



21.5. ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

называется ДУ второго порядка.

где x – независимая переменная;

y – неизвестная функция;

y' и y'' – ее первая и вторая производные.






Будем рассматривать уравнения второго порядка, разрешенные относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y')$$

6

Решением ДУ второго порядка называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) , которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество.






ТЕОРЕМА КОШИ

(о существовании и единственности решения ДУ)


Пусть дано ДУ (6). Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D пространства переменных (x, y, y') , то для любой внутренней точки (x_0, y_0, y'_0) этой области существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x=x_0, y=y_0, y'=y'_0$

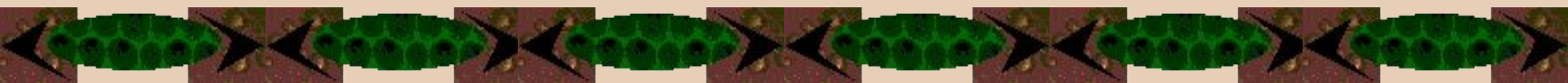
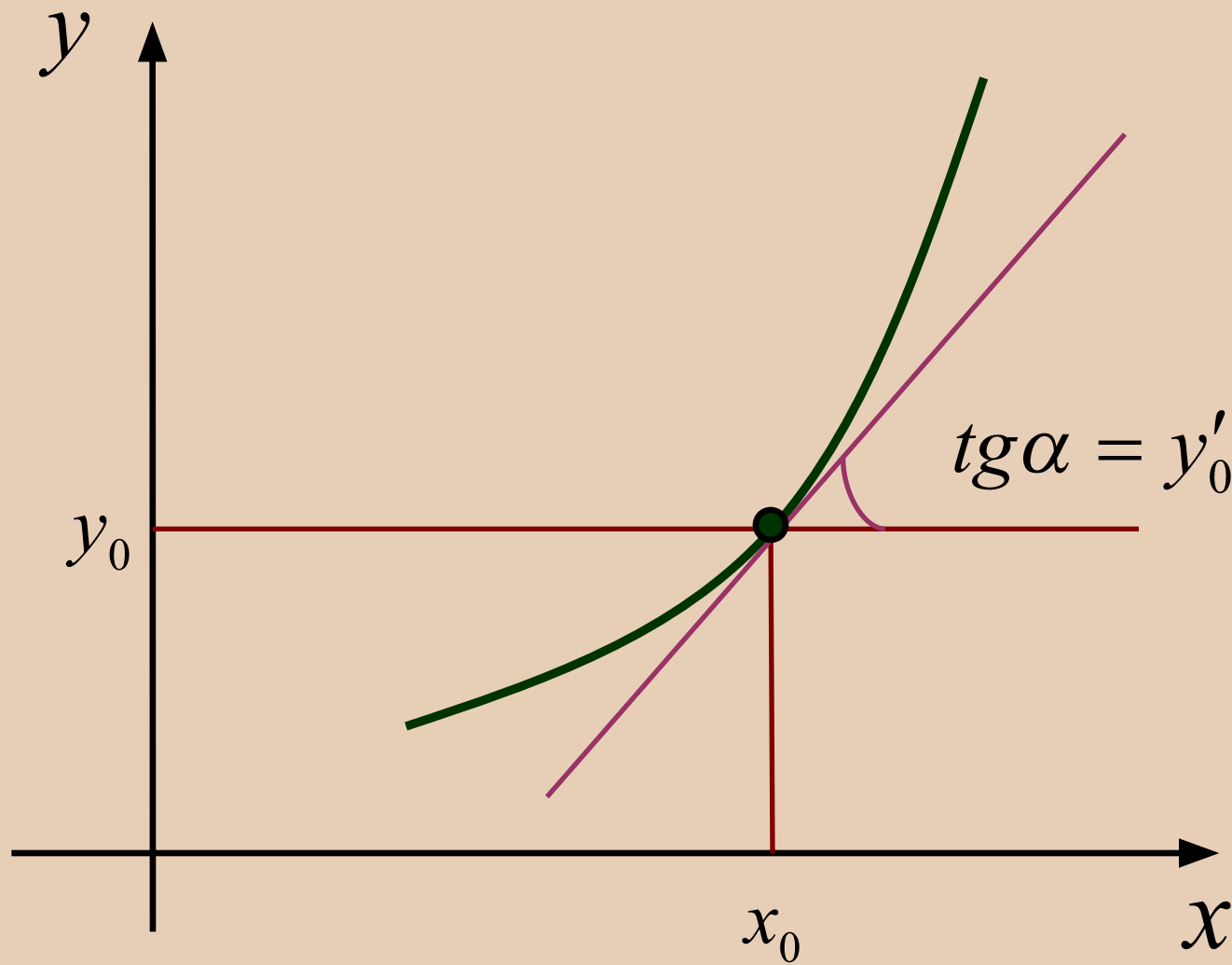





Геометрический смысл теоремы Коши

Через заданную точку (x_0, y_0) на плоскости XOY проходит единственная интегральная кривая с заданным значением углового коэффициента касательной y_0' .








Общим решением уравнения (6) в некоторой области D называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

удовлетворяющая этому уравнению при произвольных значениях C_1 и C_2 .

Частным решением уравнения (6) называется общее решение, взятое при фиксированных значениях этих постоянных:

$$y = \varphi(x, C_0^1, C_0^2)$$





Пример.


Рассмотрим уравнение

$$y'' = 0$$

Его общее решение получается при двукратном интегрировании:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \int y' dy = \int dx \cdot 0 \Rightarrow y' = C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \Rightarrow dy = C_1 \cdot dx \Rightarrow \int dy = \int C_1 \cdot dx$$



$$y = C_1 \cdot x + C_2$$

Найдем частное решение уравнения при

$$y|_{x=1} = 2 \quad y'|_{x=1} = 1$$

Подставляем в общее решение:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Частное решение будет иметь вид:

$$y = x + 1$$
