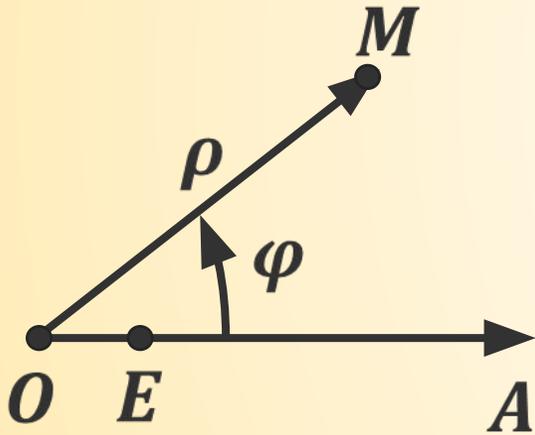


Лекція №10

Полярная система координат

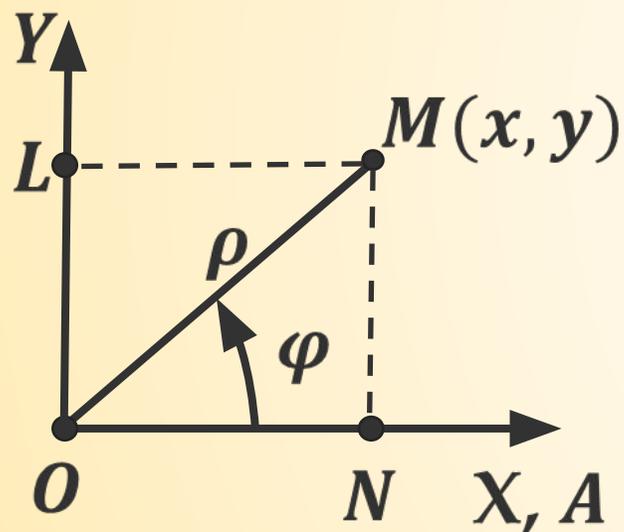
Возьмем на плоскости точку O и проходящую через нее ось OA . Назовем точку O – полюсом, а полуось OA – полярной осью.



Задание полюса O , полярной оси OA и единичного (масштабного) отрезка OE определяет на плоскости полярную систему координат

▪ Полярным радиусом ρ любой точки M плоскости называется ее расстояние от полюса O , т.е. длина $|\overrightarrow{OM}|$. Полярным углом φ точки M называется угол наклона вектора \overrightarrow{OM} к полярной оси OA . Угол φ определяется с учетом знака, положительное направление против часовой стрелки ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Угол ρ и φ называются полярными координатами точки M (обозначаем $M(\rho, \varphi)$).

Рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат XOY и полярную систему координат, у которой полюс совпадает с началом координат O , а полярная ось совпадает с положительным направлением оси OX .



Пусть M произвольная точка с координатами $M(x, y)$ в декартовой системе координат.

$$\text{Тогда } \cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1)$$

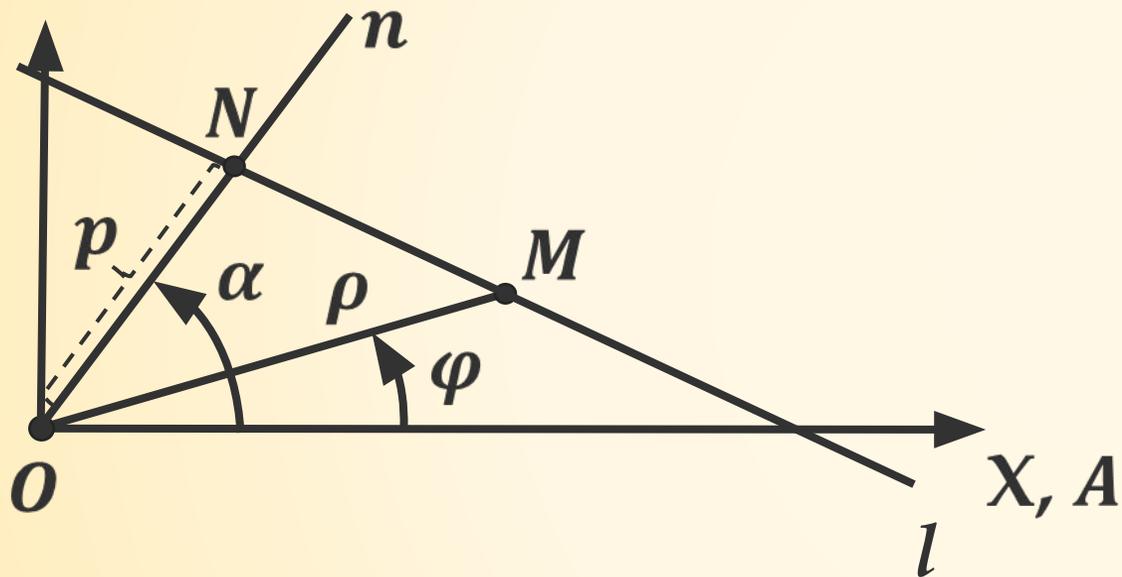
▪ Формулы (1) выражают декартовы координаты точки M , через полярные координаты.

С другой стороны.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Нормальное уравнение прямой

Выведем уравнение произвольной прямой l в полярных координатах.



$M(\rho, \varphi)$ – произвольная точка
прямой l

$$\rho r_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{ON}| = p$$

$$p = \rho \cos(\alpha - \varphi) = \rho \cos(\varphi - \alpha) \quad (2)$$

ИЛИ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) называется нормальным уравнением прямой в декартовой системе координат.

Переход от общего уравнения прямой к нормальному

$$Ax + By + C = 0$$

Необходимо домножить уравнение на множитель:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad (4)$$

Знак в формуле (4) перед корнем должен быть противоположен знаку C .

Множитель λ называется нормирующим множителем.

Пример. Записать нормальное уравнение прямой:

$$3x + 6y + 2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть задано уравнение прямой l в нормальном виде:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

и точка $M_0(x_0, y_0)$ лежащая вне прямой. Требуется определить расстояние d от точки M до этой прямой

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$$

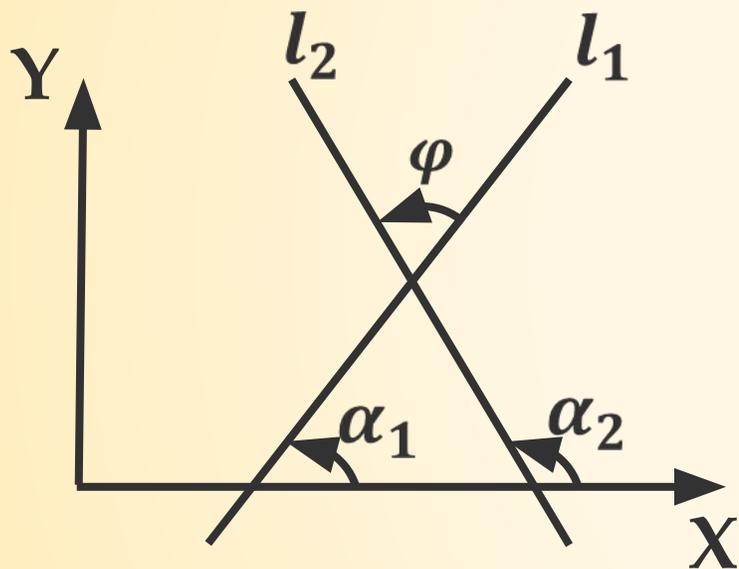
Если уравнение прямой задано в общем виде $Ax + By + C = 0$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример. Найти расстояние от точек $A(4;3)$, $B(2;1)$, $C(1;0)$ до прямой
 $3x - 4y - 10 = 0$

Угол между прямыми

- Рассмотрим две непараллельные прямые l_1 и l_2 .
Пусть уравнение $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$



$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \quad (5)$$

Формула (5) служит для определения угла между двумя неперпендикулярными прямыми.

- Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и наоборот:

$$k_2 = k_1 \quad (6)$$

Равенство (6) является условием параллельности двух прямых.

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (7)$$

Равенство (7) является условием перпендикулярности прямых.

Пример. Задан треугольник ABC вершинами $A(6;4)$, $B(-9;4)$, $C(-9;-16)$. Найти уравнение высоты AD.

Уравнения пучка прямых

- Возьмем на плоскости точку $M_0(x_0, y_0)$. Совокупность всех прямых плоскости, проходящих через данную точку, называют пучком прямых. Точка M_0 называется центром пучка. Если заданы уравнения двух прямые l_1 и l_2 , проходящих через точку M_0 : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тогда уравнение $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, где λ произвольное число, называется уравнением пучка прямых, заданного образующими.

▪ Уравнение пучка прямых можно задать и в другом виде. Всякую не вертикальную прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ можно записать в виде:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k – параметр.

Пример 1. Показать, что прямые $2x - 3y = 6$ и $4x - 6y = 25$ параллельны и найти расстояние между ними.

Пример 2. Написать уравнение прямой проходящей через точку M пересечения прямых $2x + y + 6 = 0$ и $3x + 5y - 15 = 0$ и через точку $N(1; -2)$ (не находя координаты т. M).