

Фракталы

“Фракталы – это язык геометрии. Однако их главные элементы недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от привычных объектов евклидовой геометрии, таких, как прямая линия или окружность. Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур. Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Репертуар алгоритмических элементов неисчерпаем. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же четко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии”.

© Пайтген, Юргенс, Заупе

Линейные фракталы

Береговая линия Норвегии



Рис. 1.4. Карта побережья южной части Норвегии.
Квадратная сетка сверху имеет шаг $\delta = 50$ км [42].

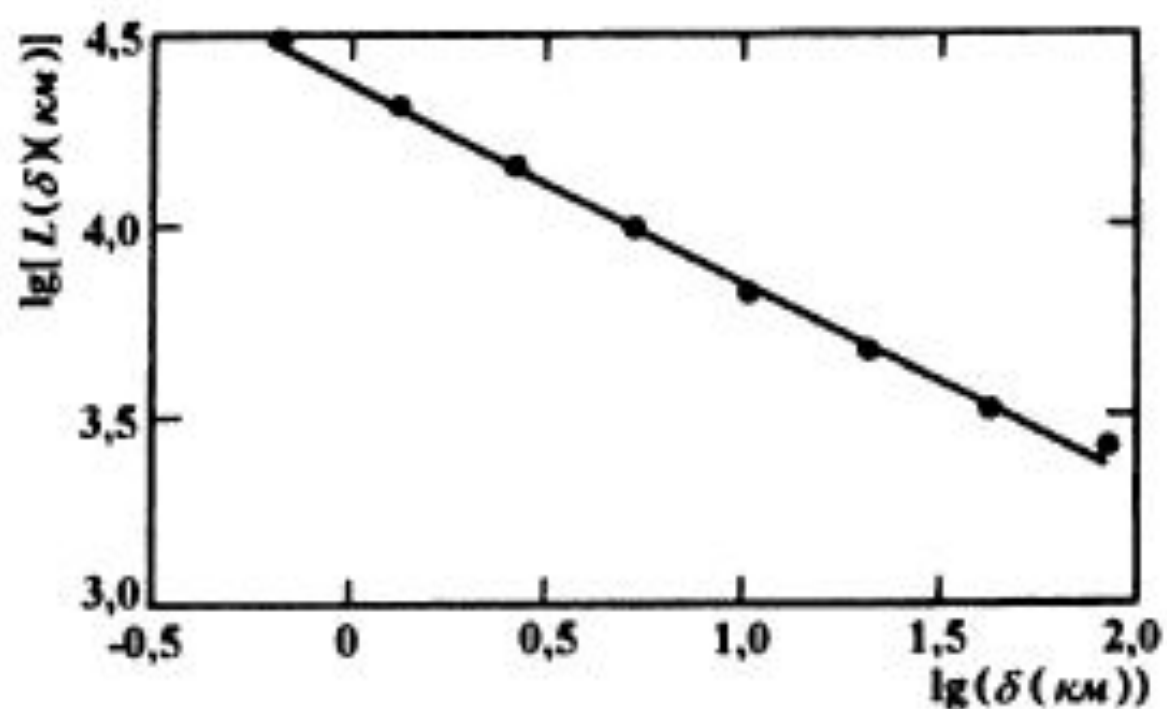


Рис. 1.5. Измеренная длина побережья Норвегии в зависимости от шага сетки δ (рис.1.4) [42].

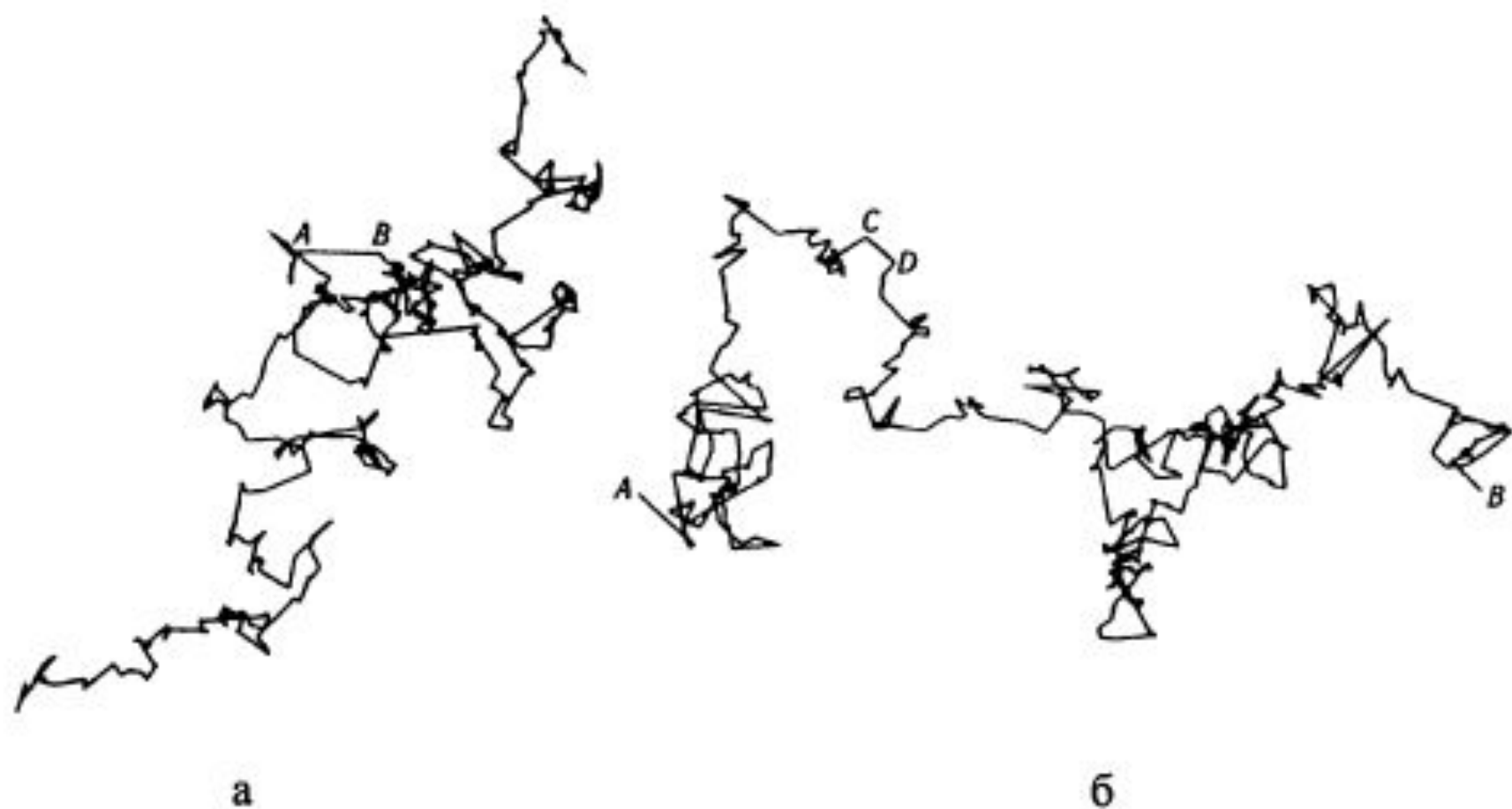


Рис. 1.2. Траектория движения частицы пыли [49].

Кривая и снежинка Коха

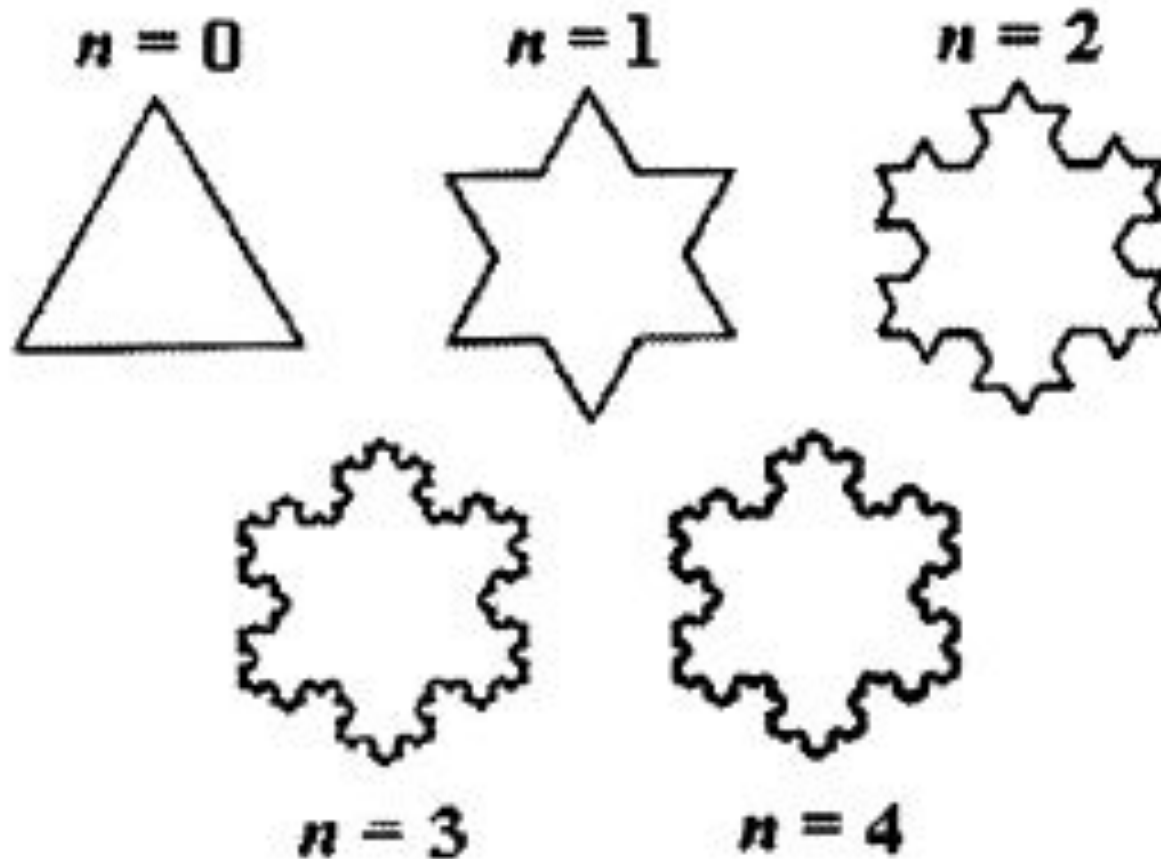


Рис. 1.1. Построение снежинки Коха.

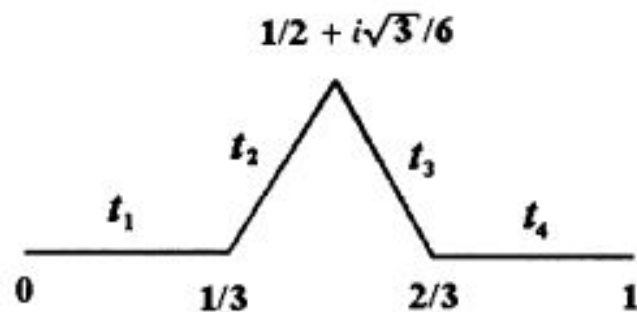


Рис. 1.28. Образующий элемент для кривой Коха.

Система итерируемых функций, которая выполняет данное преобразование, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 t_1: \quad f_1(z) &= \frac{1}{3}z, \\
 t_2: \quad f_2(z) &= \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{1}{3}, \\
 t_3: \quad f_3(z) &= \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}, \\
 t_4: \quad f_4(z) &= \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$d_c = -\frac{\ln\left(\frac{3}{12}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618. \tag{1.15}$$

Множество Кантора

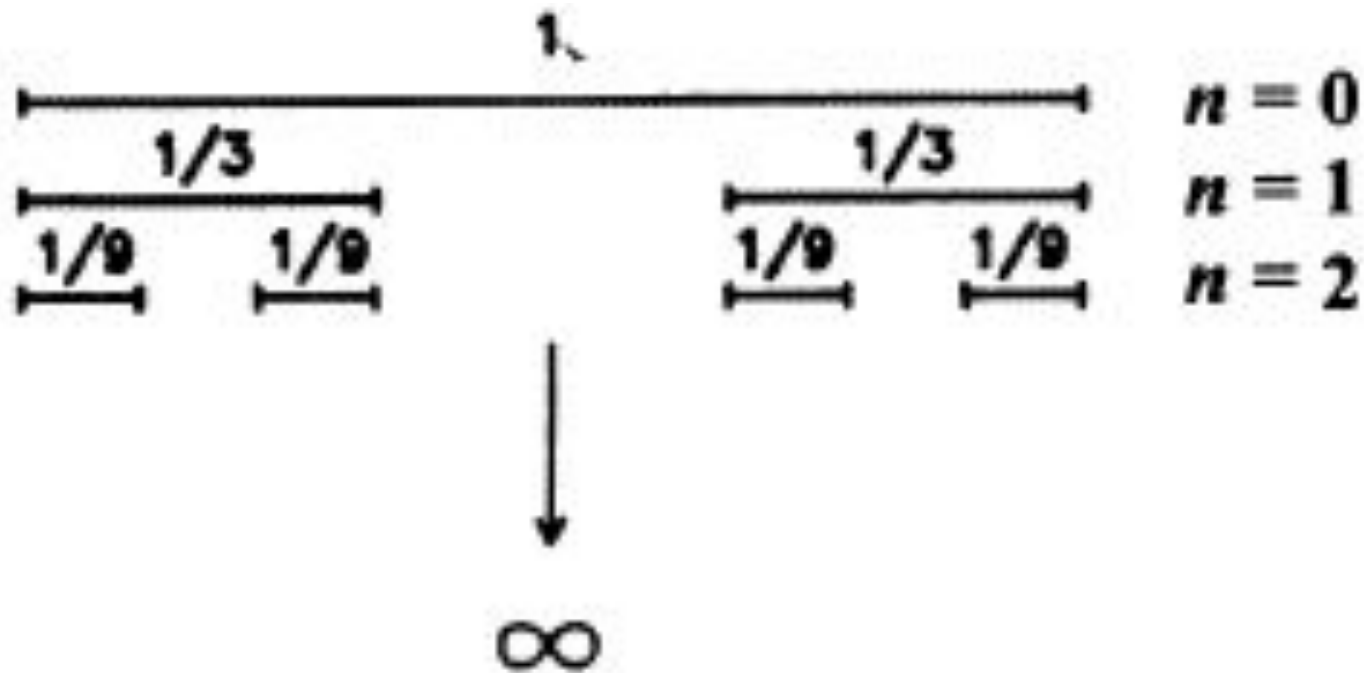


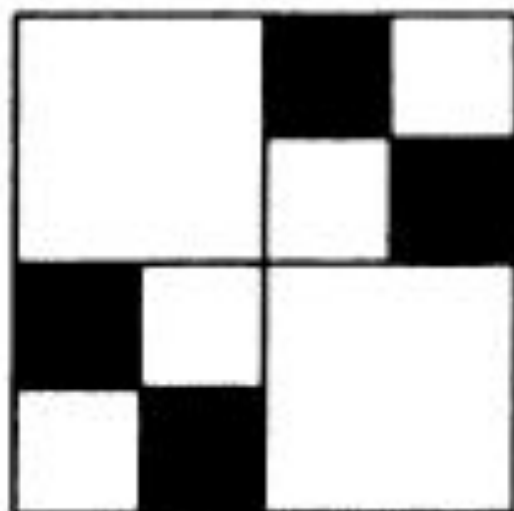
Рис.1.7. Построение множества Кантора.

$$d_c = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln (1/3)^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309. \quad (1.14)$$

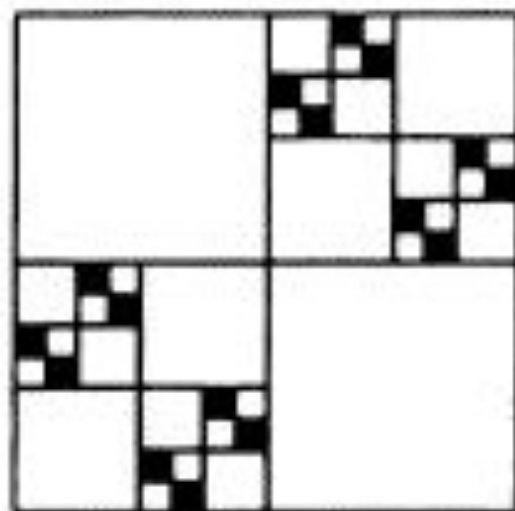
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 1.$$



$n = 0$



$n = 1$



$n = 2$

Рис. 1.8. Построение множества Кантора, $d_c = 1$.

Салфетка и ковёр Серпинского

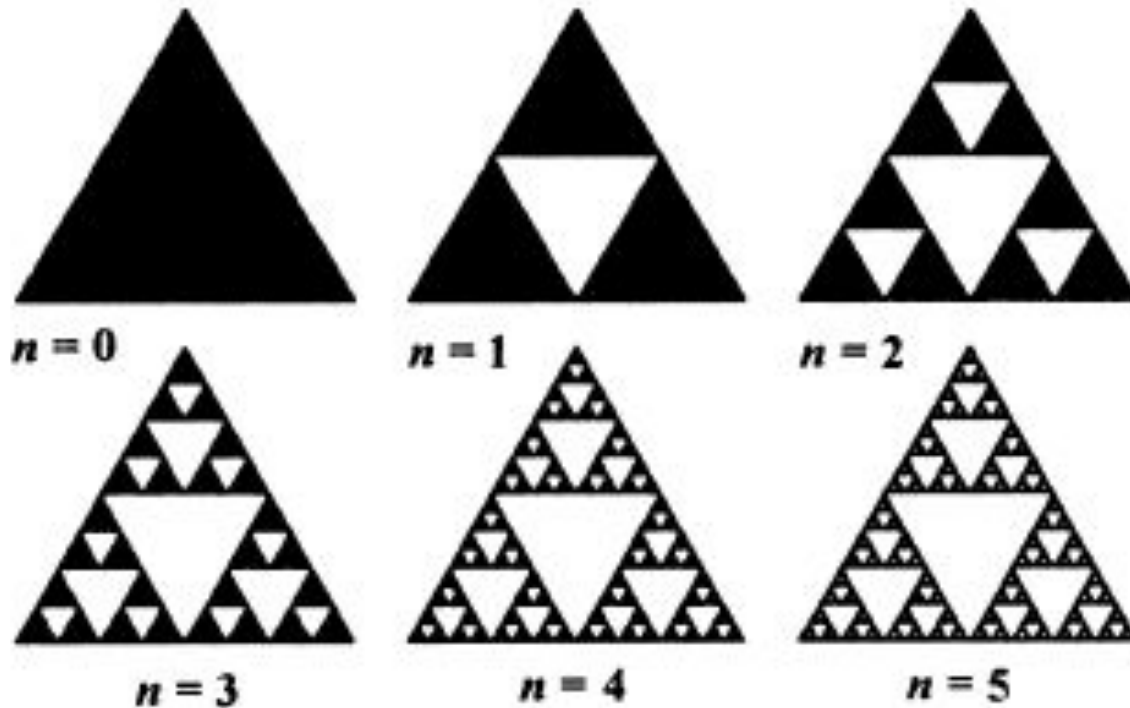


Рис. 1.9. Построение салфетки Серпинского.

$$d_c = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849. \quad (1.17)$$

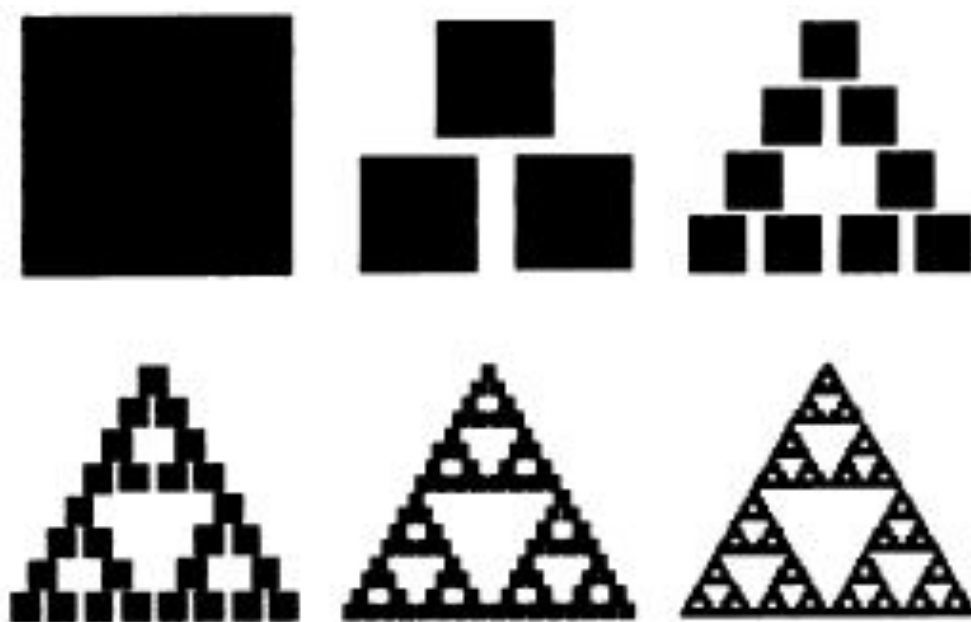


Рис. 1.25. Построение салфетки Серпинского:
детерминированный алгоритм.

$$\frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\begin{aligned} z_0 & - \text{начальная точка (произвольная)}, \\ z_1 & = t_1(z_0) \text{ или } t_2(z_0) \text{ или } t_3(z_0), \\ z_2 & = t_1(z_1) \text{ или } t_2(z_1) \text{ или } t_3(z_1), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ z_n & = t_1(z_{n-1}) \text{ или } t_2(z_{n-1}) \text{ или } t_3(z_{n-1}), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \tag{1.29}$$

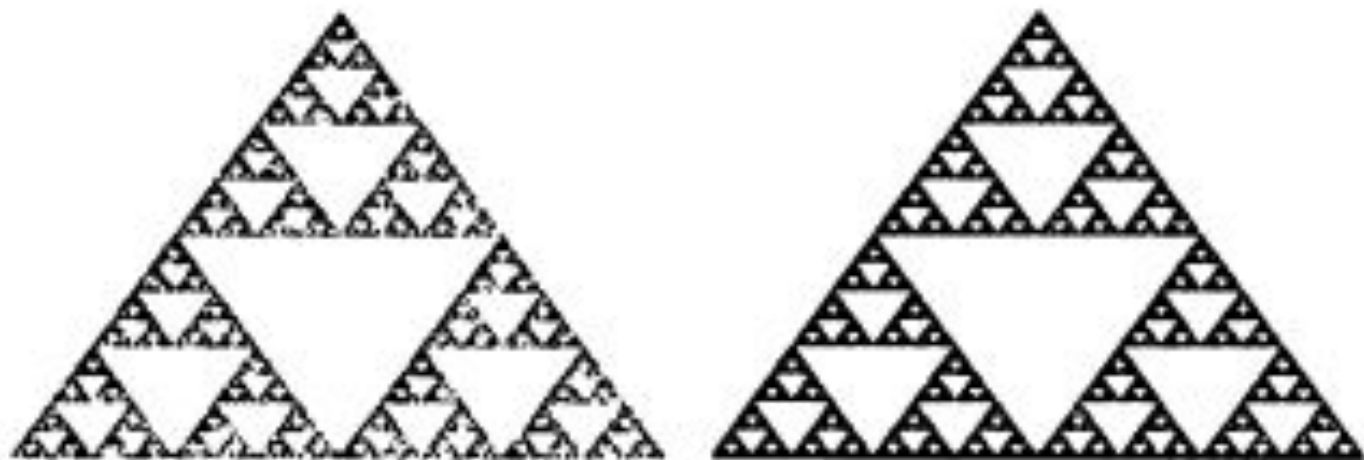


Рис. 1.26. Построение солфетки Серпинского:
метод случайных итераций
(слева направо 10^3 , 10^4 , $3 \cdot 10^4$ итераций).

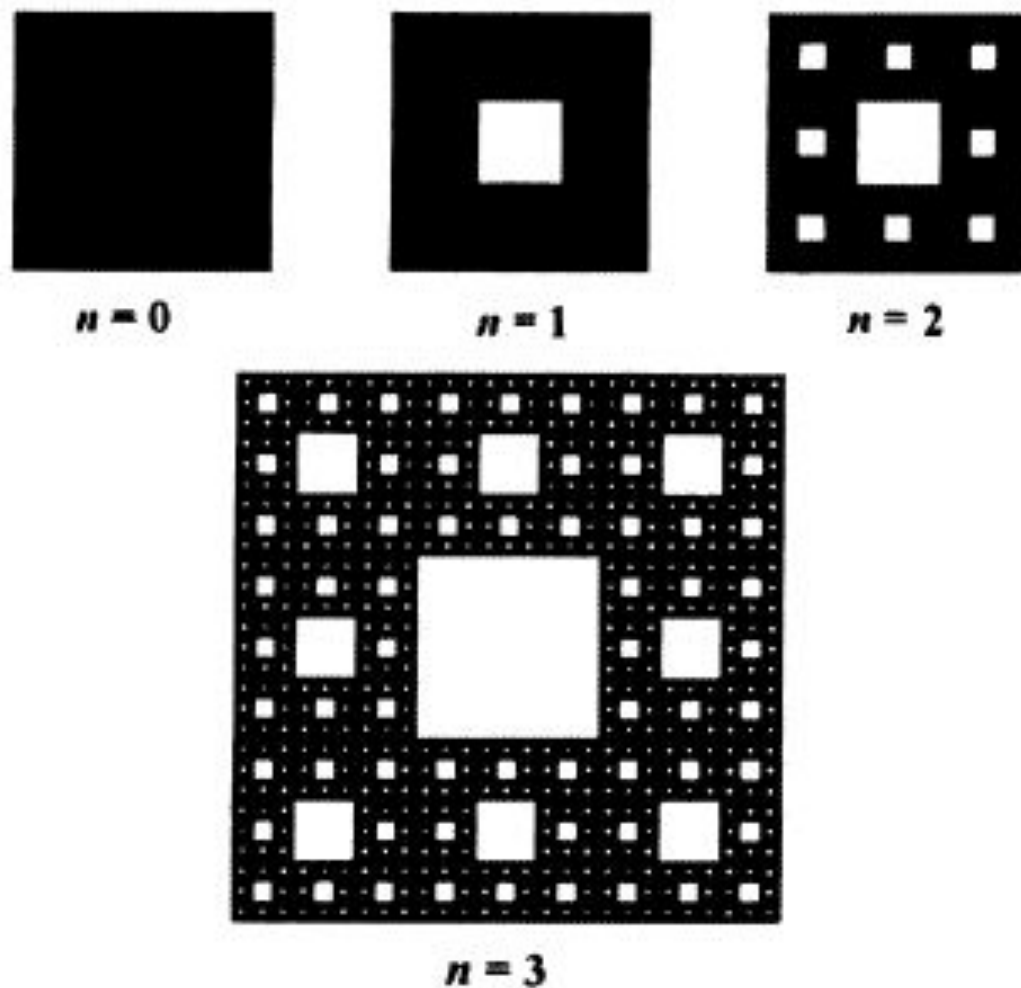


Рис. 1.10. Построение ковра Серпинского.

$$d_c = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928. \quad (1.20)$$

Губка Менгера

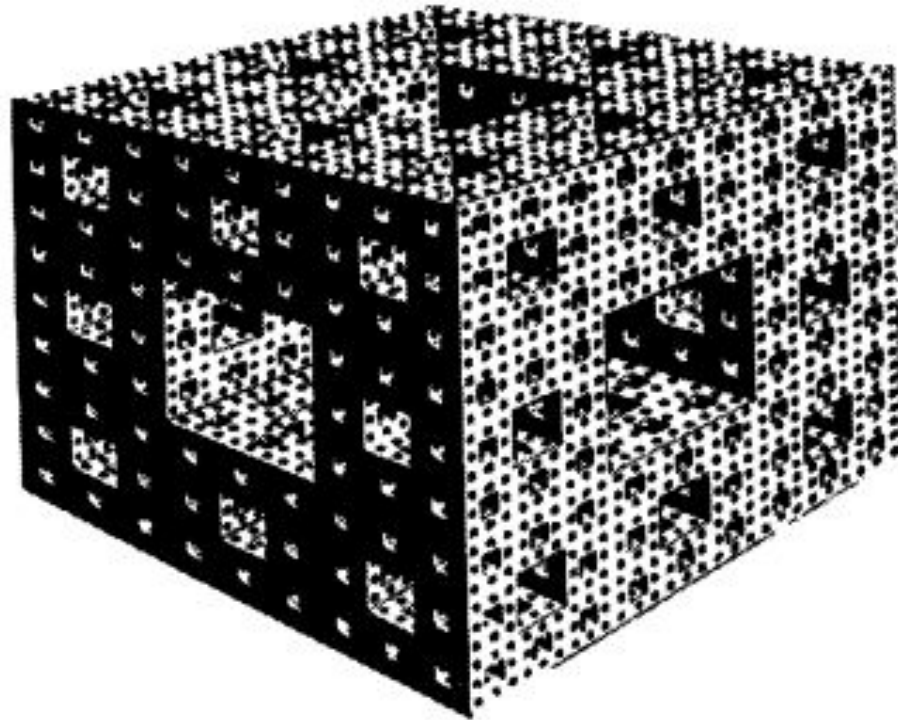


Рис 1.11. Губка Менгера.

$$d_c = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,7268. \quad (1.21)$$

Кривая Пеано



Рис. 1.12. Образующий элемент для кривой Пеано.

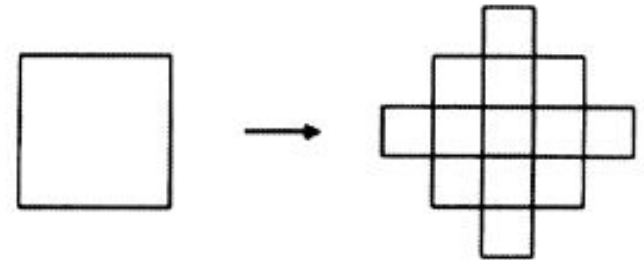


Рис. 1.13. Построение кривой Пеано.

$$d_c = -\frac{\ln 9}{\ln(1/3)} = 2. \quad (1.23)$$

Кривая Госпера

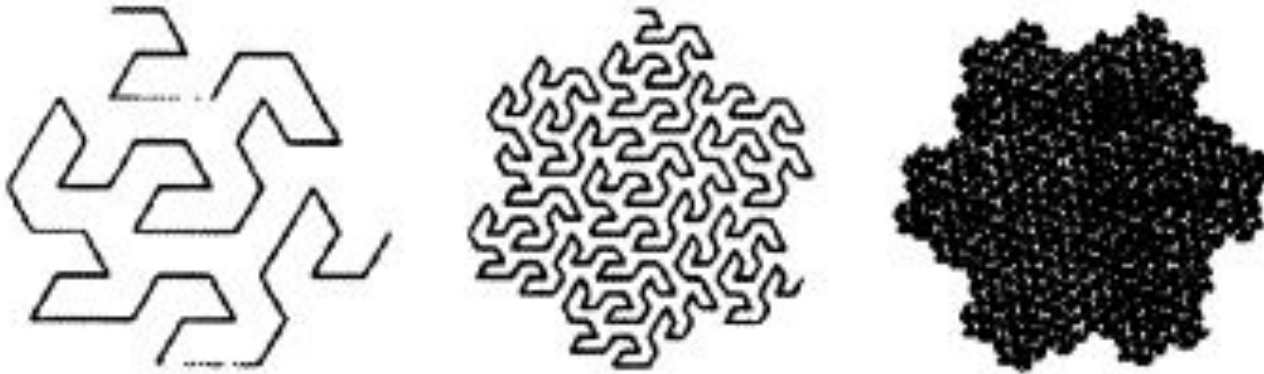


Рис. 1.15. Три шага построения кривой Госпера [10].

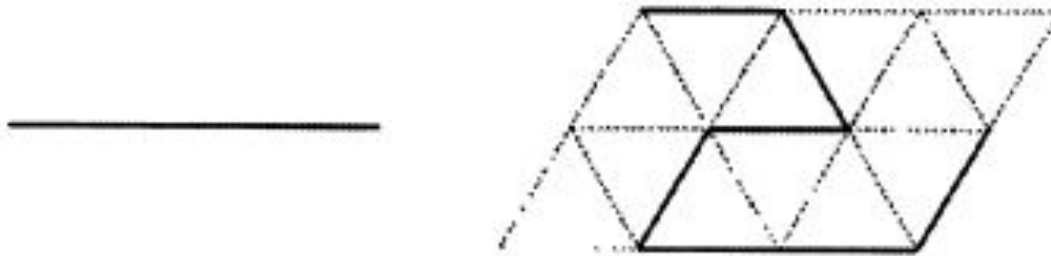


Рис. 1.14. Начальный и образующий элементы кривой Госпера [10].

Дракон Хартера-Хейтуэя

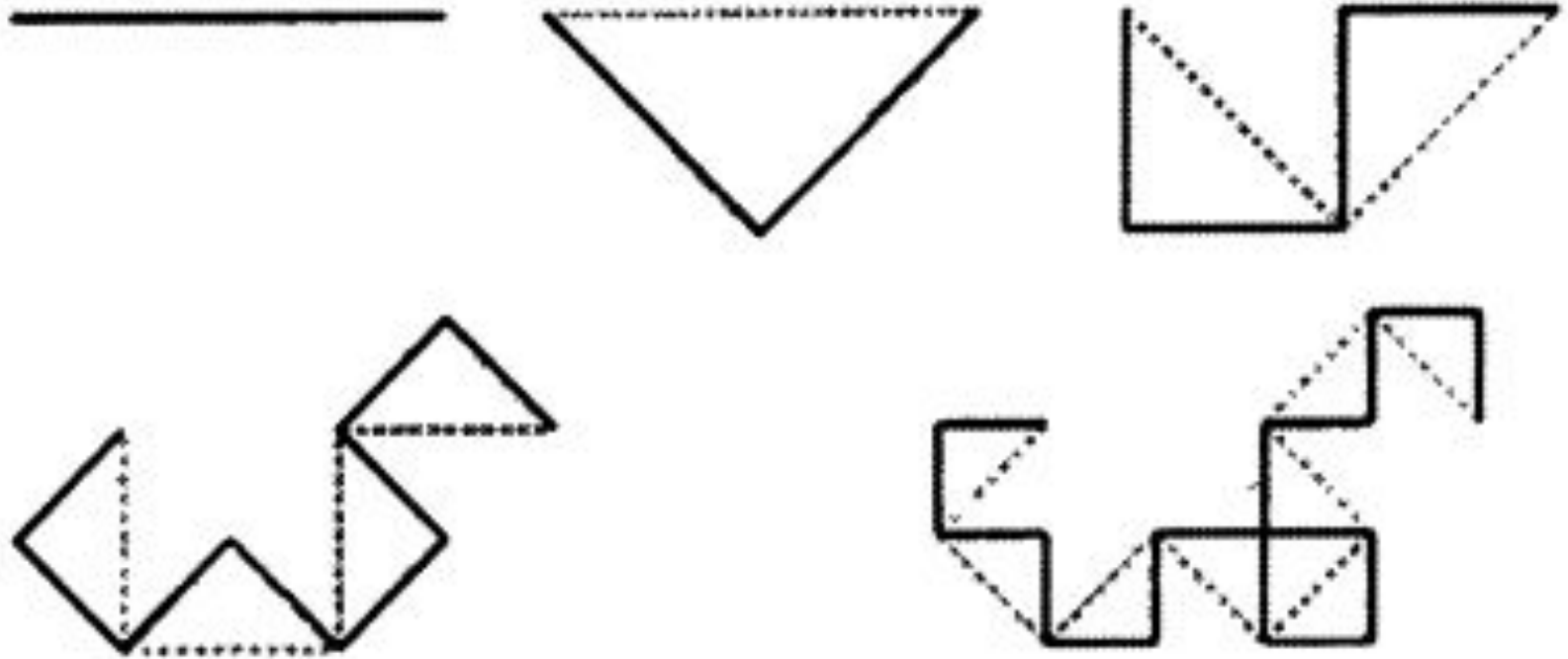


Рис. 1.16. Алгоритм построения дракона Хартера–Хейтуэя.



Рис. 1.17. 12-е и 16-е поколение дракона Хартера–Хейтуэя [10].

Схемы преобразований

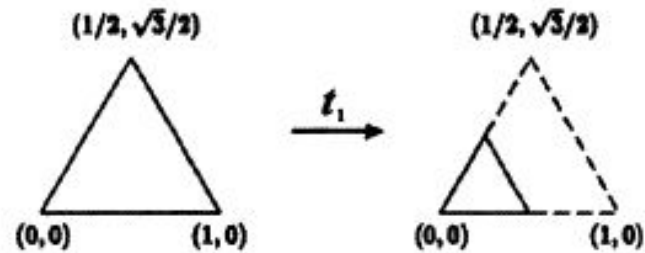


Рис. 1.19. Схема преобразования t_1 (в скобках приведены декартовы координаты вершин). (1.26)

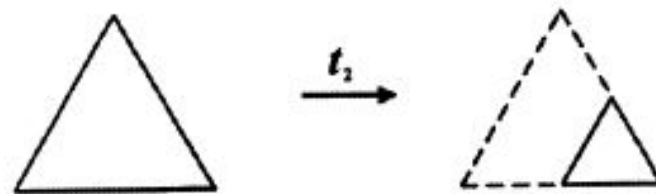


Рис.1.20. Схема преобразования t_2 .

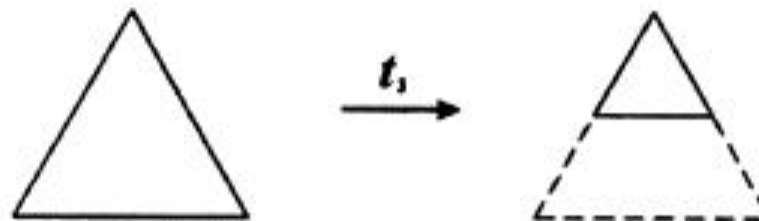


Рис.1.21. Схема преобразование t_3 .

$$t_1: f_1(z) = \frac{1}{2}z. \quad (1.25)$$

$$t_2: f_2 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}. \quad (1.26)$$

$$t_3: f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (1.27)$$



Рис. 1.22. Схема преобразования $t_3 t_2$.

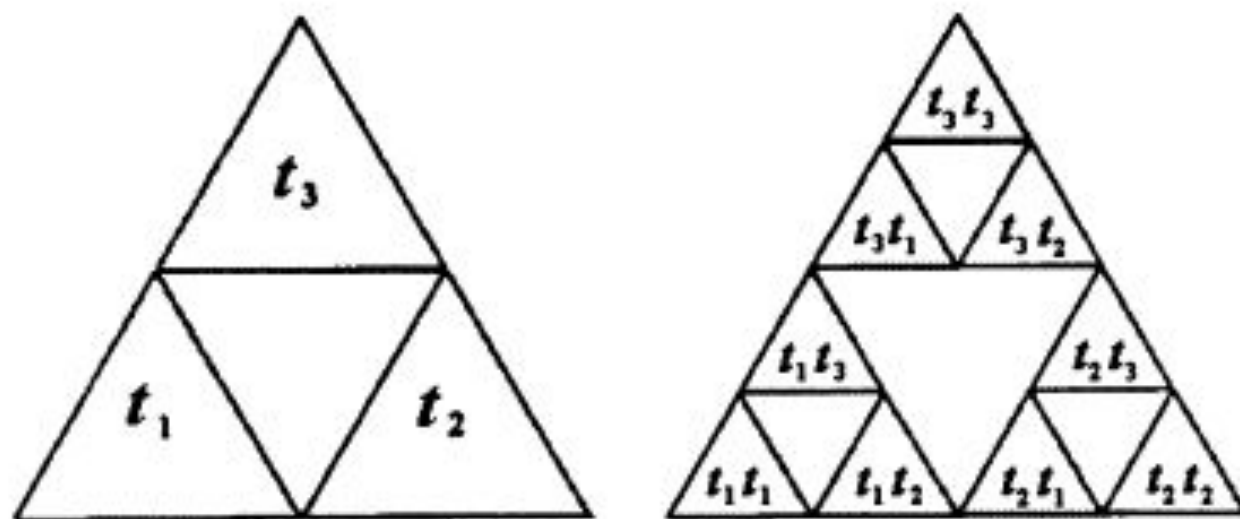


Рис. 1.23. Два первых поколения итераций из трех линейных отображений.

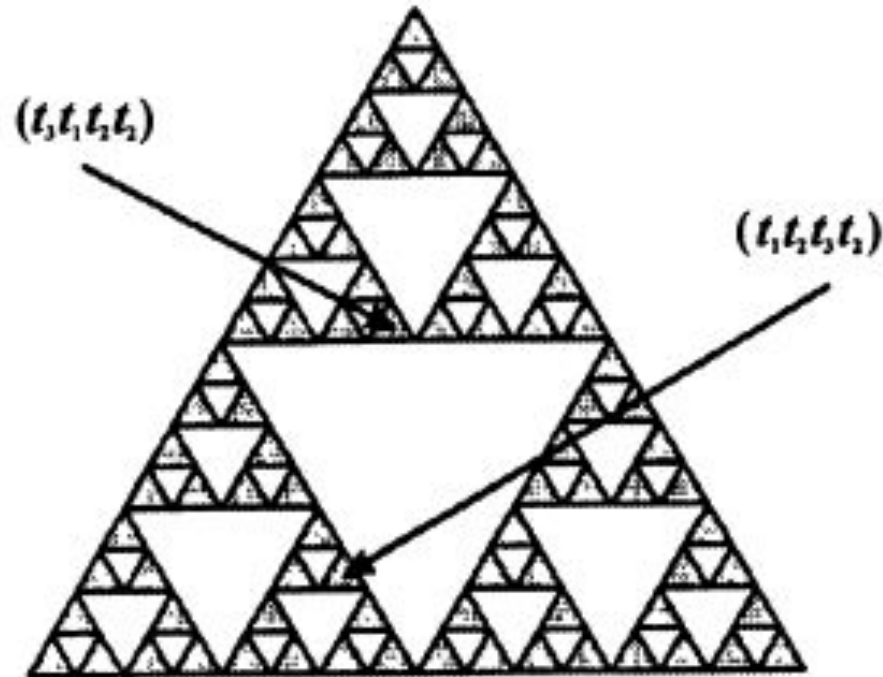


Рис. 1.24. Четвертое поколение итераций.

$$\begin{aligned}
 & E_0 - \text{начальное множество,} \\
 & E_1 = t_1(E_0) \cup t_2(E_0) \cup t_3(E_0), \\
 & E_2 = t_1(E_1) \cup t_2(E_1) \cup t_3(E_1), \\
 & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & E_n = t_1(E_{n-1}) \cup t_2(E_{n-1}) \cup t_3(E_{n-1}), \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

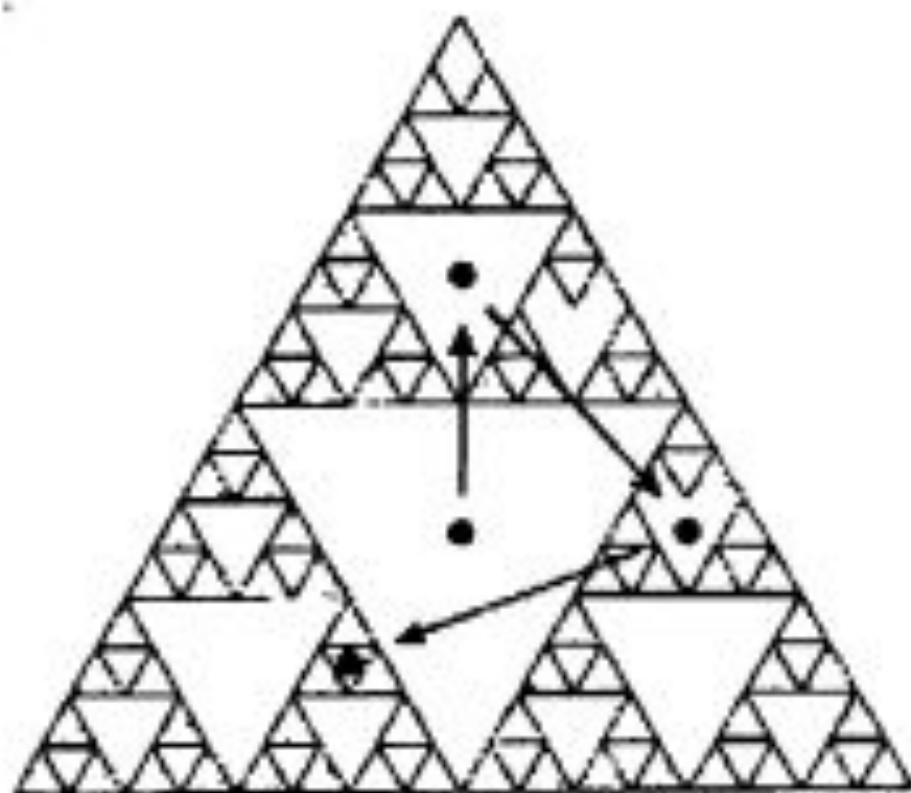


Рис. 1.27. Схема появления аттрактора.

Кривая Вейерштрасса

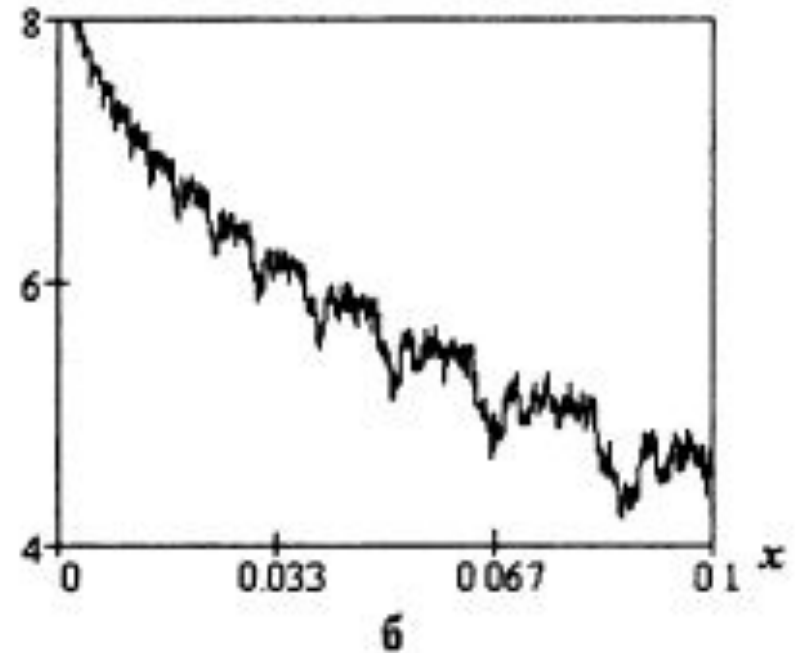
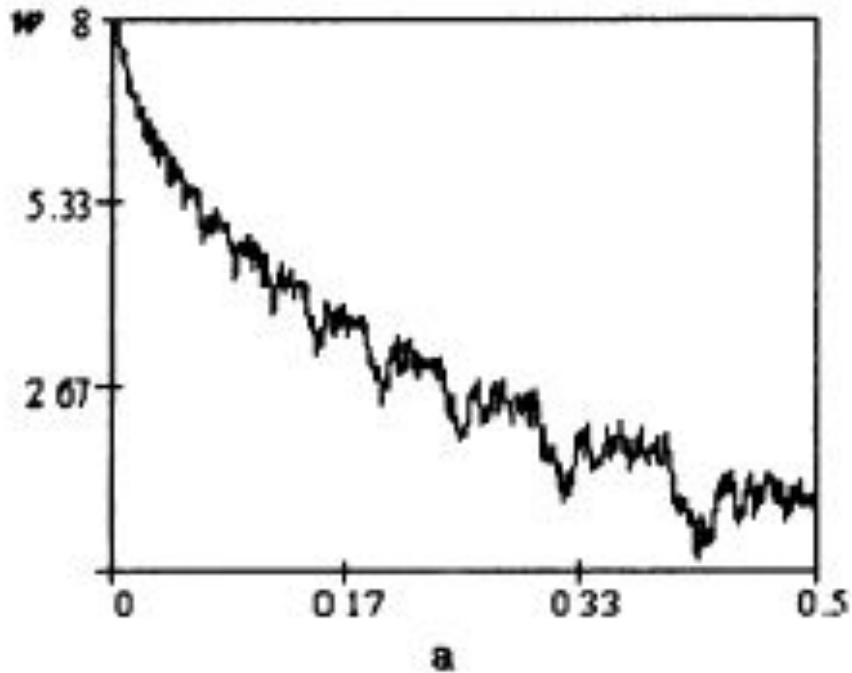


Рис.1.18. Кривая Вейерштрасса.

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x). \quad (1.24)$$

Лист папоротника

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n + by_n + e, \\y_{n+1} &= cx_n + dy_n + f.\end{aligned}\tag{1.34}$$

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0,16	0	0	0,01
0,85	0,04	-0,04	0,85	0	1,6	0,85
0,2	-0,26	0,23	0,22	0	1,6	0,07
-0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44	0,07



Рис. 1.32. Лист папоротника [10], (слева направо показано 2000, 4000, 10000, 50000 и 200000 итераций).



Рис. 1.33. Увеличенный фрагмент листа папоротника [10].

Нелинейные фракталы

Множество Жюлиа



Рис.1.35. Множество Жюлиа, $c = -0,12 + i0,74$;
аттрактор периода 3.



Рис.1.36. Пыль Фату, $c = 0,11031 - i$.

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c, \quad (1.44)$$

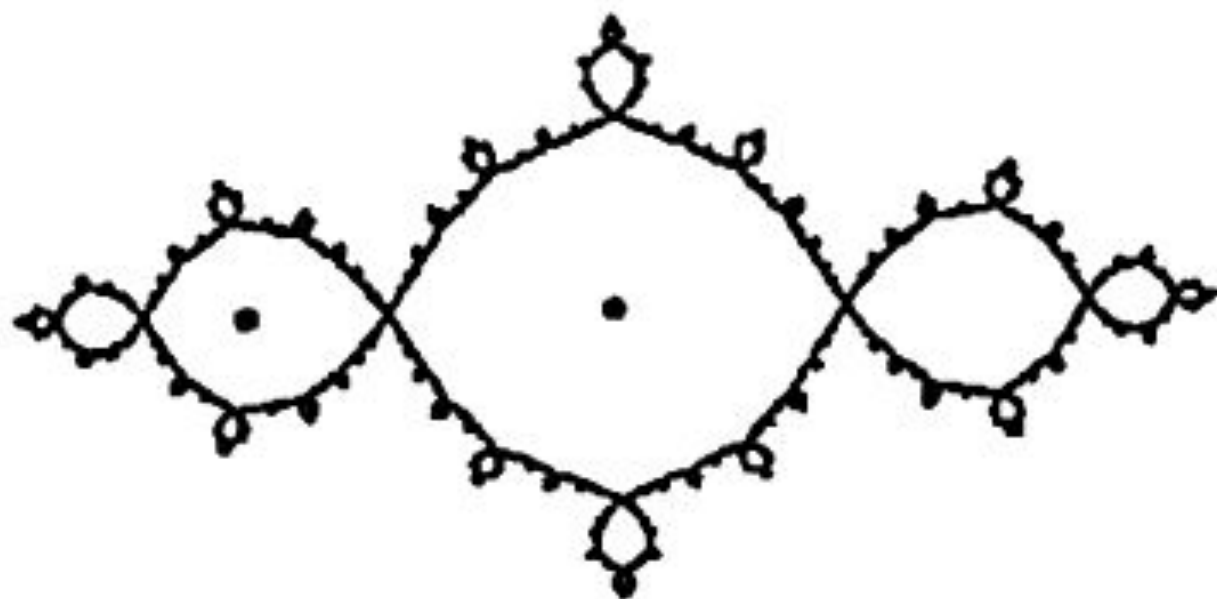


Рис. 1.38. Множество Жюлиа, $c = -1$; аттрактор периода 2.

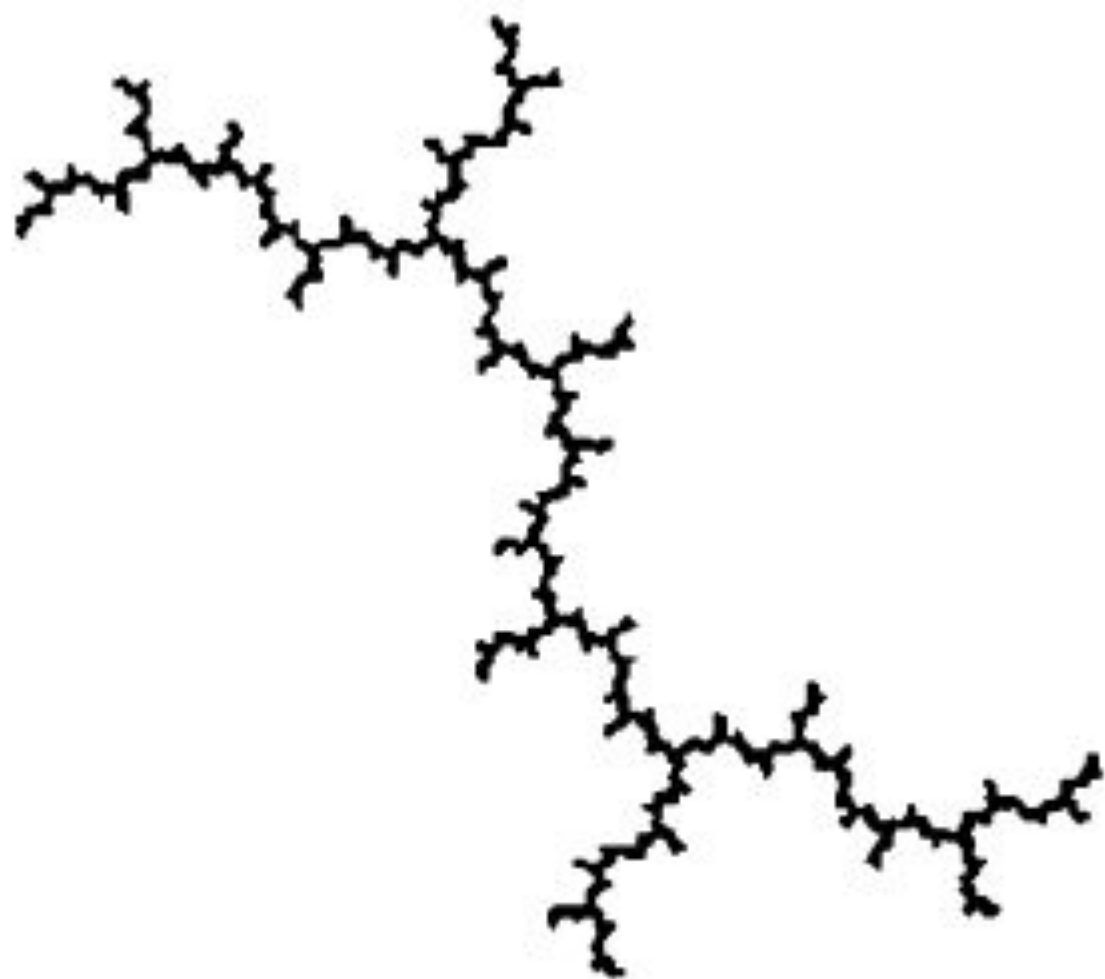


Рис.1.39. Множество Жюлиа, $c = i$. Дендрит.

Множество Мандельброта

$$z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \quad z_3 = (c^2 + c)^2 + c$$

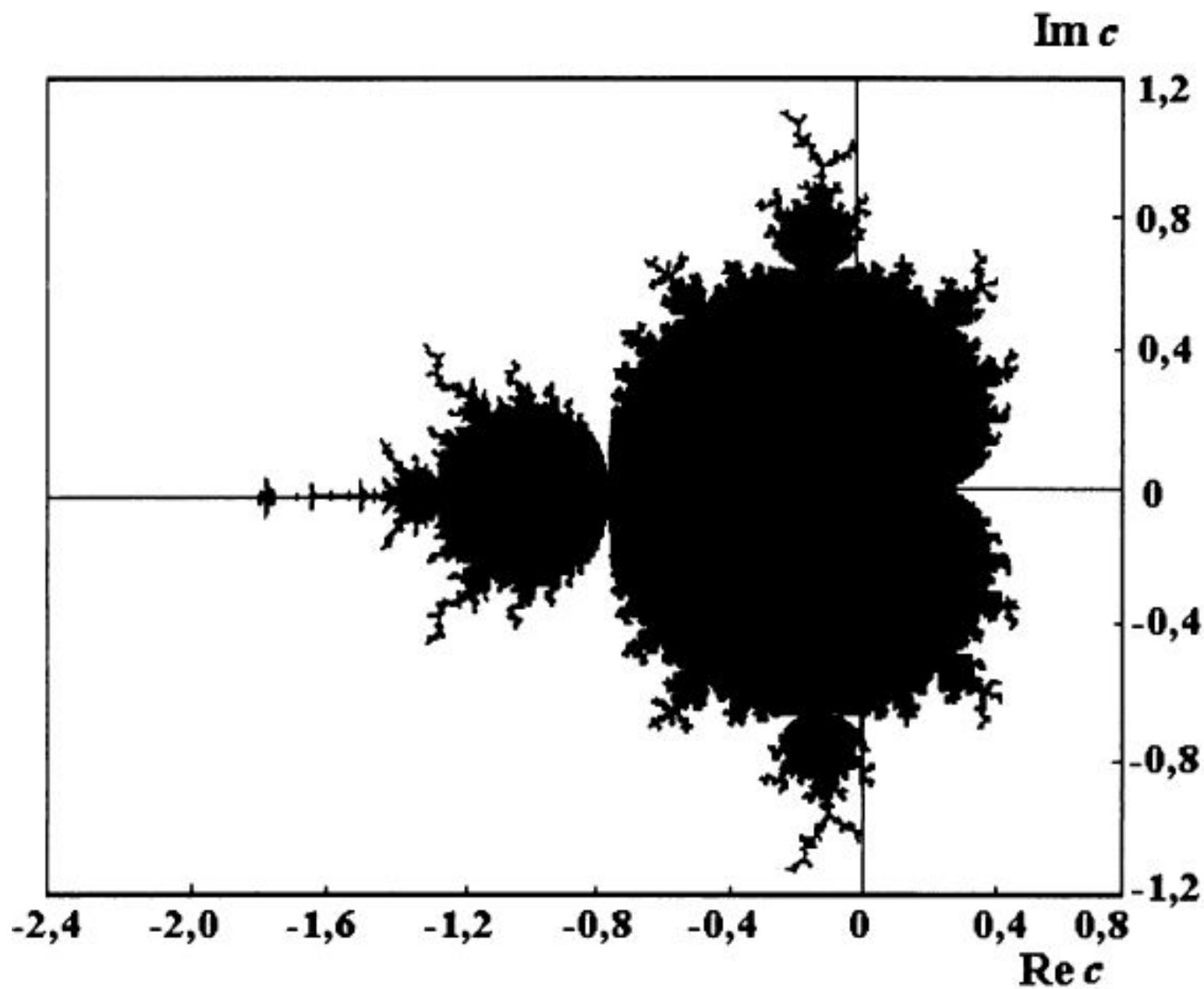


Рис. 1.37. Множество Мандельброта.

**Спасибо за
внимание!**