Фракталы

"Фракталы – это язык геометрии. Однако их главные элементы недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от привычных объектов евклидовой геометрии, таких, как прямая линия или окружность. Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур. Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Репертуар алгоритмических элементов неисчерпаем. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же четко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии".

© Пайтген, Юргенс, Заупе

Линейные фракталы

Береговая линия Норвегии

Рис. 1.4. Карта побережья южной части Норвегии.
Квадратная сетка вверху имеет шаг $\delta = 50$ км [42].

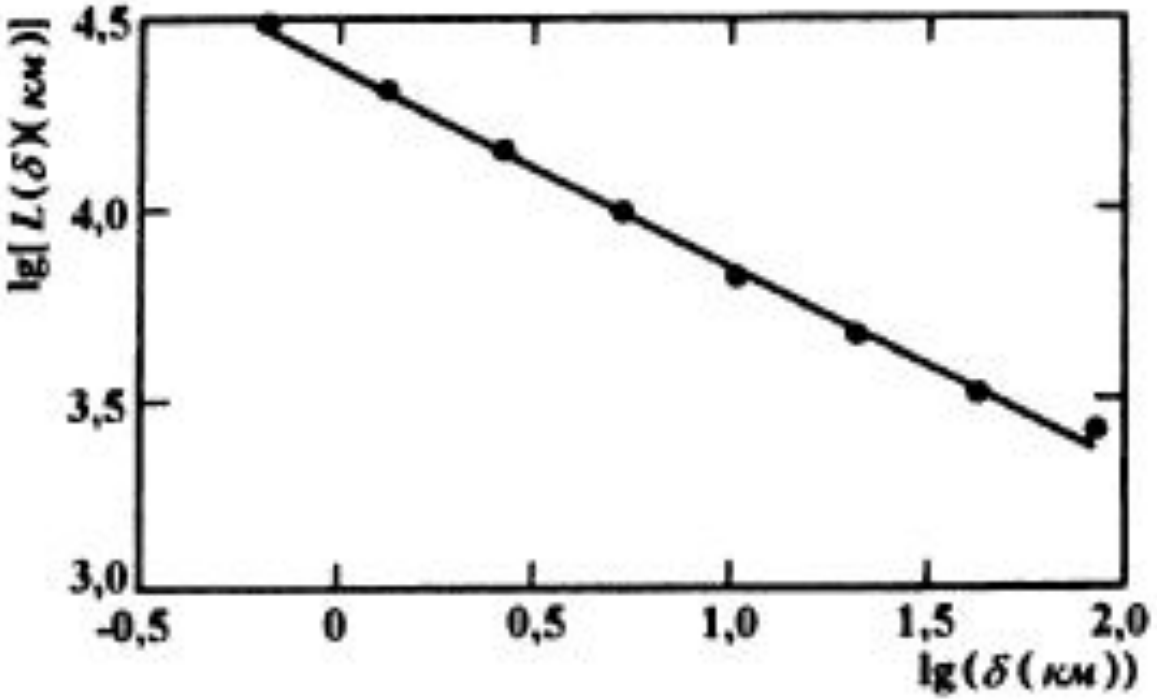

Рис. 1.5. Измеренная длина побережья Норвегии в зависимости от шага сетки δ (рис.1.4) [42].

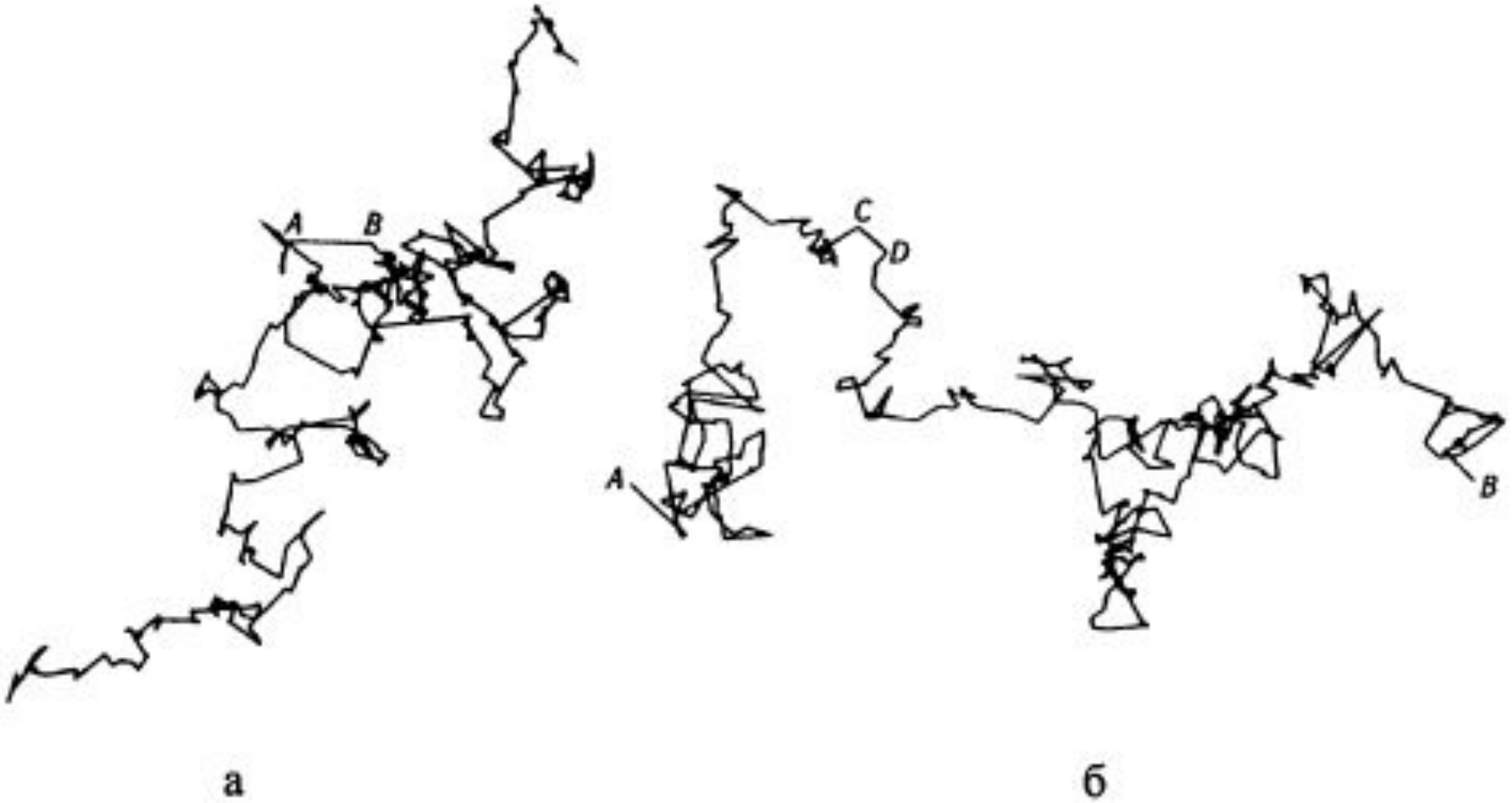

Рис. 1.2. Траектория движения частицы пыльцы [49].

Кривая и снежинка Коха

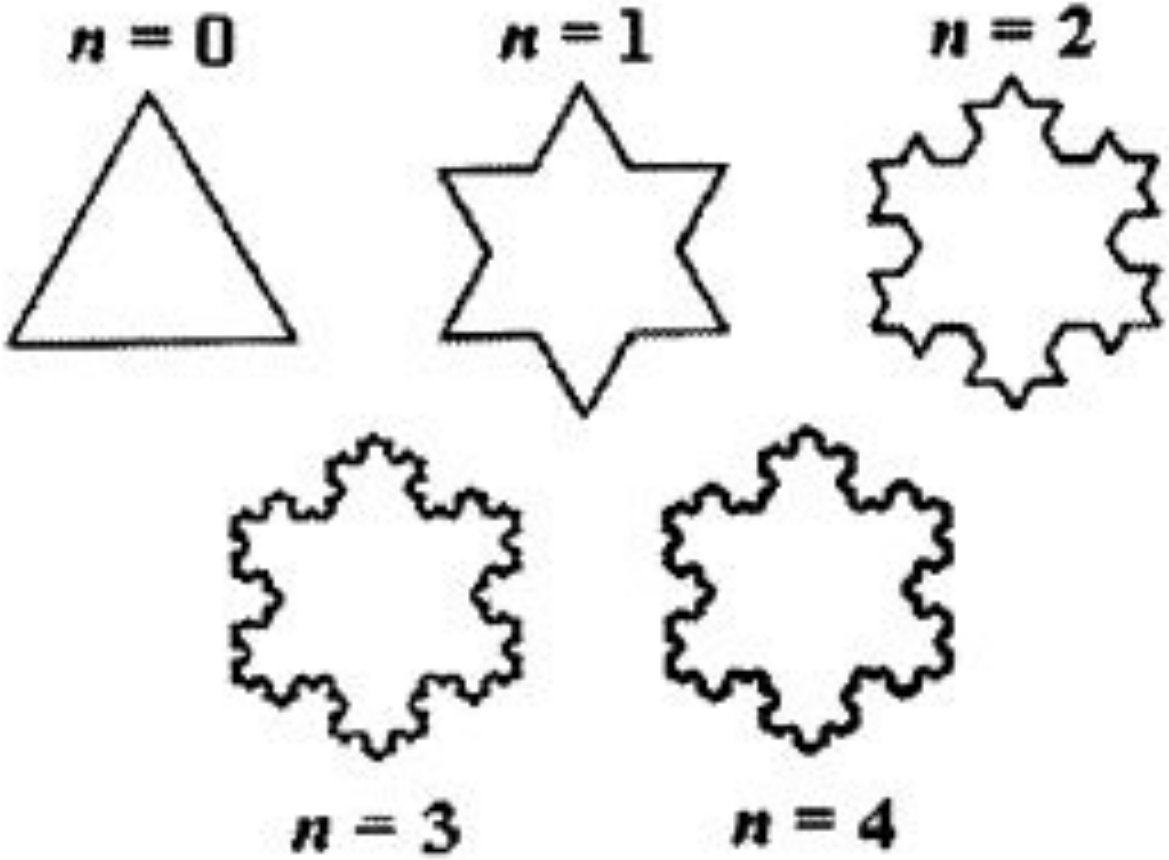

Рис. 1.1. Построение снежинки Коха.

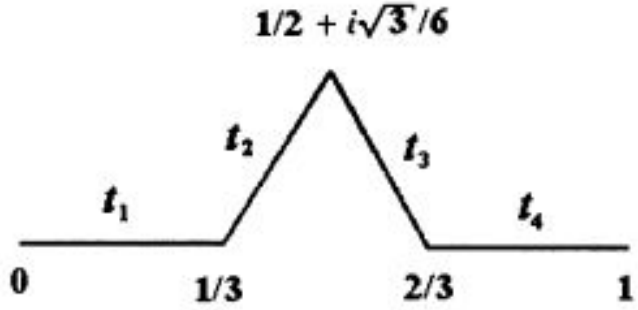

Рис. 1.28. Образующий элемент для кривой Коха.

Система итерируемых функций, которая выполняет данное преобразование, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
t_1: &\qquad f_1(z) = \frac{1}{3}z, \\
t_2: &\qquad f_2(z) = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{1}{3}, \\
t_3: &\qquad f_3(z) = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}, \\
t_4: &\qquad f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

$$
d_c = -\frac{\ln\left(\frac{3}{12}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618\,. \tag{1.15}
$$

Множество Кантора

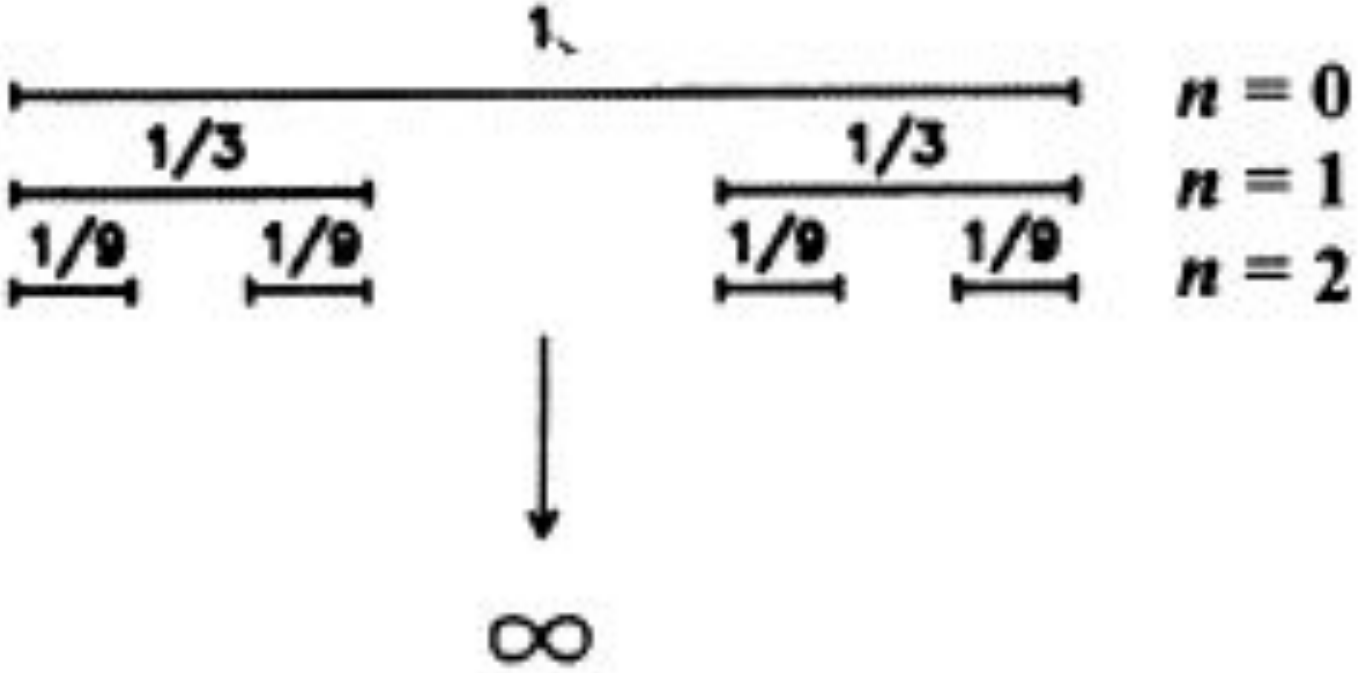

Рис.1.7. Построение множества Кантора.

$$d_c = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln (1/3)^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309\,. \qquad (1.14)$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\ldots=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=1.$$

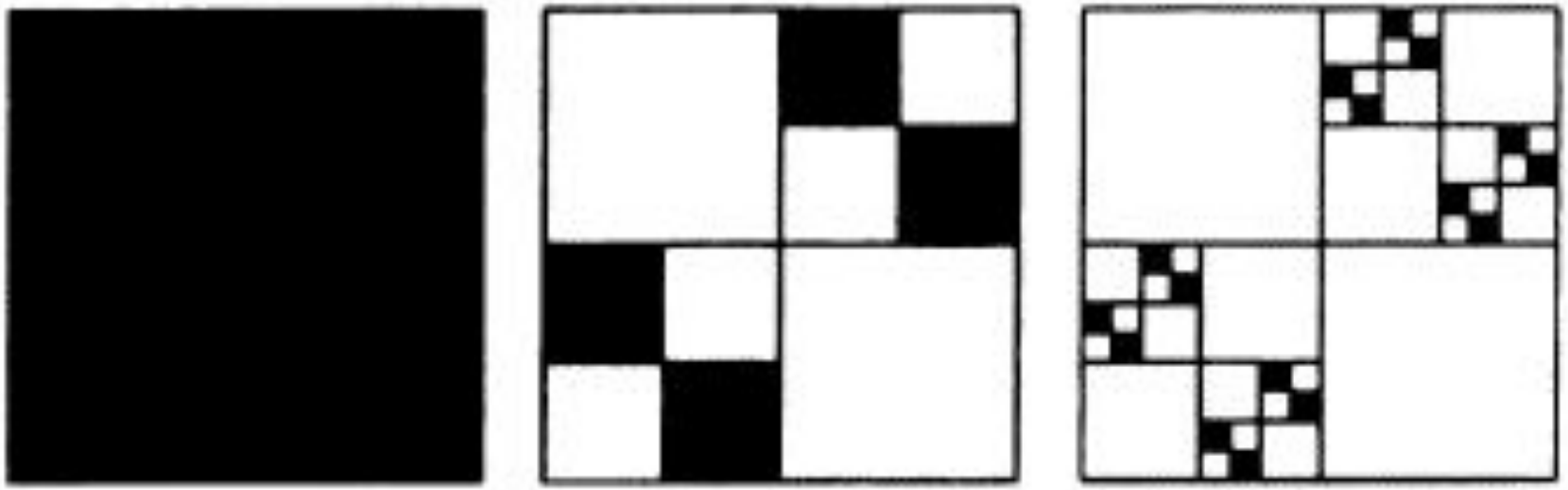

Рис. 1.8. Построение множества Кантора, $d_c = 1$.

Салфетка и ковёр Серпинского

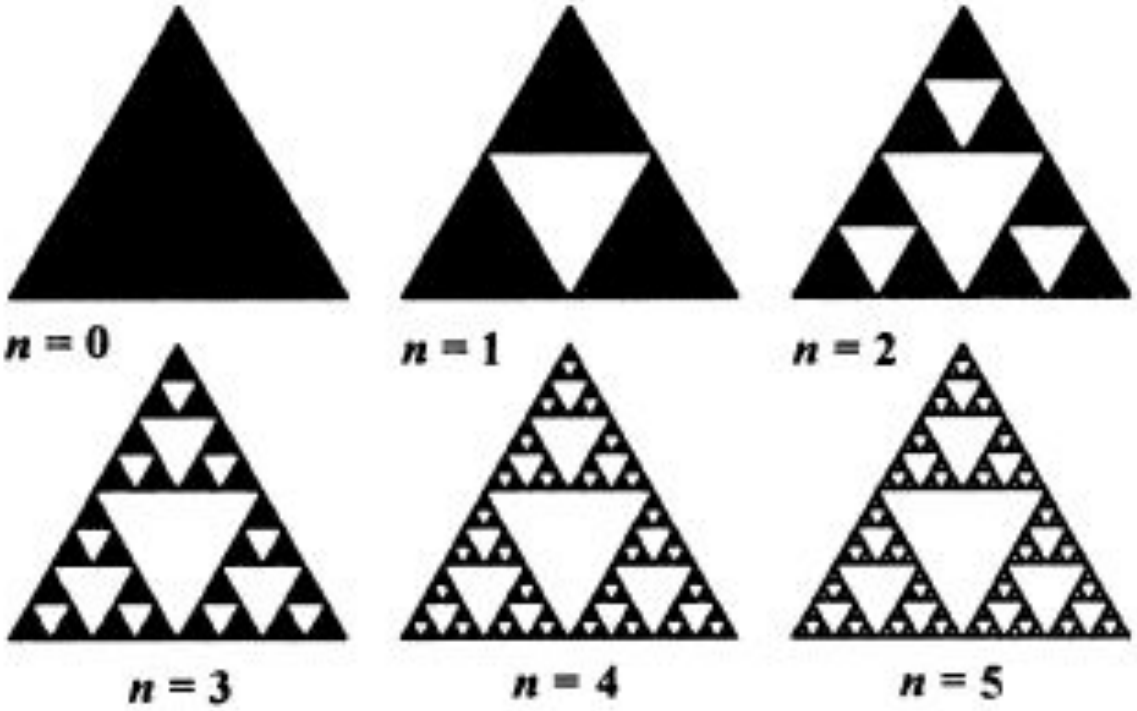

Рис. 1.9. Построение салфетки Серпинского.

$$d_c = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849 . \qquad (1.17)$$

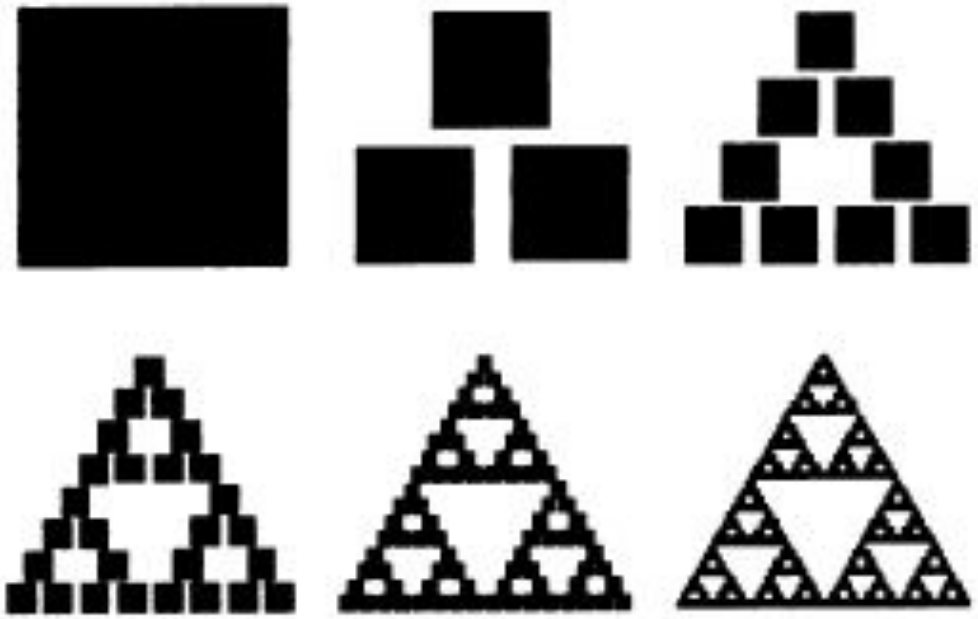

Рис. 1.25. Построение салфетки Серпинского:
детерминированный алгоритм.

$$\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+3^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+3^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+\ldots=\frac{1}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\ldots\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=1.$$

z_0 – начальная точка (произвольная),

$$
\begin{aligned}
z_1 &= t_1(z_0) \text{ или } t_2(z_0) \text{ или } t_3(z_0), \\
z_2 &= t_1(z_1) \text{ или } t_2(z_1) \text{ или } t_3(z_1), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
z_n &= t_1(z_{n-1}) \text{ или } t_2(z_{n-1}) \text{ или } t_3(z_{n-1}), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

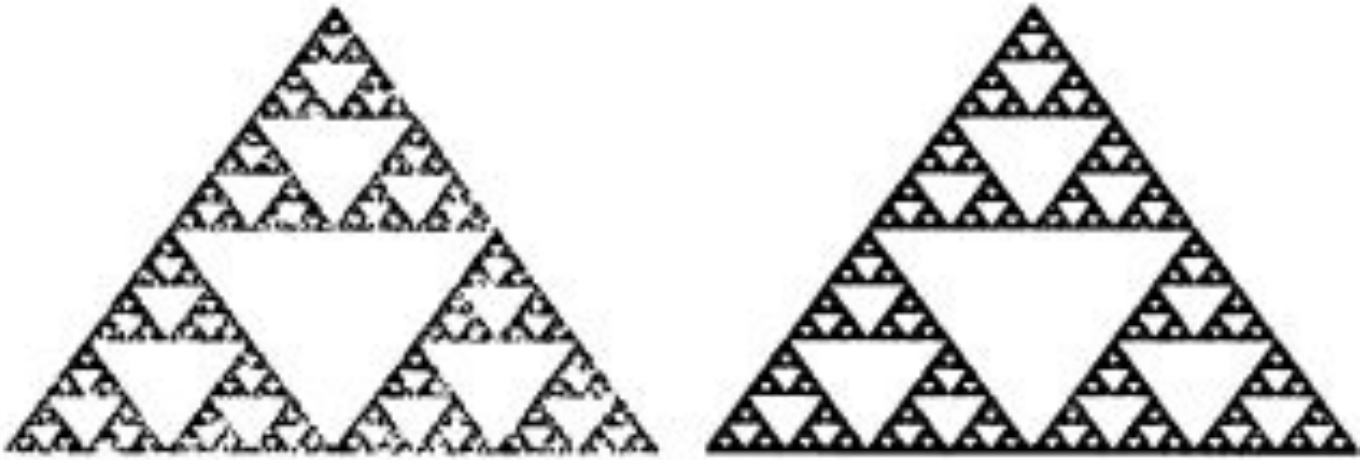

Рис. 1.26. Построение солфетки Серпинского:
метод случайных итераций
(слева направо $10^3, 10^4, 3\cdot10^4$ итераций).

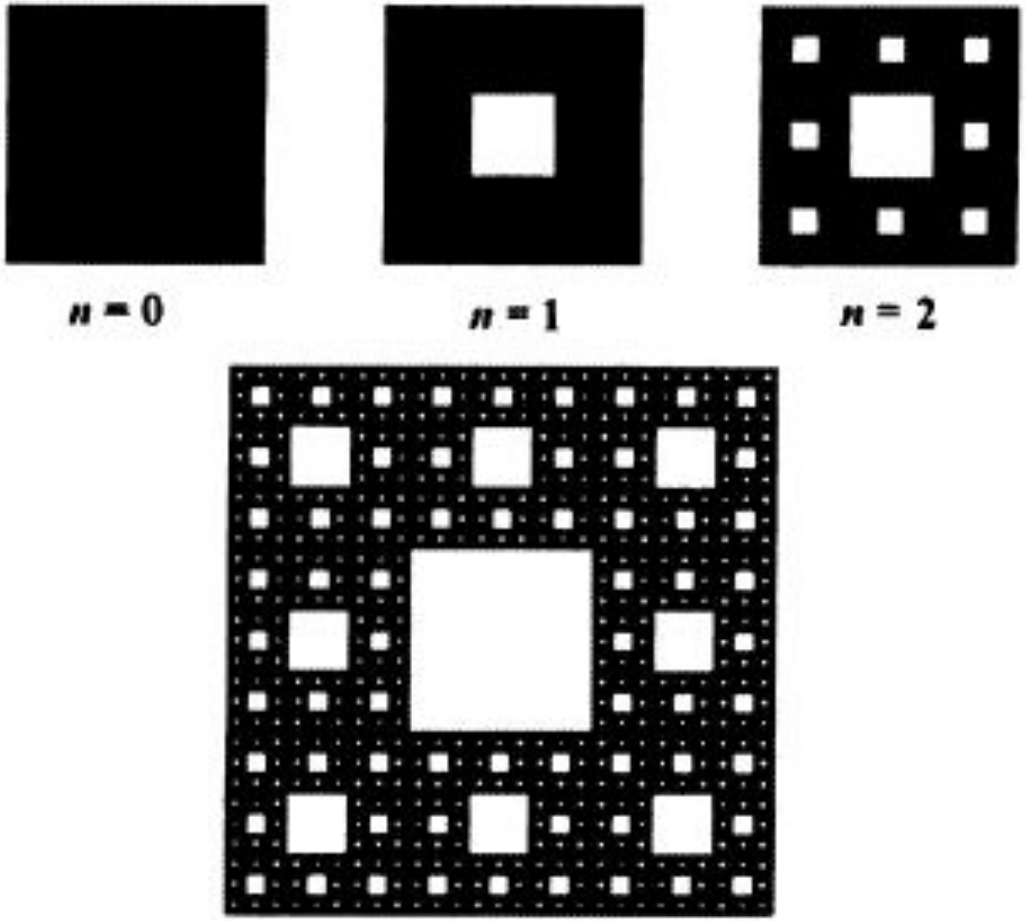

Рис. 1.10. Построение ковра Серпинского.

$$d_c = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928. \qquad (1.20)$$

Губка Менгера

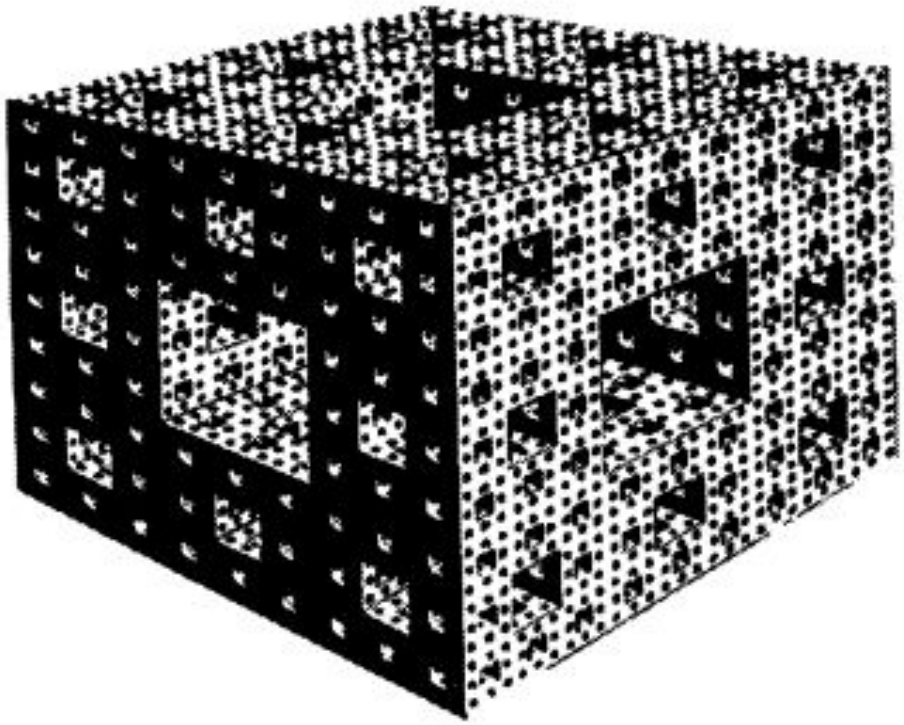

Рис 1.11. Губка Менгера.

$$d_c = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,7268\,. \qquad (1.21)$$

Кривая Пеано

Рис. 1.12. Образующий элемент для кривой Пеано.

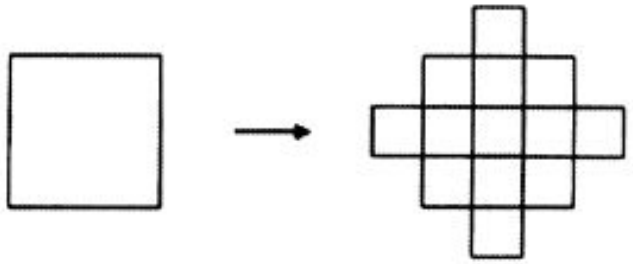

Рис. 1.13. Построение кривой Пеано.

$$d_c = -\frac{\ln 9}{\ln(1/3)} = 2\,. \qquad (1.23)$$

Кривая Госпера

Рис. 1.15. Три шага построения кривой Госпера [10].

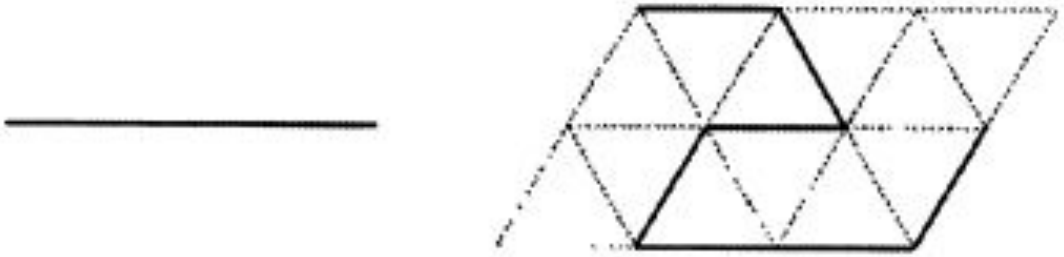

Рис. 1.14. Начальный и образующий элементы кривой Госпера [10].

Дракон Хартера-Хейтуэя

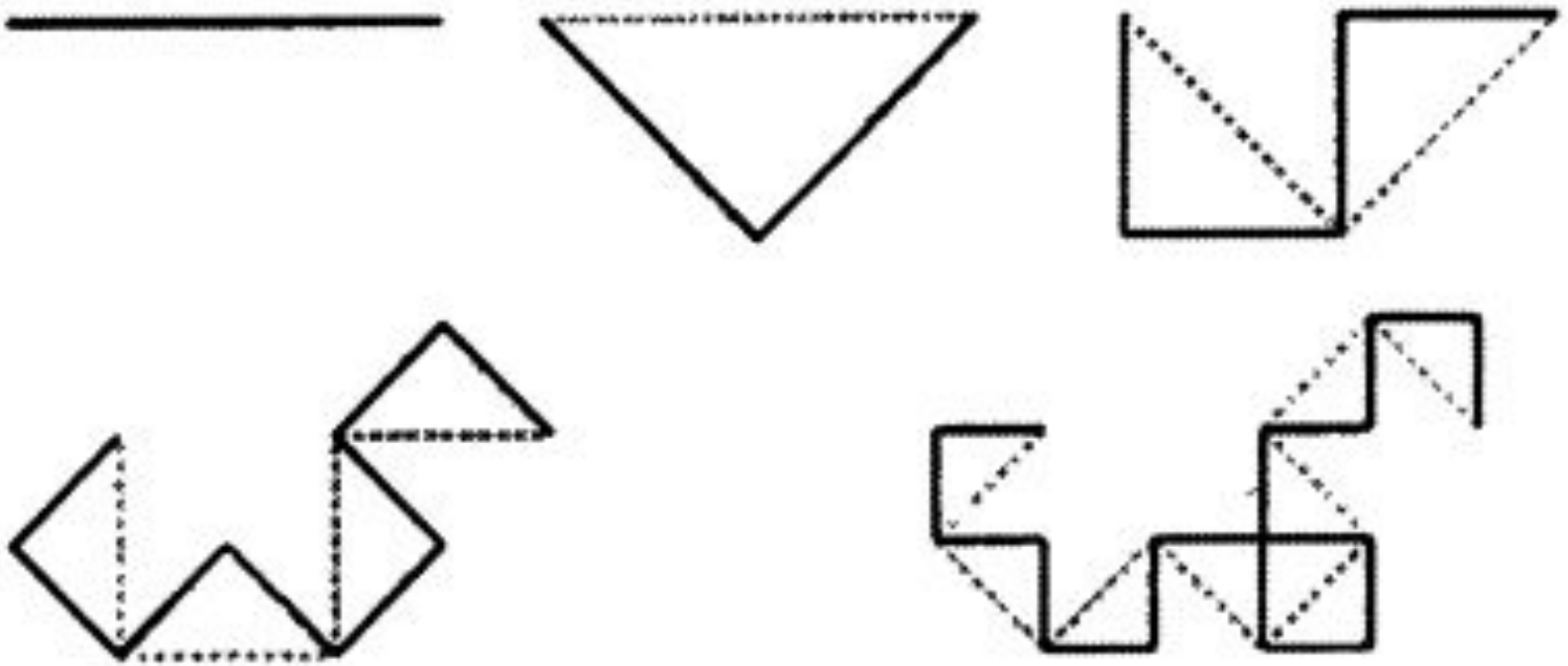

Рис. 1.16. Алгоритм построения дракона Хартера–Хейтуэя.

Рис. 1.17. 12-е и 16-е поколение дракона Хартера–Хейтуэя [10].

Схемы преобразований

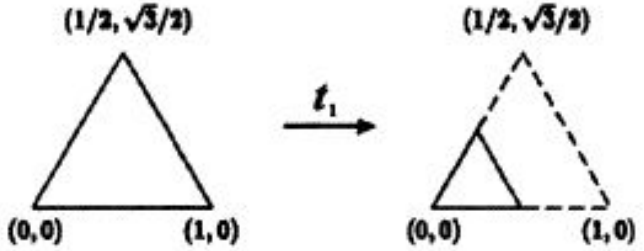

Рис. 1.19. Схема преобразования t_1 (в скобках приведены декартовы координаты вершин). (1.26)

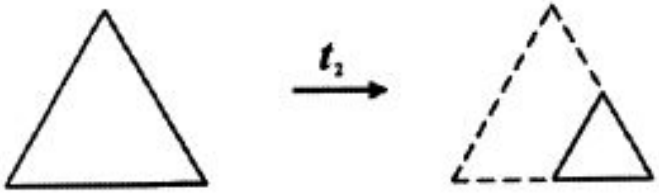

Рис.1.20. Схема преобразования t_2.

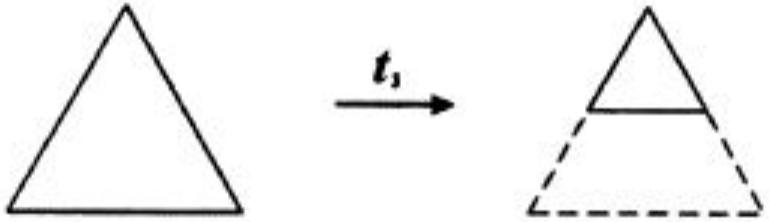

Рис.1.21. Схема преобразование t_3.

$$t_1 : \quad f_1(z) = \frac{1}{2} z . \tag{1.25}$$

$$t_2 : \quad f_2 = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} . \tag{1.26}$$

$$t_3 : \qquad f_3(z) = \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} . \tag{1.27}$$

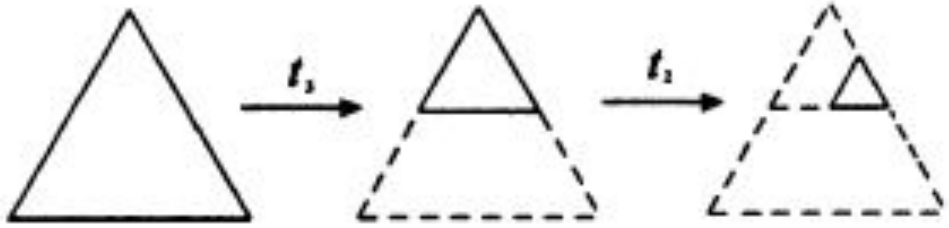

Рис. 1.22. Схема преобразования $t_3 t_2$.

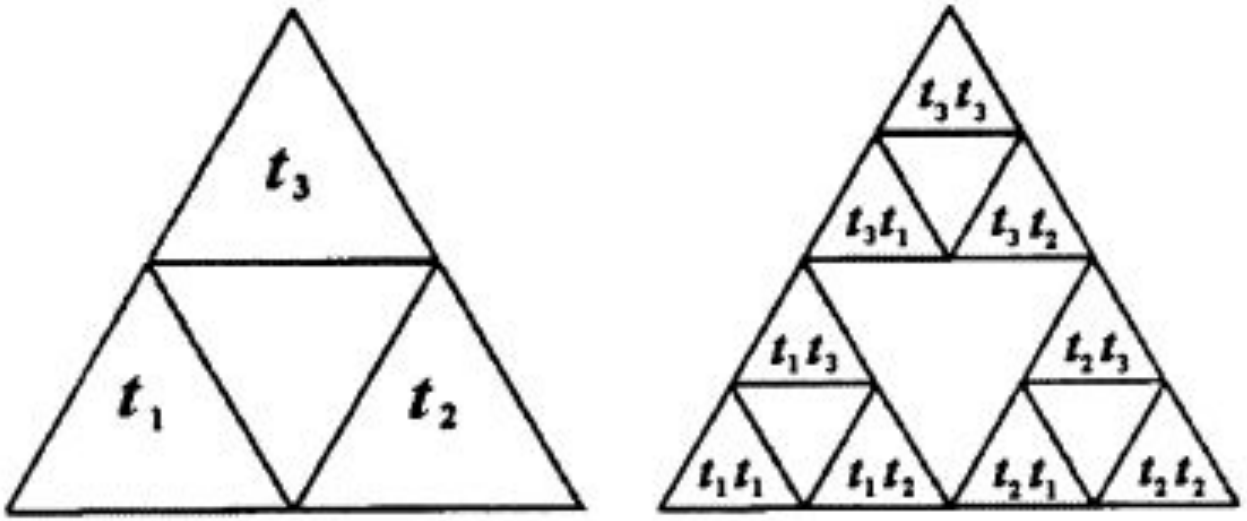

Рис. 1.23. Два первых поколения итераций
из трех линейных отображений.

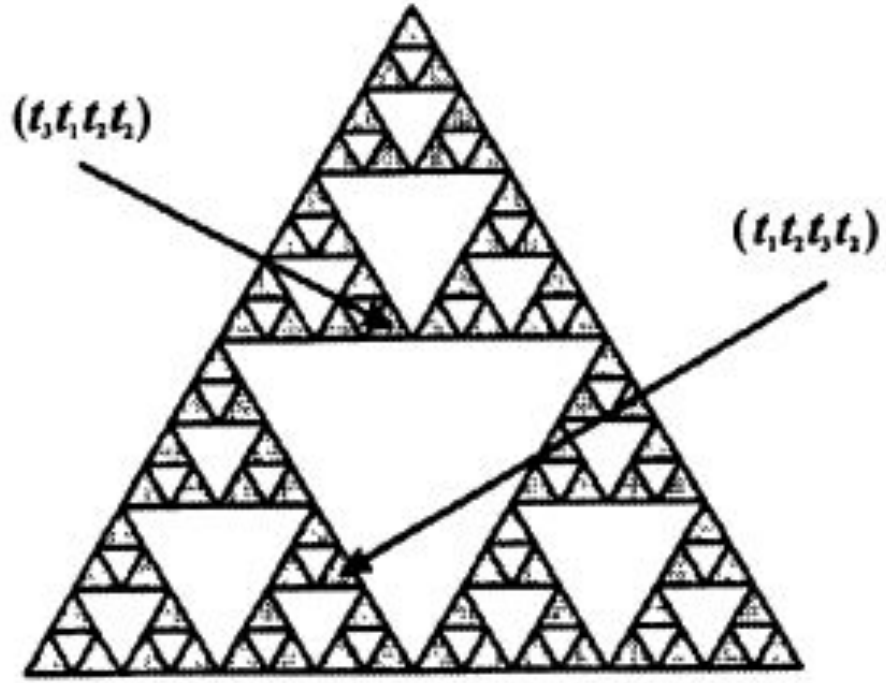

Рис. 1.24. Четвертое поколение итераций.

$$
\begin{aligned}
&E_0 - \text{начальное множество},\\
&E_1 = t_1(E_0) \cup t_2(E_0) \cup t_3(E_0),\\
&E_2 = t_1(E_1) \cup t_2(E_1) \cup t_3(E_1),\\
&\qquad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&E_n = t_1(E_{n-1}) \cup t_2(E_{n-1}) \cup t_3(E_{n-1}),\\
&\qquad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

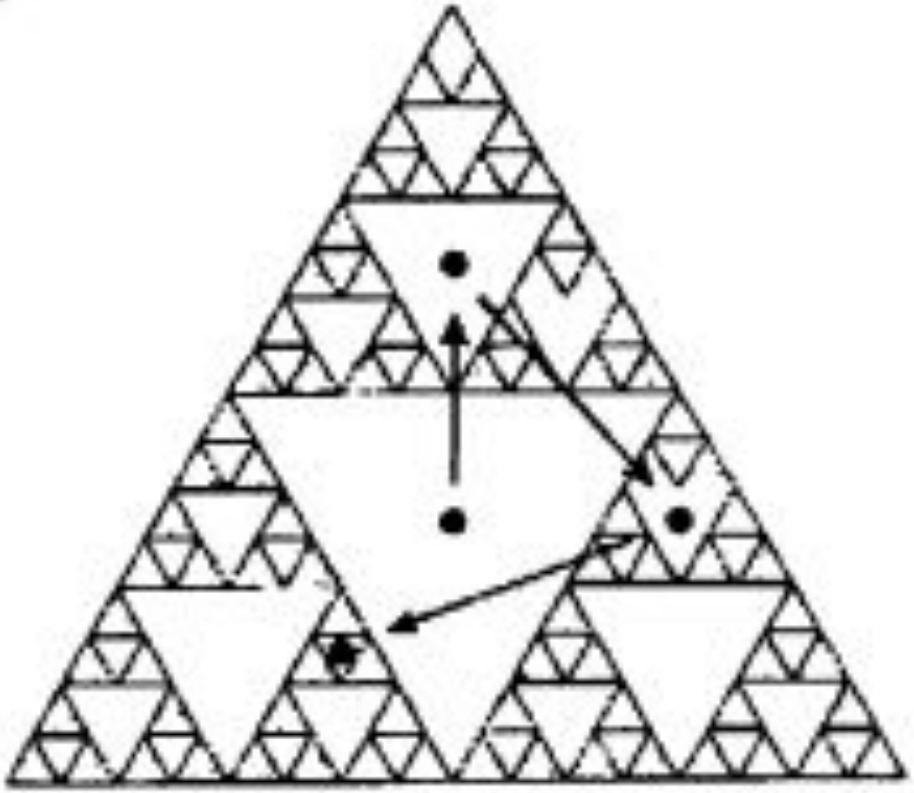

Рис. 1.27. Схема появления аттрактора.

Кривая Вейерштрасса

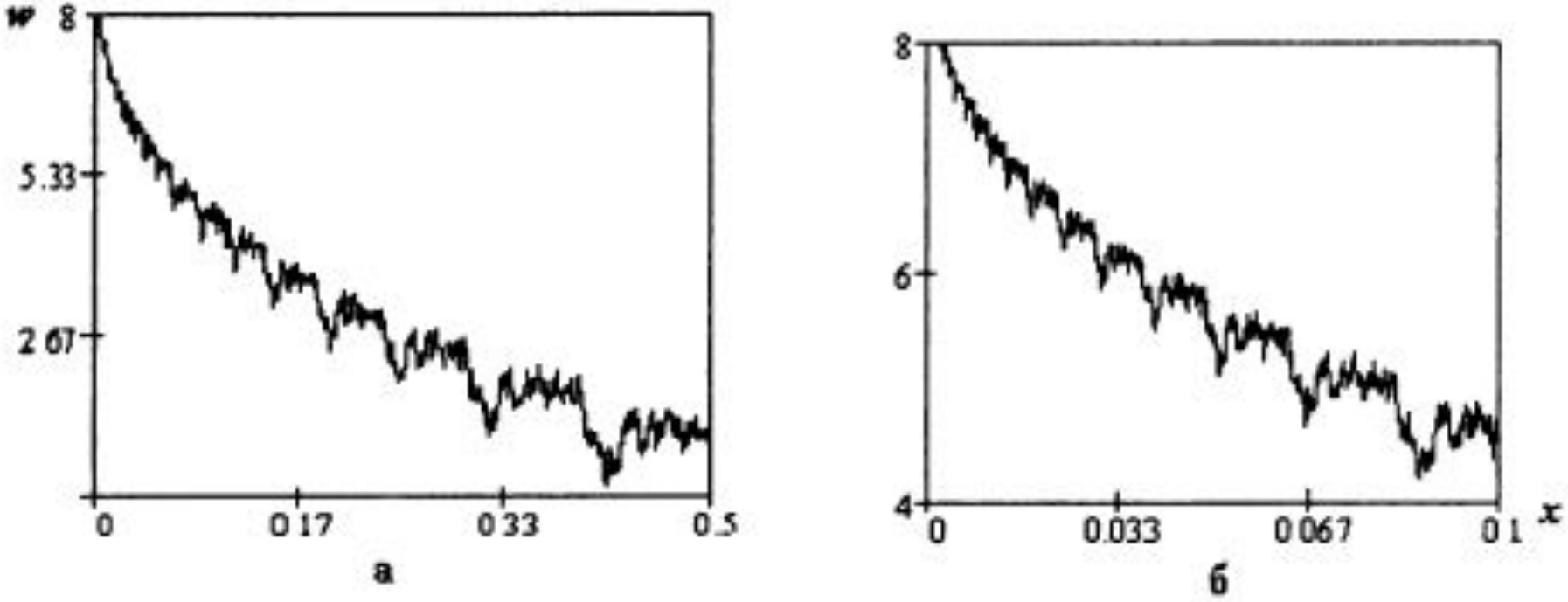

Рис.1.18. Кривая Вейерштрасса.

$$w(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\left(b^n x\right). \qquad (1.24)$$

Лист папоротника

$$x_{n+1} = ax_n + by_n + e,$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n + f. \qquad (1.34)$$

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0,16	0	0	0,01
0,85	0,04	–0,04	0,85	0	1,6	0,85
0,2	–0,26	0,23	0,22	0	1,6	0,07
–0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44	0,07

Рис. 1.32. Лист папоротника [10], (слева направо показано 2000, 4000, 10000, 50000 и 200000 итераций).

Рис. 1.33. Увеличенный фрагмент листа папоротника [10].

Нелинейные фракталы

Множество Жюлиа

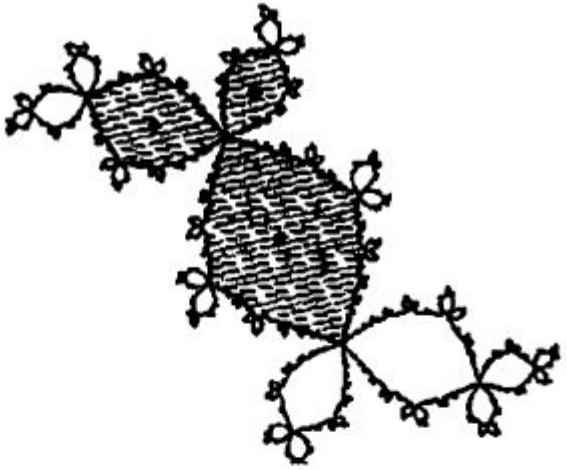

Рис.1.35. Множество Жюлиа, $c = -0,12 + i0,74$;
аттрактор периода 3.

Рис.1.36. Пыль Фату, $c = 0,11031 - i$.

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c, \qquad (1.44)$$

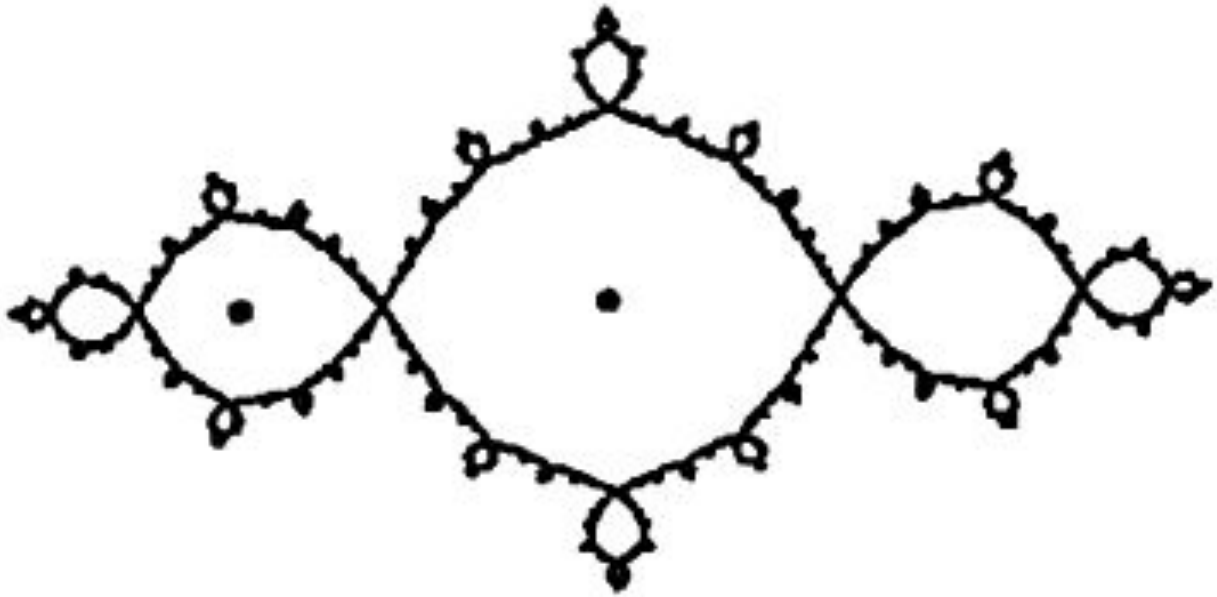

Рис. 1.38. Множество Жюлиа, $c = -1$; аттрактор периода 2.

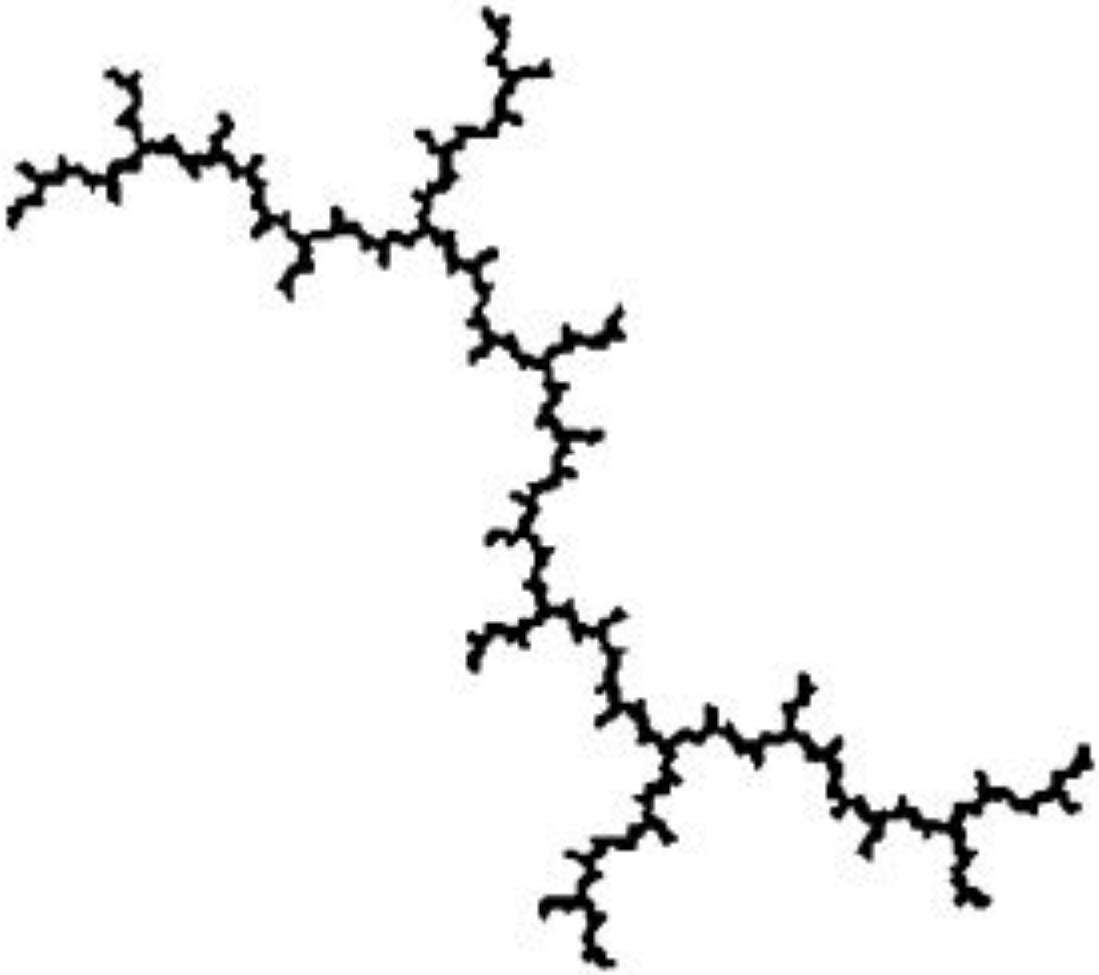

Рис.1.39. Множество Жюлиа, $c = i$. Дендрит.

Множество Мандельброта

$$z_1 = c\,,\quad z_2 = c^2 + c\,,\quad z_3 = \left(c^2 + c\right)^2 + c$$

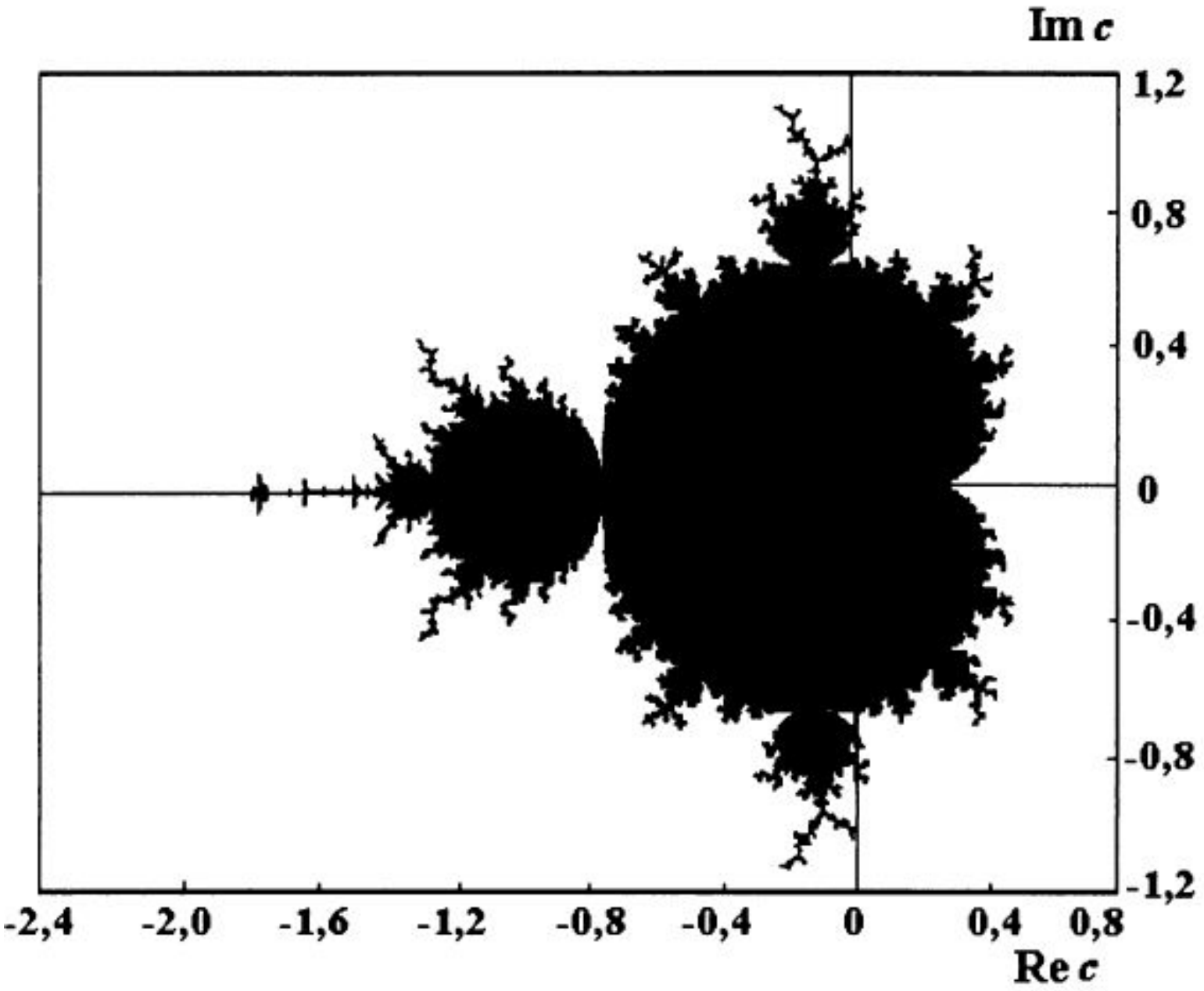

Рис. 1.37. Множество Мандельброта.

Спасибо за внимание!