

# *Иркутский филиал*

## **Московского государственного технического университета гражданской авиации**



*Ил-96*

**Экипаж- 3 чел.,  
Дальность - 12800 км,  
Количество пассажиров – 436,  
Длина – 64 м,  
Высота – 16 м  
Стоимость - \$58 млн**

**широкофюзеляжный дальнемагистральный  
четырёхмоторный турбореактивный  
низкоплан со стреловидным крылом и  
однокилевым вертикальным оперением  
(первый полет в 1988 г., выпущено 29 шт.)**

# Тема 2. Анализ переходных процессов классическим методом

Лекция 4 (2 часа)

## Изучаемые вопросы:

- 4.1. Общие сведения
- 4.2. Типовые воздействия на цепь: единичная ступенчатая функция и импульсная  $\delta$ -функция
- 4.3. Реакция цепи на типовые воздействия: переходная и импульсная переходная функции
- 4.4. Интеграл Дюамеля
- 4.5. Анализ реакции цепи на произвольное воздействие с помощью интеграла Дюамеля
- 4.6. Преобразование Лапласа
- 4.7. Операторные сопротивления и внутренние э.д.с, переход от операторного изображения к оригиналу

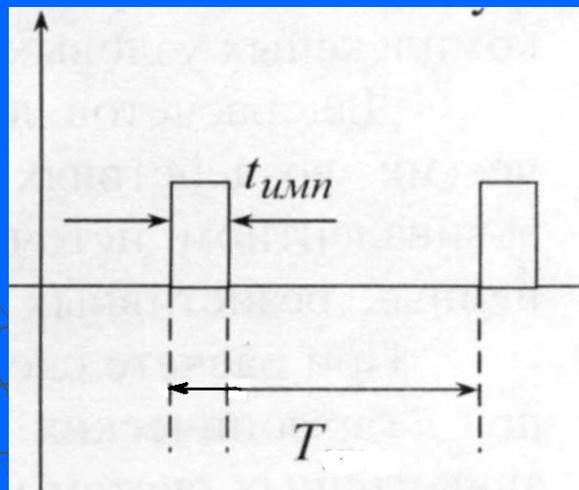
---

Лектор – к.ф.м.н., доцент Кобзарь В.А.

## 4.1. Общие сведения об импульсных системах и переходных процессах в них

Импульсными системами называются устройства, в которых формируются и действуют импульсные ЭДС (напряжения) и токи, длительность которых сравнима с длительностью переходных процессов (3-5  $\tau$ ).

Применяются импульсы разнообразной формы, например, прямоугольные, трапецеидальные, треугольные, экспоненциальные, радиоимпульсные, т.е. импульсы с высокочастотными колебаниями (заполнением) и другие.

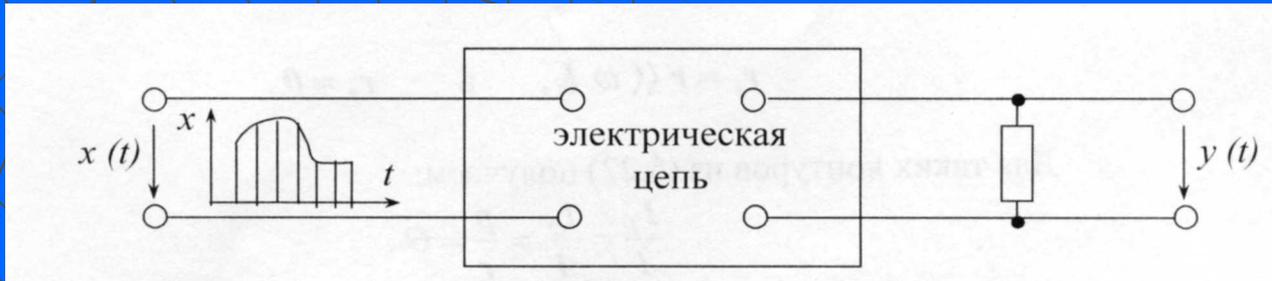


В зависимости от величин  $t_{имп}$  и  $T$ , закона изменения этих величин и длительности процесса могут быть применены различные методы анализа. При каждом воздействии импульса э.д.с. (напряжения) в цепи происходит переходный процесс.

По истечении времени воздействия импульса в цепи начинается другой переходный процесс, связанный с рассеиванием энергии, накопленной за время  $t_{имп}$  в электрических и магнитных полях конденсаторов и катушек. Если формы импульсов повторяются, то при этом расчет достаточно произвести для одного импульса. Когда длительность переходного процесса оказывается больше чем период - переходный процесс в следующем импульсе будет зависеть от переходного процесса в предыдущие моменты времени. Для анализа процессов в таких системах должны быть применены специальные методы.

# Основные понятия и определения классического метода анализа переходных процессов

**Дано:** на линейную электрическую цепь с сосредоточенными параметрами воздействует напряжение или ток произвольной формы -  $x(t)$



**Найти:** ток или напряжение на каком-либо участке рассматриваемой цепи - выходной сигнал  $y(t)$

Для расчетов применяется метод суперпозиции (наложения). Идея суперпозиционных методов заключается в представлении входного сигнала сложной формы суммой элементарных сигналов стандартной формы. Затем определяются составляющие выходного сигнала, обусловленные каждым из элементарных сигналов. На основе принципа суперпозиции ток или напряжение на каком-либо участке цепи равны алгебраической сумме этих составляющих. Суперпозиционные методы применяются к электрическим цепям с нулевыми начальными условиями

Сигналы стандартной формы

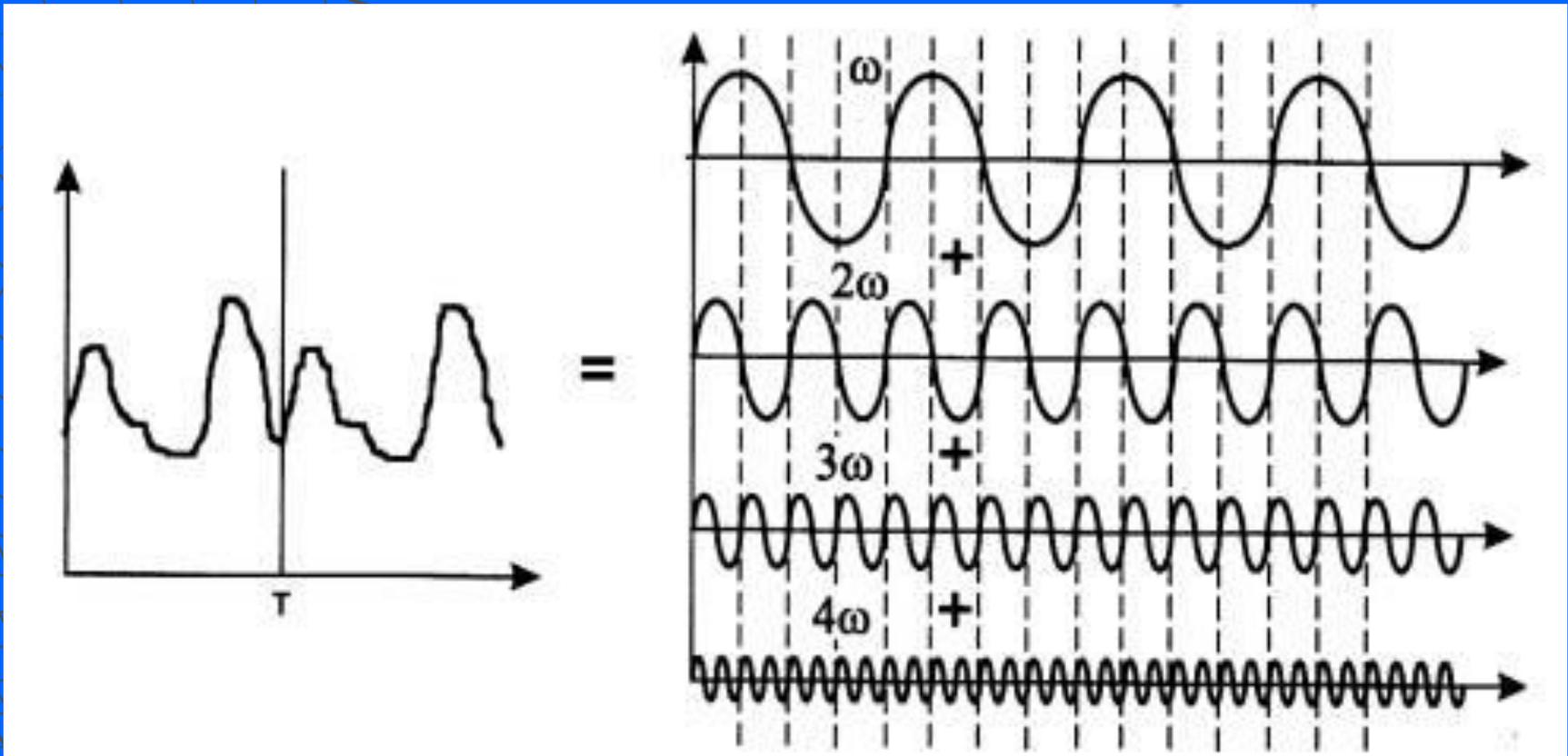


синусоидальный сигнал

единичная функция включения

импульсная функция

# Представление периодического сигнала суммой синусоид



Спектр сигнала ?????

## 4.2. Типовые воздействия на цепь: единичная ступенчатая функция и импульсная $\delta$ - функция

Единичной функцией называется функция времени, которая определяется следующим образом (рис.1). Реализация такого воздействия возможна при использовании источника ЭДС и ключа (рис.2)

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

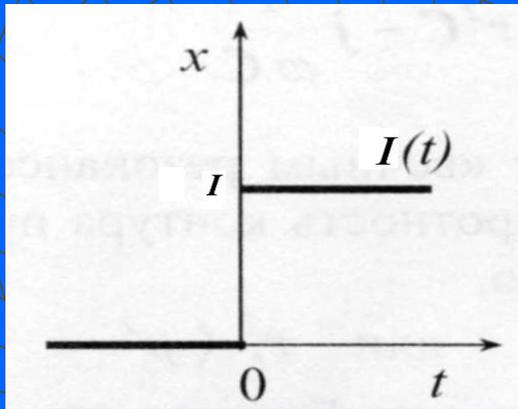


Рис.1

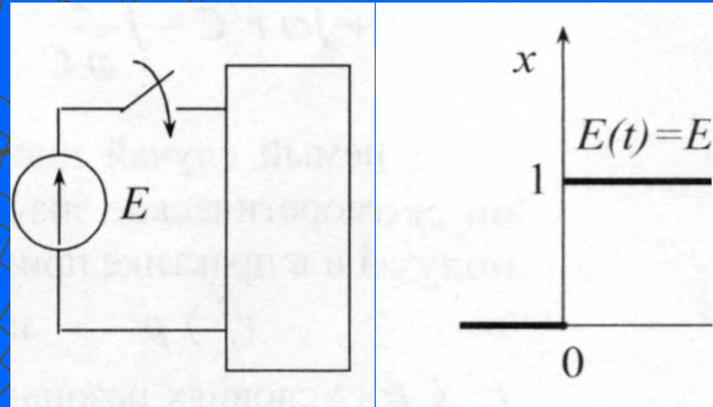


Рис.2

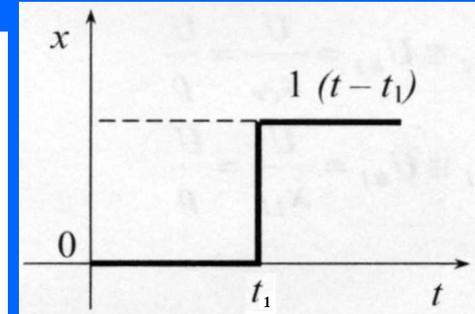


Рис.3

Единичная функция  $I_{t_1}$ , запаздывающая на время  $t_1$ , (рис.3) часто применяется при расчетах цепей. Например произведение экспоненты  $e^{-\beta(t-t_1)}$  на запаздывающую функцию имеет аналитическое и графическое изображение (рис.4)

$$I_{t_1} = 1_{t_1}(t) = 1(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1 \\ 1 & \text{при } t \geq t_1 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_1)} \cdot 1_{t_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1 \\ e^{-\beta(t-t_1)} & \text{при } t \geq t_1 \end{cases}$$

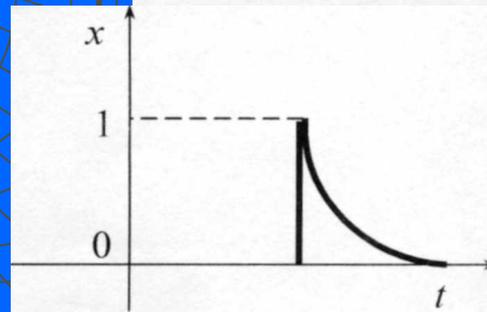


Рис.4

Импульсная функция. На рис.4 показан импульсный сигнал прямоугольной формы.

Интенсивность такого сигнала принято оценивать произведением амплитуды  $A$  на длительность импульса  $\Delta t$ , т.е.  $S = A \Delta t$

Единичным назовем импульс, для которого произведение амплитуды на длительность (площадь под кривой импульса) равно единице:  $S = A \Delta t = 1$

При ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) единичный импульс превращается в так называемую импульсную функцию или дельта-функцию, которая определяется

Импульсной или дельта-функцией  $\delta(t)$

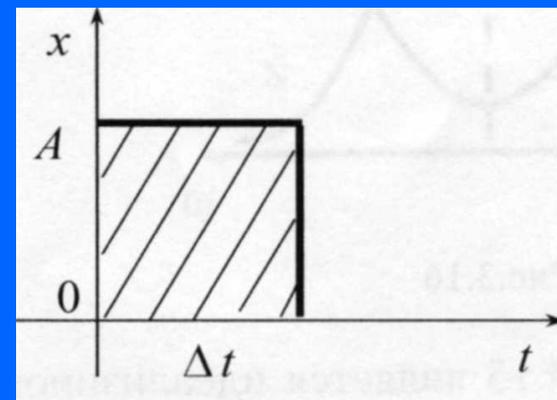
называется предел, к которому стремится единичный прямоугольный импульс при уменьшении его длительности до нуля.

Импульсная функция определяется

Амплитуда импульсной функции  $\delta(t)$  равна бесконечности, а длительность - нулю. В этом предельном случае форма импульса не имеет значения

Единичная импульсная функция имеет значение  $\delta(t) = \infty$  в момент  $t = t_1$

Рис.4



$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t) - A(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

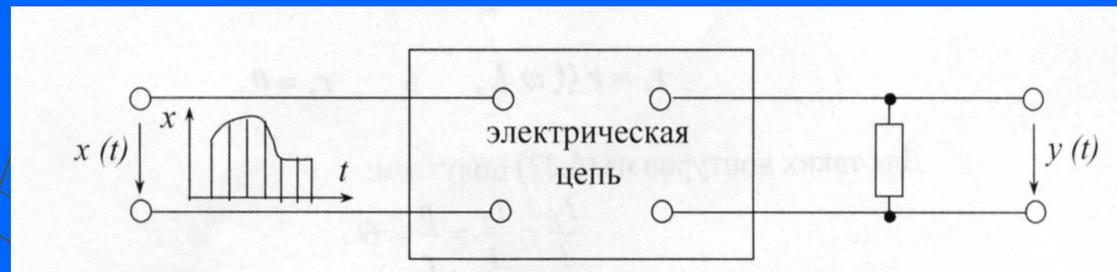
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$

$$\delta(t - t_1) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_1 \\ 0 & \text{при } t \neq t_1 \end{cases}$$

# 4.3. Реакция цепи на типовые воздействия: переходная и импульсная переходная функции

**Переходной функцией** цепи  $h(t)$  называется реакция цепи на действие единичного ступенчатого сигнала (напряжения или тока). Пусть на вход цепи действует сигнал  $x(t) = A1(t)$ , где  $A = \text{const}$ . Выходной сигнал цепи, имеющей нулевые начальные условия, обозначим через  $y(t)$

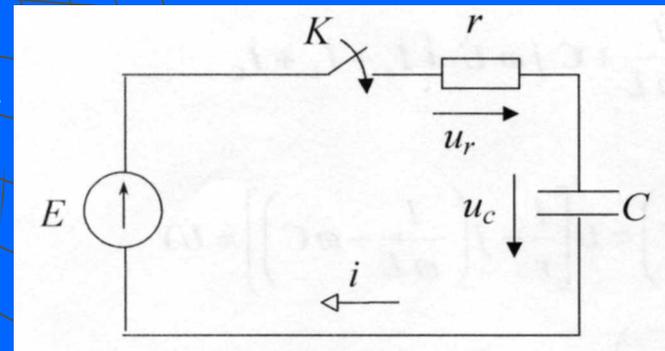


$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Входной сигнал	Выходной сигнал	Размерность
Напряжение	Напряжение	Б/р
	Ток	Проводимость
Ток	Напряжение	Сопротивление
	Ток	Б/р

Переходная характеристика может иметь и не иметь размерность, все зависит от размерностей входного и выходного сигналов

**ПРИМЕР:**



Определить переходную функцию цепи, если  $x(t) = E$ , В. Найдем выходной сигнал

$$y(t) = u_c = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ В}$$

$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**Импульсной переходной** или **весовой функцией** цепи  $q(t)$  называется реакция цепи на действие единичной импульсной функции.

$$q(t) = \frac{d h(t)}{d t} = h'(t)$$

Т.е. импульсная переходная функция равна **производной от переходной функции** этой цепи (скорость изменения переходной функции). Размерность импульсной переходной функции совпадает с размерностью переходной функции, деленной на размерность времени.

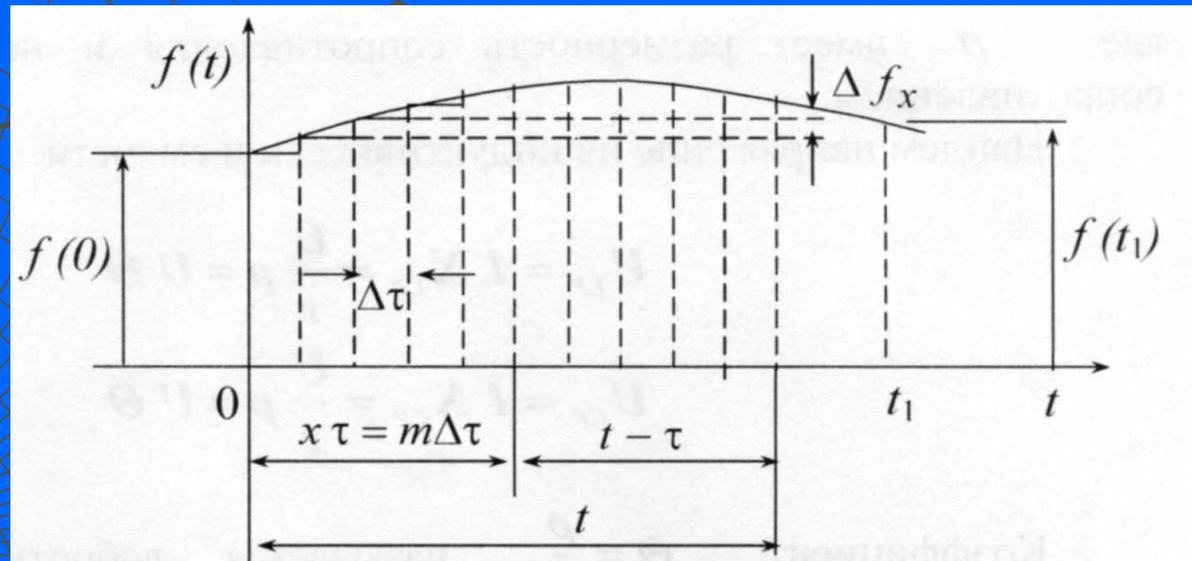
Используя переходные или импульсные характеристики цепи, можно определить напряжение (ток) переходного процесса при входном сигнале (напряжении или тока) любой формы.

## 4.4. Интеграл Дюамеля

**Первая и вторая формы интеграла Дюамеля.** Если в линейной электрической цепи, свободной от начальных запасов энергии, воздействует входной сигнал  $f(t)$ , изменяющийся во времени по произвольному закону, то выходной сигнал может быть найден с помощью суперпозиционного интеграла (интеграла Дюамеля). Получение этого интеграла основано на принципе наложения (суперпозиции).

Пусть на входе цепи действует сигнал (напряжение или ток) произвольной формы. Требуется определить реакцию цепи (ток или напряжение) в любой момент времени

$f(t)$  - входной сигнал;  
 $h(t)$  - переходная характеристика;  
 $y(t)$  - выходной сигнал



Отрезок  $[0, t]$  разобьем на  $n$  малых интервалов  $\Delta\tau=1/n$  и заданную непрерывную функцию  $f(t)$  заменим ступенчатой кривой, т.е. непрерывную функцию  $f(t)$  приближенно представляем в виде суммы ступенчатой функции  $f(0) \cdot I(t)$  и последовательности элементарных ступенчатых функций, каждая из которых вступает в действие в момент времени  $t=m \Delta\tau$ , где  $m=1, 2, \dots, n$ . Таким образом в момент времени  $\tau$  вступает в действие элементарная ступенчатая функция

$$\Delta f_k \cdot I(t-\tau)$$

При малых  $\tau$

$$\Delta f_k \approx f'(t) \cdot \Delta \tau = f'(\tau - \Delta \tau) \cdot \Delta \tau$$
$$t = \tau - \Delta \tau$$

На основании принципа наложения приближенное значение выходного сигнала  $y(t)$  (ток или напряжение) будет равно сумме выходных сигналов, создаваемых каждым из элементарных скачков входного сигнала

Составляющая выходного сигнала  $\Delta y(t)$  от ступенчатой функции  $\Delta f_k \cdot I(t-\tau)$  определится:  $\Delta y(t) = f(t) \cdot h(t)$ . Составляющая выходного сигнала  $\Delta y_m$  от элементарных ступенчатых функций

$$\Delta y_k = \Delta f_k \cdot h(t - \tau) \approx f'(\tau - \Delta \tau) \cdot h(t - \tau) \Delta \tau$$

$$\Delta y_0 + \sum_{k=1}^n \Delta y_k$$



$$y(t) \approx f(0) \cdot h(t) + \sum_{k=1}^n f'(\tau - \Delta \tau) \cdot h(t - \tau) \Delta \tau$$

Перейдя к пределу при  $\Delta \tau \rightarrow 0$  получим точное выражение выходного сигнала или первую форму интеграла Дюамеля

$$y(t) = f(0) \cdot h(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Если к интегралу Дюамеля применить интегрирование по частям получим вторую форму Интеграла Дюамеля

$$y(t) = f(0) \cdot h(t) + f(\tau) \cdot h(t - \tau) \Big|_0^t + \int_0^t f(\tau) \cdot h'(t - \tau) d\tau =$$
$$= f(0) \cdot h(t) + f(\tau) \cdot h(0) - f(0) \cdot h(t) + \int_0^t f(\tau) \cdot q(t - \tau) d\tau$$
$$y(t) = f(t) \cdot h(0) + \int_0^t f(\tau) \cdot q(t - \tau) d\tau$$

При вычислении выходной величины тока  $i(t)=y(t)$  определяют переходную функцию  $h(t)$  и, проводя вычисления получаем

$$i(t) = q(t) = u_1(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \\ + [u_2(t_1) - u_1(t_1)] h(t - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau - u_2(t_2) h(t - t_2)$$

Если произвести замену переменной в виде  $t - \tau = r'$ ,  $d\tau = d\tau'$ ,  $\tau = 0$ ,  $\tau' = t$ ,  $\tau = t$ ,  $\tau' = 0$ , получим другие формы интеграла Дюамеля

$$y(t) = f(0) \cdot h(t) + \int_0^t f'(t - \tau) \cdot q(\tau) dt$$

$$y(t) = f(t) \cdot h(0) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot q(\tau) dt$$

Таким образом при известных: входном сигнале  $f(t)$  и переходной характеристике  $h(t)$  (импульсной характеристике  $q(t)$ ) можно, используя интеграл Дюамеля, получить выходной сигнал

## 4.5. Анализ реакции цепи на произвольное воздействие с помощью интеграла Дюамеля

1. Определяем переходную функцию (характеристику)  $h(t)$ , испытывая ЭЦ единичным сигналом  $I(t)$ .
2. Определяем значение  $h(t-\tau)$  путем замены  $t$  на  $(t-\tau)$ .
3. Определяем  $x'(\tau)$  к первой форме интеграла Дюамеля.  
Определяем вначале  $x'(\tau)$ , а затем осуществляем замену  $t$  на  $\tau$ .
4. Подставляя найденные значения в нужную форму интеграла Дюамеля и произведем интегрирование находим выходной сигнал.

Классический метод расчета переходных процессов достаточно громоздкий и требует в общем случае многократного решения систем алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования по начальным условиям и для нахождения начальных значений функции и ее производных. Так как переходные процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то они могут быть проинтегрированы также операторным методом, что показал в 1862 году М. Ващенко-Захарченко.

Существенный вклад в развитие операторного метода, а также его практических приложений в последующем был сделан рядом ученых, среди которых видное место принадлежит советским ученым: В.С. Игнатовскому, А.М. Эфросу, А.М. Данилевскому, М.Ю. Юрьеву, М.И. Конторовичу, А.И. Лурье, К. А. Кругу и др.

При использовании операторного метода **действительные функции времени, называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями.**

## 4.6. Преобразование Лапласа

Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы **операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями**. В таком случае дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений.

Связь между оригиналом  $f(t)$  и его изображением  $F(p)$  устанавливается с помощью интеграла Лапласа:

где  $p = a + j\omega$  - комплексное число, аргумент функции изображения

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \cdot dt$$

$$F(p) = L[f(t)]$$

Таким образом, операторное изображение действительной функции времени является функцией комплексного числа  $p$ . Для того, чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция  $f(t)$  должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов

## 5.2. Переход от операторного изображения к оригиналу

Обратное функциональное преобразование, дающее возможность определить оригинал по его изображению. Такое преобразование, носящее название *обратного преобразования Лапласа*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt = f(t)$$

$$L^{-1}[F(p)] = f(t)$$

Краткая форма записи обратного преобразования Лапласа

## 5.3. Операторное изображение некоторых функций

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \cdot dt$$

1. Изображение постоянной величины  $A$

$$A \div \int_0^{\infty} A \cdot e^{-pt} dt = \left| -\frac{A}{p} \cdot e^{-pt} \right|_0^{\infty} \doteq \frac{A}{p}$$

2. . Изображение показательной функции

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \text{ то } e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p + \alpha}$$

3. Если

$$f(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \text{ то } 1 - e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$$

## 5. Изображение

$$e^{j\omega t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p - j\omega}$$

$$\cos \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

6.

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p - j\omega} = \frac{p + j\omega}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

7.

$$\sin(\omega t + \psi) \stackrel{\bullet}{=} \frac{p \cdot \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin(\omega t + \psi) = \cos \omega t \cdot \sin \psi + \sin \omega t \cdot \cos \psi \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \sin \psi + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cos \psi$$

8.

$$e^{-\delta t} \sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{\omega}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-\delta t} \cos \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$$

## 9. Изображение производной

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f'(t) dt = \left| f(t) e^{-pt} \right|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt = p \cdot F(p) - f(0)$$

т.е.  $f'(t) \stackrel{\bullet}{=} p \cdot F(p) - f(0)$

$$f^n \stackrel{\bullet}{=} p^n F(p)$$

## 10. Изображение интеграла

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt$$

Используя интеграл Лапласа, и интегрируя по частям, получаем

$$\Psi(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} \cdot dt = \left[ -\psi(t) \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \psi'(t) e^{-pt} \cdot dt$$

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}$$

Таким образом дифференцирование в области оригиналов заменяется умножением на  $p$  в области изображений. Интегрирование в области оригиналов заменяется делением на  $p$  в области изображений

**Необходимо иметь в виду:**

а) что изображение суммы функций равно сумме их изображений.

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n F_k(p)$$

б) при умножении функции на постоянную величину  $A$ , изображение функции должно быть умножено на эту постоянную, т.е.

$$A \cdot f(t) \doteq A \cdot F(p)$$