХ.

Проверка гипотезы

1. **Построить график функции** $y = |x^2 - x - 6|$

1) Если $x^2 - x - 6 \geq 0$, т.е. если $x \leq -2$ и $x \geq 3$, то $|x^2 - x - 6| = x^2 - x - 6$.

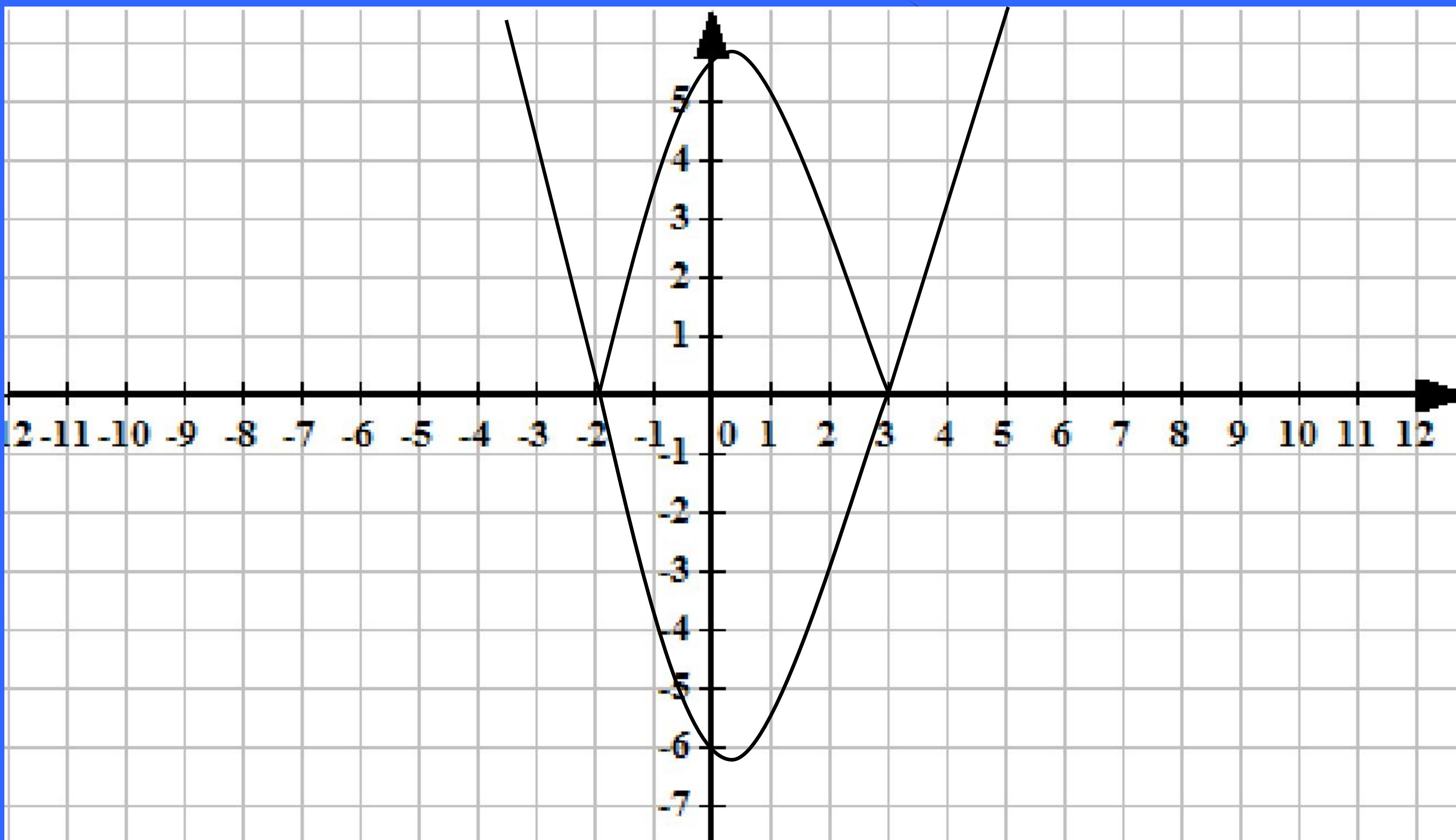
Если $x^2 - x - 6 < 0$, т.е. если $-2 < x < 3$, то $|x^2 - x - 6| = -x^2 + x + 6$.

Построим их.

2) Построим $y = x^2 - x - 6$. Нижнюю часть графика симметрично отбражаем относительно OX.

Сравнивая 1) и 2), видим что графики одинаковые.

$$y = |x^2 - x - 6|$$



Докажем, что график функции **$y = |f(x)|$** *совпадает с графиком функции* $y = f(x)$ для $f(x) > 0$ *и симметрично отражённой частью* $y = f(x)$ *при* $y < 0$ *относительно оси OX.*

Действительно, по определению абсолютной величины, можно данную функцию рассмотреть как совокупность двух линий:

$y = f(x)$, *если* $f(x) \geq 0$; $y = -f(x)$, *если* $f(x) < 0$

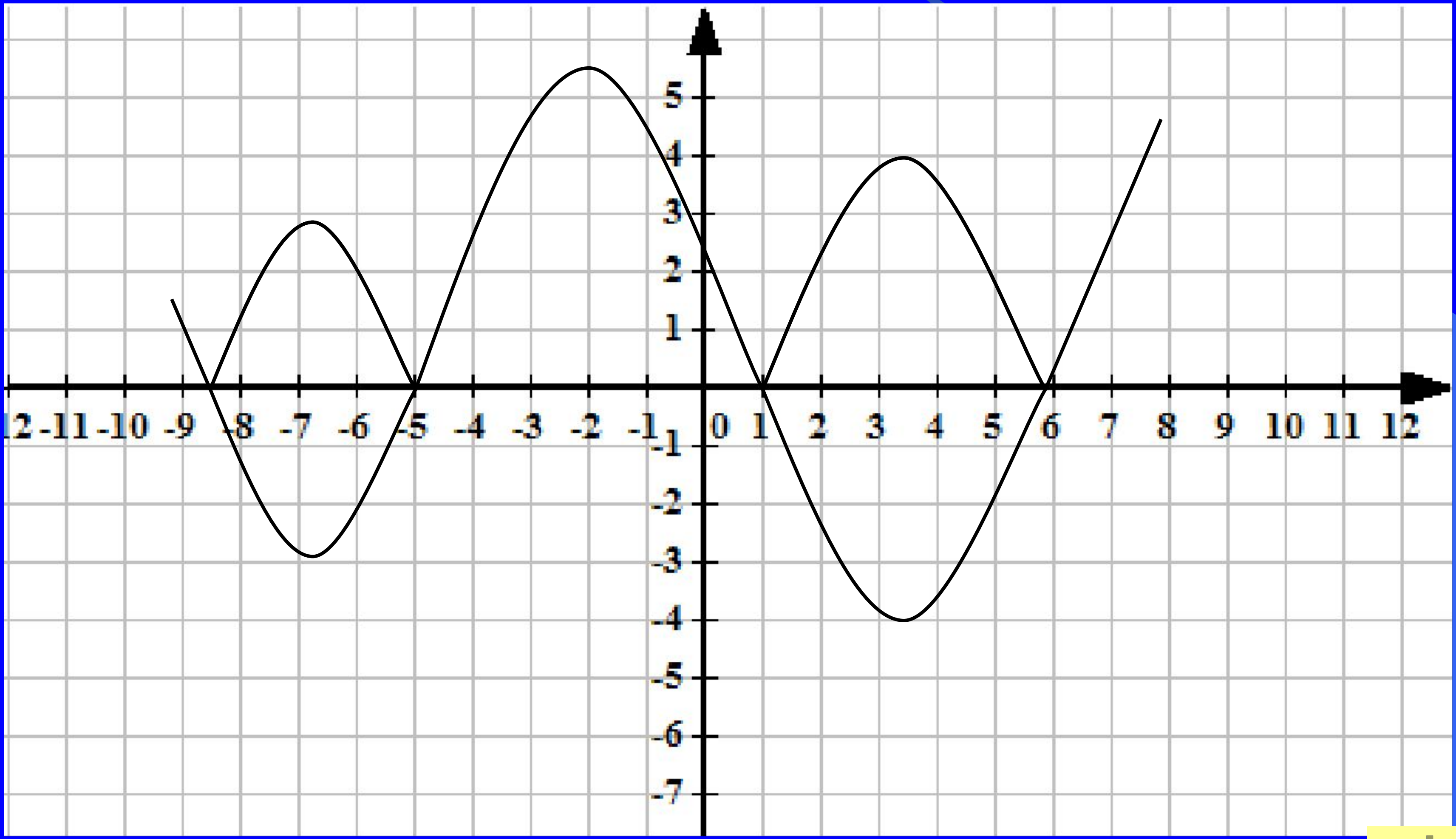
Для любой функции $y = f(x)$, *если* $f(x) > 0$, *то* $|f(x)| = f(x)$, *значит в этой части график функции* $y = |f(x)|$ *совпадает с графиком самой функции* $y = f(x)$.

Если же $f(x) < 0$, *то* $|f(x)| = -f(x)$, *т.е. точка* $(x; -f(x))$ *симметрична точке* $(x; f(x))$ *относительно оси OX. Поэтому для получения требуемого графика отражаем симметрично относительно оси OX «отрицательную» часть графика* $y = f(x)$.

Вывод: *Гипотеза верна, действительно для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно:*

1.Построить график функции $y = f(x)$;

2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) < 0$, симметрично отражаем относительно оси абсцисс.



Проверка истинности гипотез для графика функции $y=|f|(x)||$

Применяя, определение абсолютной величины и ранее рассмотренные примеры построила графики функции:

$y = |2|x| - 3|$

$y = |x^2 - 5|x||$

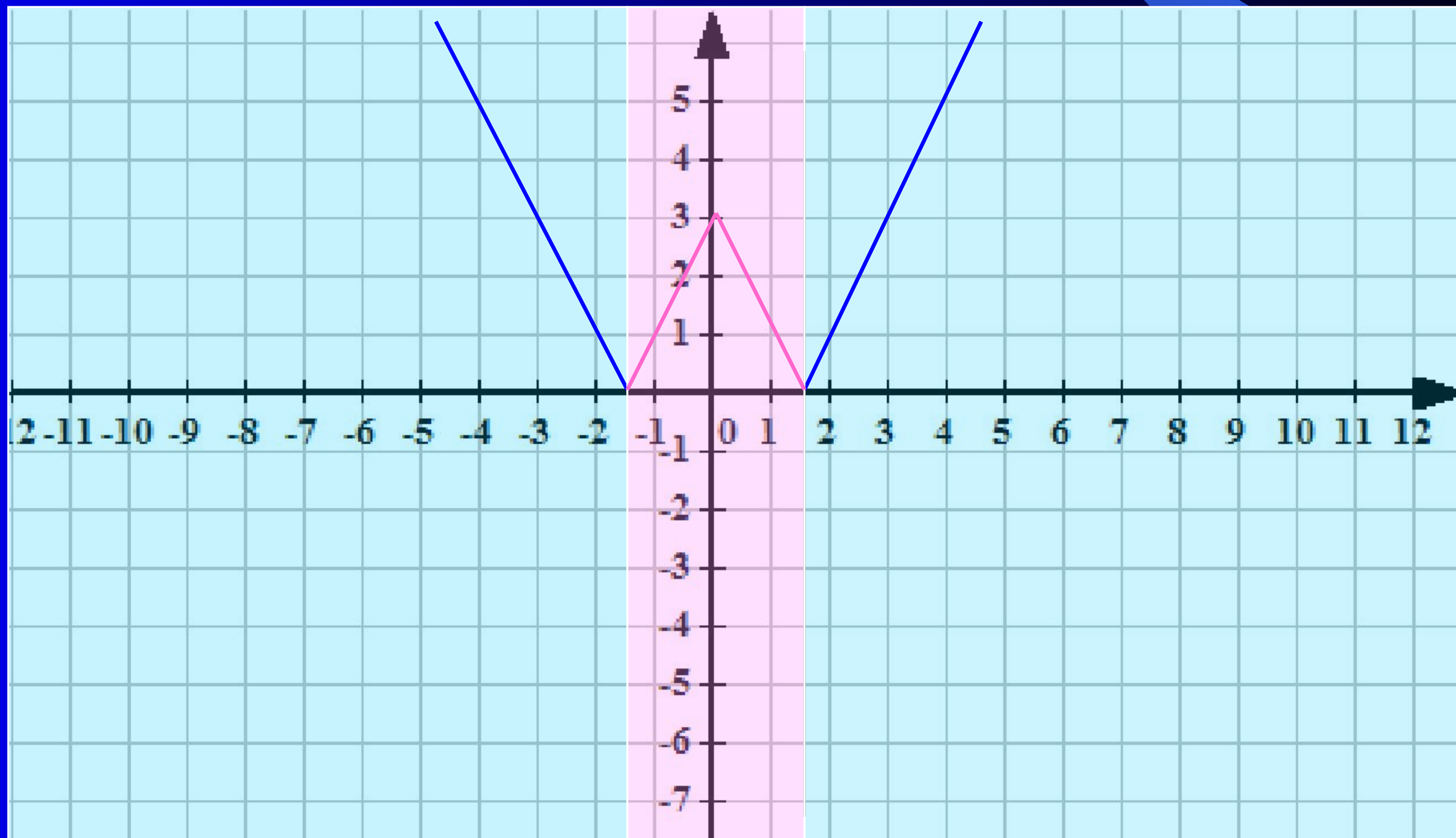
$y = | |x^3| - 2|$ и сделала выводы.

Для того чтобы построить график функции $y = | f |(x)|$ надо:

1. *Строим график функции $y = f(x)$ для $x>0$.*
2. *Строим вторую часть графика, т. е. построенный график симметрично отражаем относительно ОУ, т.к. данная функция четная.*
3. *Участки получившегося графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовываем на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.*

Построить график функции $y = |\,2|x| - 3|$

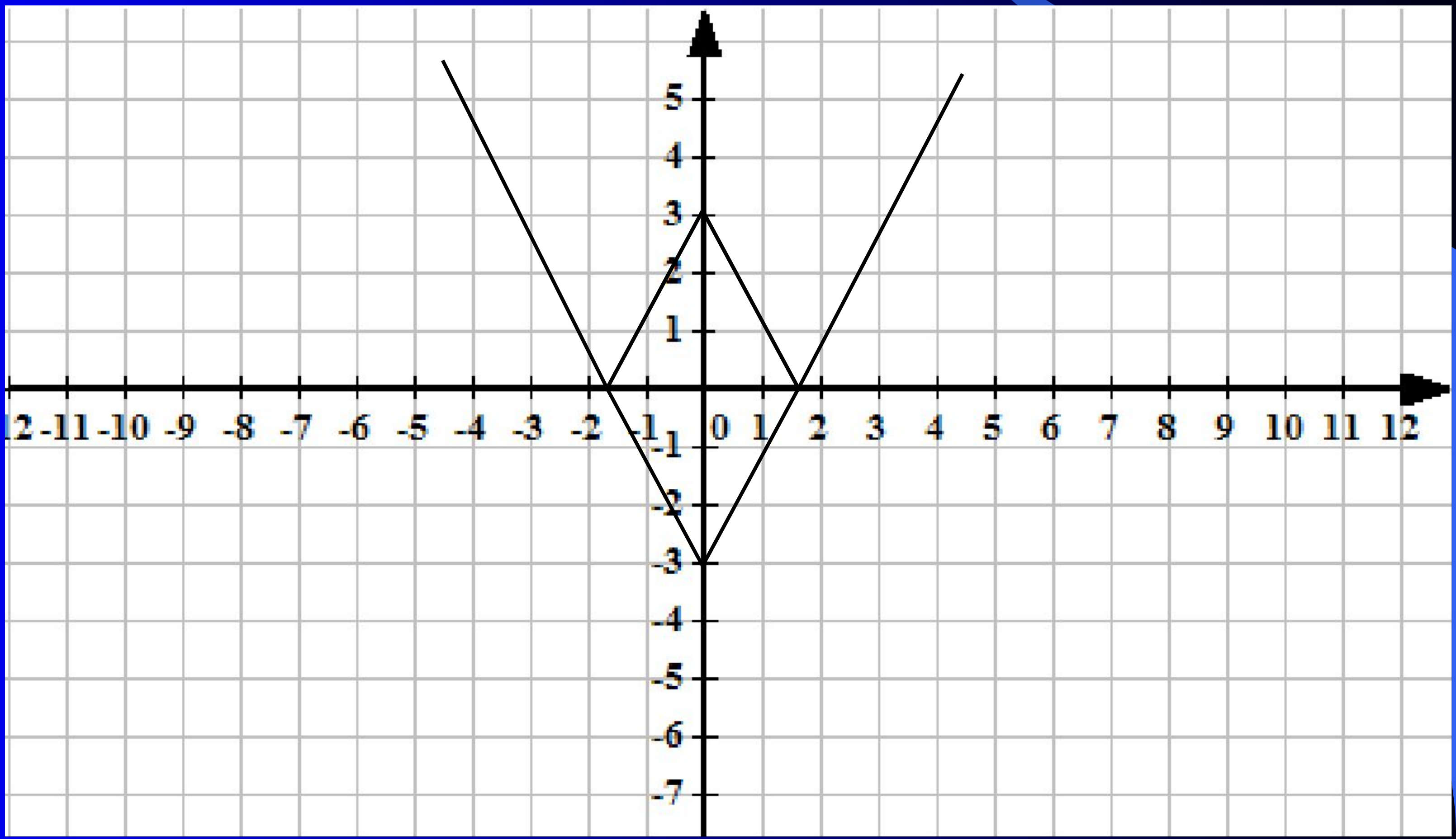
1. Строю $y = 2|x| - 3$, для $2|x| - 3 > 0$, $|x| > 1{,}5$ т.е. $x < -1{,}5$ и $x > 1{,}5$
   а) $y = 2x - 3$, для $x > 0$
   б) для $x < 0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.
2. Строю $y = -2|x| + 3$, для $2|x| - 3 < 0$. т.е. $-1{,}5 < x < 1{,}5$
   а) $y = -2x + 3$, для $x > 0$
   б) для $x < 0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.



1. y = | 2|x | - 3|

1) Строю y = 2x-3, для x>0.
2) Строю прямую, симметричную построенной относительно оси OY.
3) Участки графика, расположенные в нижней полуплоскости, отображаю симметрично относительно оси OX.

Сравнивая оба графика, видим что они одинаковые.



$y = | x^2 - 5|x| |$

1. Строю $y = x^2 - 5 |x|$, для $x^2 - 5 |x| > 0$ т.е. $x > 5$ и $x < -5$

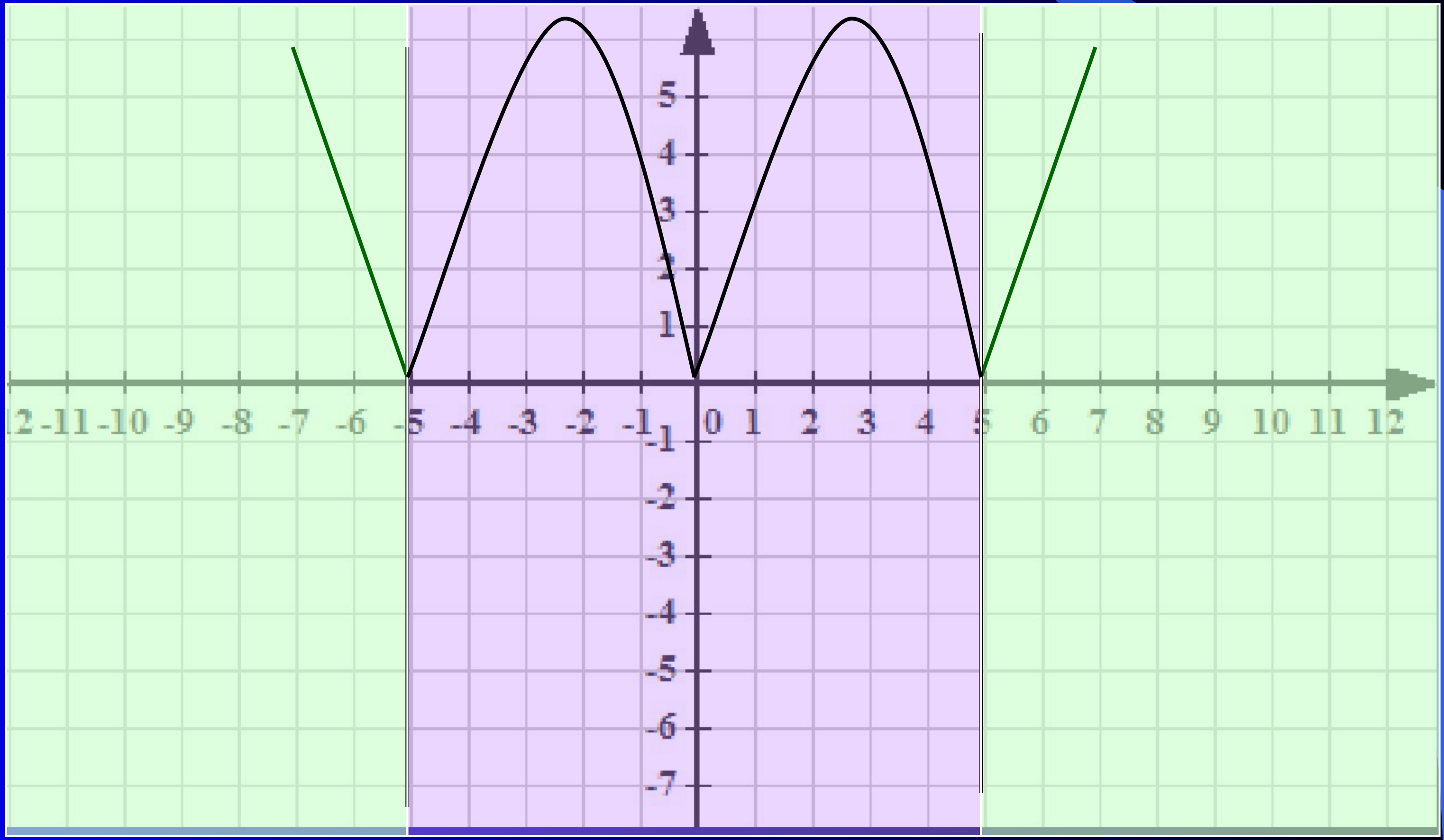
   а) $y = x^2 - 5x$, для $x>0$

   б) для $x<0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.

2. Строю $y = - x^2 + 5 |x|$, для $x^2 - 5 |x| < 0$. т.е. $-5 \le x \le 5$

   а) $y = - x^2 + 5x$, для $x>0$

   б) для $x<0$, симметрично отражаем построенную часть относительно оси ОУ.



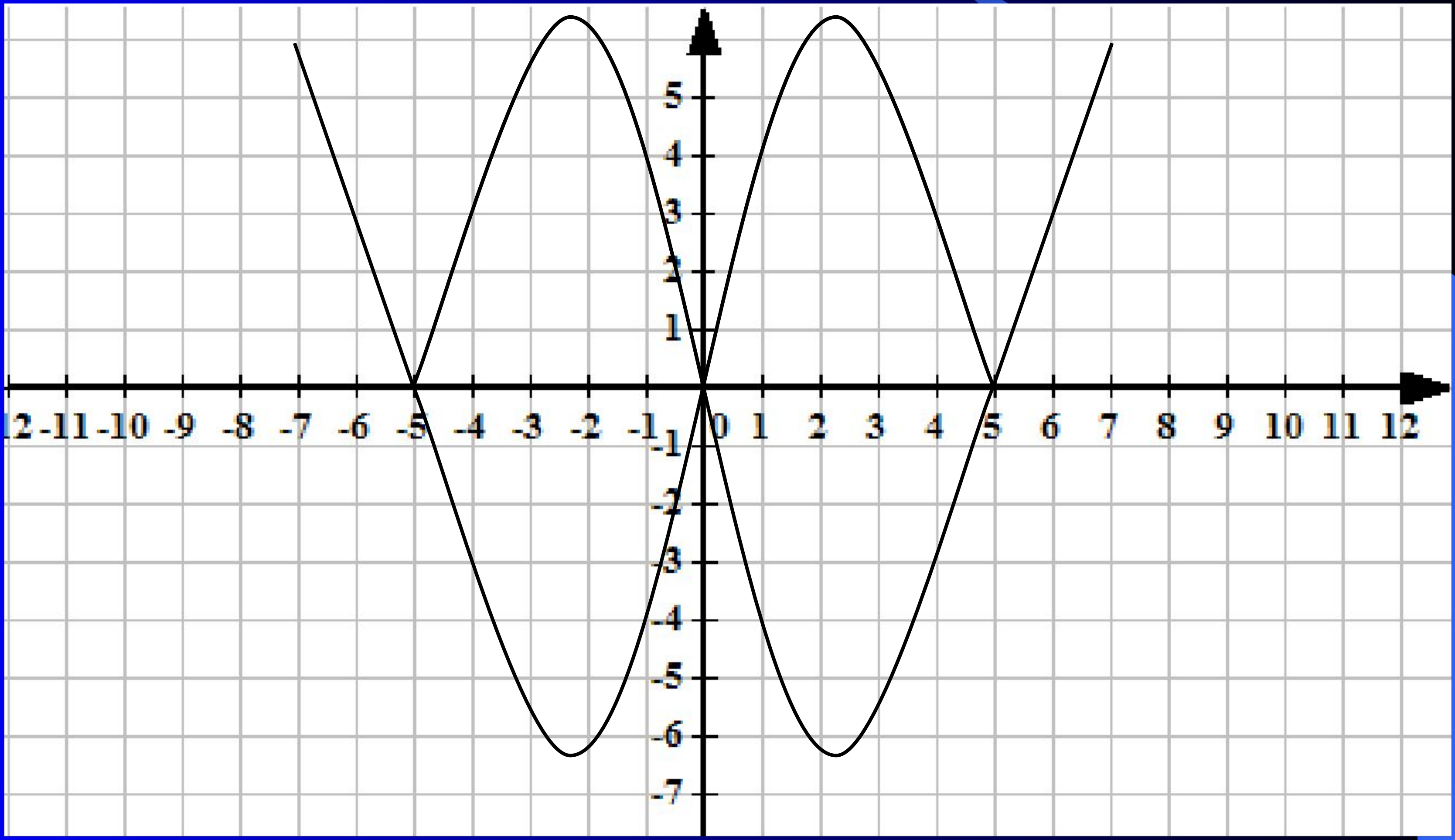
2. $y = | x^2 – 5|x| |$

а) Строю график функции $y = x^2 – 5x$ для $x>0$.

б) Строю часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ

в) Часть графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовываю на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.

Сравнивая оба графика, видим что они одинаковые.



3. $y = \left| |x|^3 - 2 \right|$

1). Строю $y = |x|^3 - 2$, для $|x|^3 - 2 > 0$, $x > \sqrt[3]{2}$ и $x < -\sqrt[3]{2}$

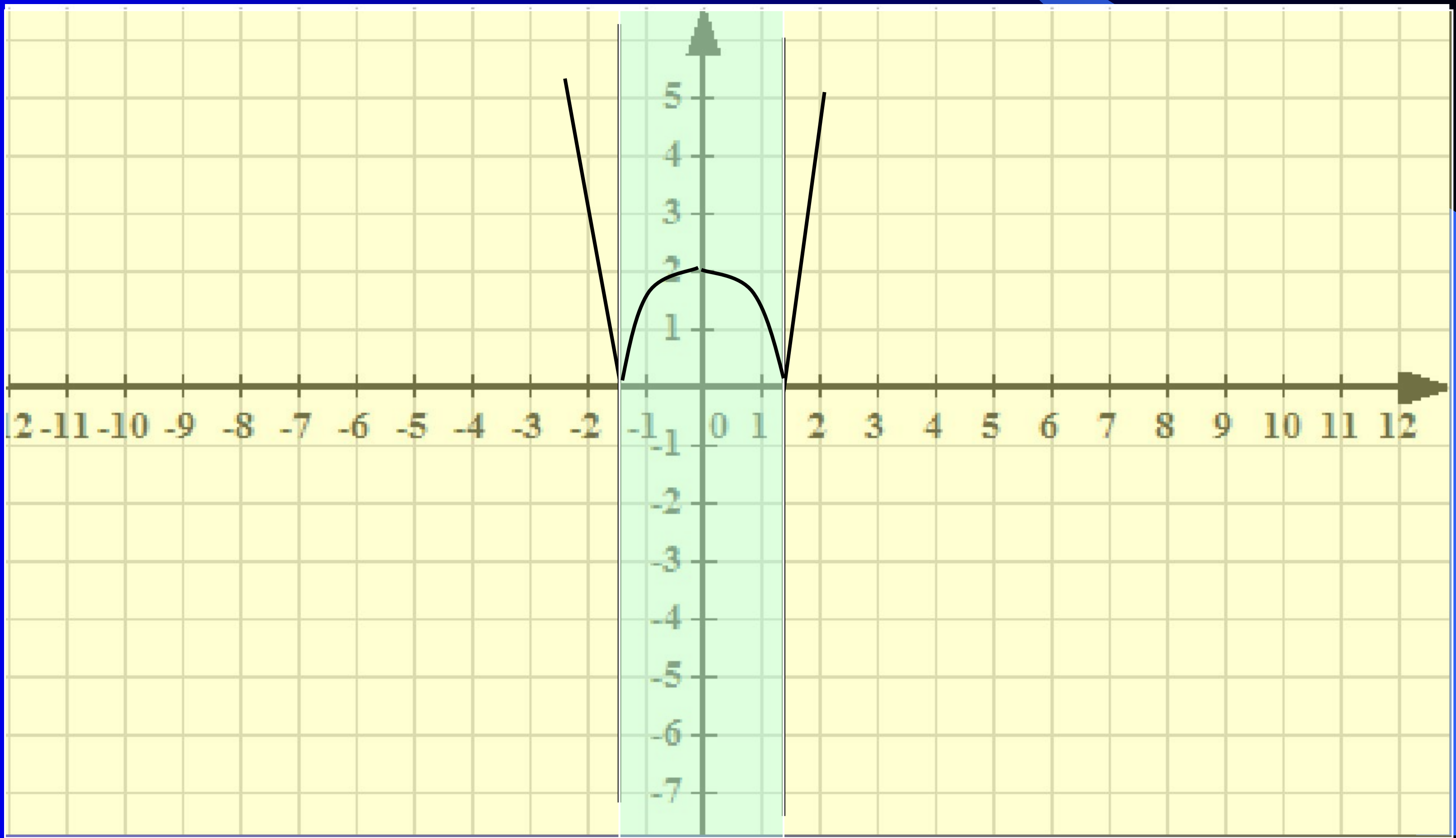
а) $y = x^3 - 2$, для $x>0$

б) для $x<0$, симметрично отражаю построенную часть относительно оси ОУ.

2). Строю $y = -|x|^3 + 2$, для $|x|^3 - 2 < 0$. т.е. $-\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$

а) $y = -x^3 + 2$, для $x>0$

б) для $x<0$, симметрично отражаю построенную часть относительно оси ОУ.



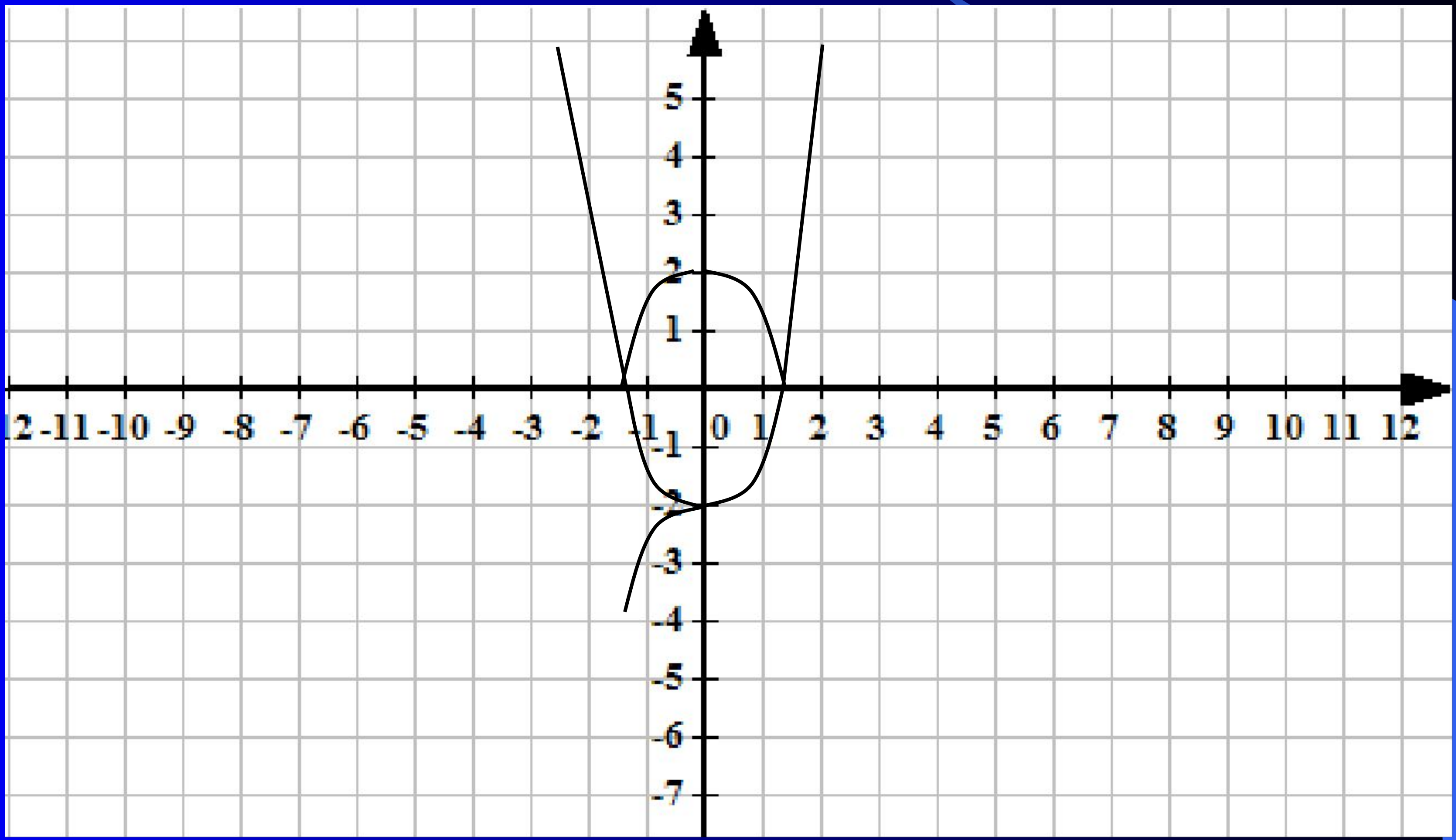
3. $y = ||x|^3 - 2|$

а) Строю $y = x^3 - 2$ для $x > 0$.

б) Строю часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ

в) Часть графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовываю на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.

Сравнивая оба графика, видим что они одинаковые.



Заключение

При выполнении исследовательской работы я сделал такие выводы:

- сформировал алгоритмы построения графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак абсолютной величины;

- приобрел опыт построения графиков таких функций, как:

$$y = f\,|(x)|; \quad y = |\,f\,(x)|; \quad y = |f\,|(x)||;$$

- научился работать с дополнительной литературой и материалами, производить отбор научных сведений; выдвигал гипотезы и доказала истинность гипотез, сделал выводы;

- приобрел опыт выполнения графических работ на компьютере.

Выводы

- **Для построения графика функции $y = f|(x)|$:**

1.Построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$;

2.Построить для $x<0$ часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ.

- **Для построения графика функции $y = | f(x) |$**

1.Построить график функции $y = f(x)$;

2. На участках, где график расположен в нижней полуплоскости, т.е., где $f(x) <0$, строить кривые, симметричные построенным графикам относительно оси абсцисс.

- **Для построения графика функции $y = | f |(x)| \ |$**

1. Построить график функции $y = f(x)$ для $x>0$.

2. Строим вторую часть графика, т. е. построенный график симметрично отражаем относительно ОУ

3. Участки получившегося графика, расположенные в нижней полуплоскости, преобразовываем на верхнюю полуплоскость симметрично оси ОХ.

Выводы

$y = f\,|(x)|$

$y = f(x)$, $x>0$

Построить часть для $x<0$, симметричную относительно оси ОУ

$y = |\,f\,(x)|$

$y = f(x)$

$y = |f\,|(x)||$

$y = f(x)$, $x>0$

Построить для $x<0$ часть графика, симметричную построенной относительно оси ОУ

Часть графика, расположенного в нижней полуплоскости симметрично отобразить относительно оси ОХ

Список литературы:

- И. М.Гельфанд, Е.Г. Глаголева. Функции и графики. Издательство «Наука»
- Р.А. Калнин. Алгебра и элементарные функции. Издательство «Наука»
- М.К. Потапов, С.Н. Олехник. Конкурсные задачи по математики, Москва. «Наука»
- Ю. Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк. Дополнительные главы к школьному учебнику. Москва, «Просвещение».