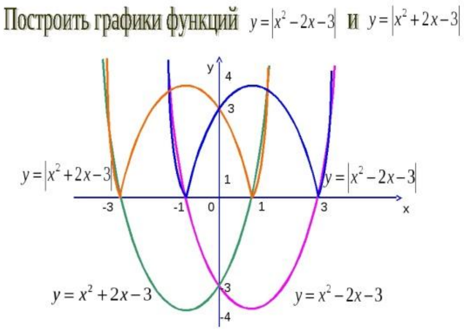
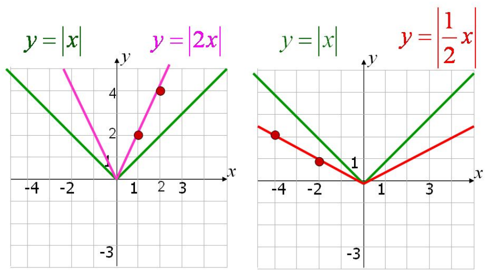
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж





Тема урока:

Функция, ее область определения и множество значений. График функции

Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математики

Цель урока:

- Научиться вычислять частное значение функции, находить ее область определения и множество значений, строить график функции.
- Содействовать развитию математического мышления обучающихся.
- Побуждать студентов к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности.
- Развивать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

Знания и навыки студентов:

- знать понятие функции, правила нахождения области определения функции;
- уметь находить частное значение функции, ее область определения и множество значений, строить графики функций.

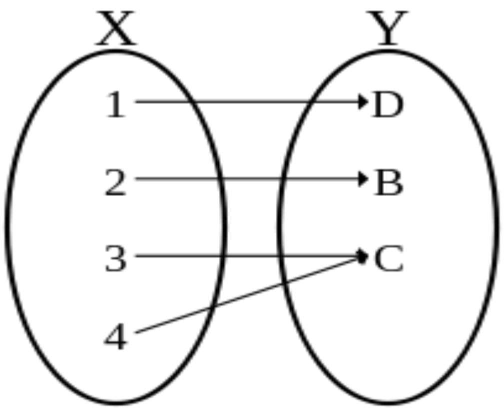
- При исследовании явлений окружающего мира и в практической деятельности нам приходится рассматривать величины различной природы: длину, площадь, объем, массу, температуру, время и другие. В зависимости от рассматриваемых условий одни из величин имеют постоянные числовые значения, у других эти значения переменные. Такие величины соответственно называются постоянными и переменными.
- Математика изучает зависимость между переменными в процессе их изменения. Например, при изменении радиуса круга меняется и его площадь, и мы рассматриваем вопрос об изменении площади круга в зависимости от изменения его радиуса.
- Математическим выражением взаимной связи реальных величин является идея функциональной зависимости.
- **Понятие функции - важнейшее понятие математики**

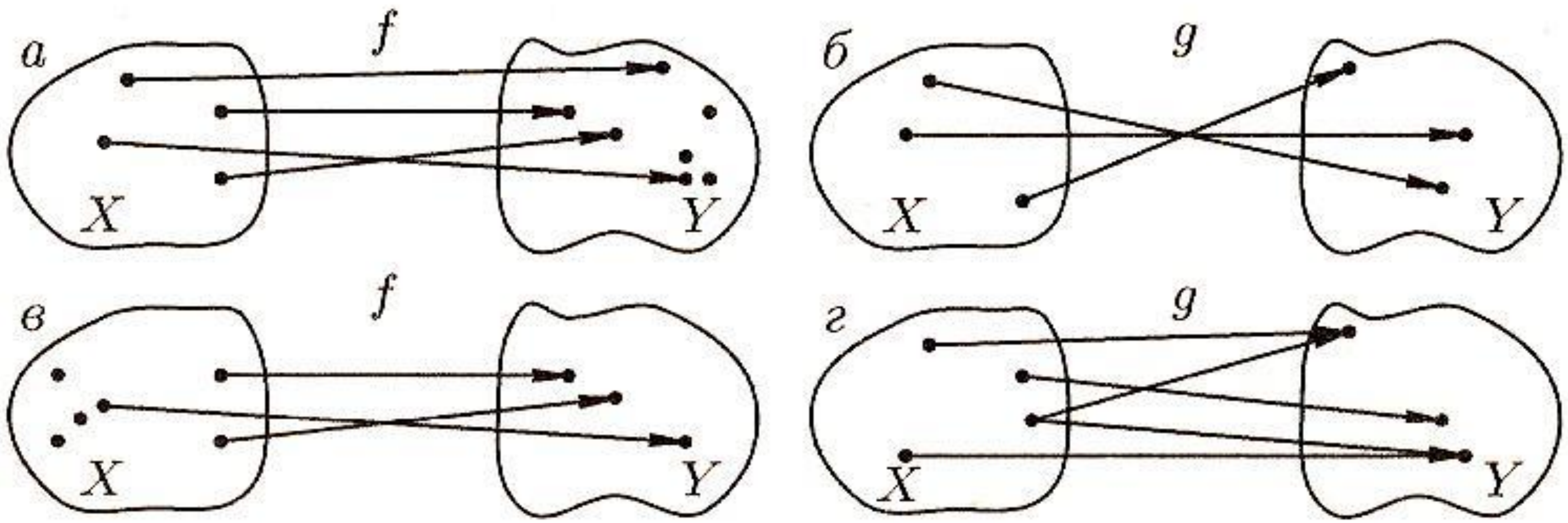
1. Понятие функции

- Слово “функция” (от латинского **function** – исполнение, осуществление) в математике впервые употреблено немецким математиком В.Г. Лейбницем.
- Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$ называется ***функцией*** и записывается

$$y = f(x), \quad x \in X \quad \text{или} \quad f : X \to Y.$$

- Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.





- Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 1 *а* и *б*, являются функциями, а на рисунке 1 *в* и *г* – нет, т.к. в случае *в* – не каждому элементу x соответствует элемент y, а в случае *г* – не соблюдается условие однозначности.
- Множество X – область определения функции f – $D(f)$, множество Y – множество значений функции f – $E(f)$.

2. Числовая функция, её частное значение

- Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют ***числовой функцией*** $y = f(x)$.
- ***Числовой функцией*** с областью определения ***D*** называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.
- Переменная ***x*** называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, а ***y – зависимой переменной*** (от x) или ***функцией.***
- Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости* и пишут .

$$y = y(x)$$

- ***Частное значение функции*** $y = f(x)$ при заданном частном значении аргумента $x = a$ ***обозначают*** $f(a)$ или $y|_{x=a}$.
- ***Пример 1.*** Найти значение функции $f(x) = 2x^2 - 1$ при x =3.
- *Решение.* $f(3) = y|_{x=3} = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17.$
- ***Пример 2.*** Дано $F(x) = 3x^2.$

  Найти $F(5), F(0,5), F(a).$

3. Область определения и множество значений функции

- ***Область определения функции*** – совокупность всех действительных значений аргумента x, при которых функция определена и выражается действительным числом. Обозначается: $D(f)=X$.
- Множество чисел $y = f(x)$ объединяют в множество Y и называют ***множеством значений функции***, т.е. $E(f) = Y$.

Примеры.
Найти область определения функций

1. $y = x^2.\quad D(y) = R$ или $D(y) = (-\infty; +\infty).$

Областью определения целой рациональной функции является множество всех действительных чисел.

2. $y = x^5 + 3x^2 - 10.\quad D(y) = (-\infty; +\infty)$

При отыскании области определения дробной функции нужно исключить значения аргумента, при которых знаменатель обращается в нуль

3. $y = \dfrac{1}{x}.$

Решение.

Знаменатель обращается в нуль при $x = 0$.

$\Rightarrow D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$

Решить самостоятельно:

4. $y = \dfrac{2}{1-x}$; 5. $y = \dfrac{3}{x-4}$; 6. $y = \dfrac{1}{2x-5}$.

7. $y = \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

Решение.

Знаменатель обращается в нуль при $x = \pm 2$.

$\Rightarrow D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

8. $y = \dfrac{2}{1 - x^2}$; 9. $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

При отыскании области определения функции, содержащей корень четной степени, нужно исключить значения аргумента, при которых подкоренное выражение принимает отрицательные значения.

$$10.\quad y=\sqrt{x-1}.$$

Решение.

$$x-1\ge 0\quad\Rightarrow\quad x\ge 1.$$

$$\Rightarrow D(y)=[1;\,\infty).$$

Решить самостоятельно:

$$11.\quad y=\sqrt{2x-4};\quad 12.\quad y=\sqrt{x^2-1}.$$

При отыскании области определения логарифмической функции нужно исключить значения аргумента, при которых подлогарифмическое выражение принимает отрицательные значения и равно нулю.

$$13. \quad y = \lg(x-2).$$

Решение.

$$x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2.$$

$$\Rightarrow D(y) = (2; \infty)$$

Решить самостоятельно:

$$14. \quad y = \lg(2x-3); \quad 15. \quad y = \log_3(x^2-9).$$

4. Способы задания функции

- Функция считается ***заданной*** , если известна область определения функции и указано правило, по которому для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции.
- Существуют следующие способы задания функции:

1. ***Аналитический*** – зависимость между аргументом x и функцией y задается в виде математической формулы или уравнения. Например, . $y = \dfrac{2x^3 - 5}{x+1}$

Наиболее совершенный способ в математике, единственный недостаток – отсутствие наглядности.

Например:

- Формулой $S(r) = \pi r^2$ задается функция зависимости площади круга от радиуса.
- Функция ºF (ºC) определяет перевод температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта: $°F = \frac{9}{5}°C + 32.$
- Если деньги положены в банк под *p* процентов годовых, а сумма, положенная в банк изначально, равна S_0, то через n лет в банке будет $S(n) = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ – функция от количества лет, на которые положены средства. Эта формула сложных процентов.
- При равномерном движении скорость тела является функцией времени: $s(t) = v \cdot t$.
- Функция $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ задает гармонические колебания. Здесь A – амплитуда колебаний, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.
- Функция $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ называется формулой радиоактивного распада.

2. ***Табличный -*** значения аргумента и соответствующие им значения функции записаны в виде таблицы. Используется на практике для записи результатов наблюдений и измерений.

Так, значения квадратов, кубов, логарифмов чисел, тригонометрических функций и т.д. находят с помощью математических таблиц.

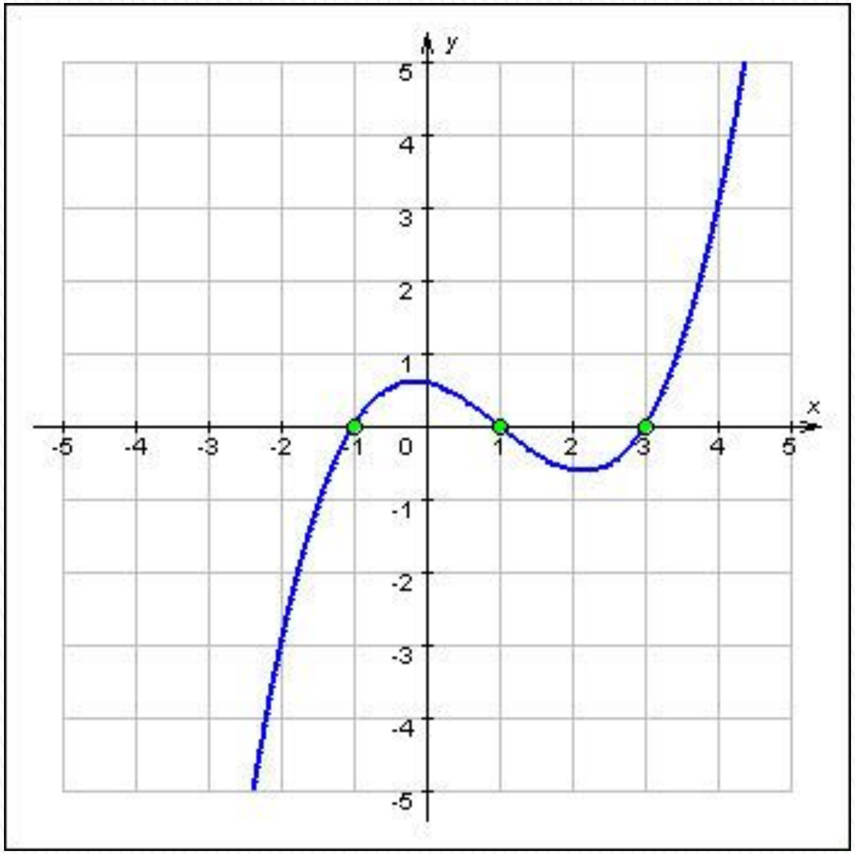
Например, изменение температуры тела больного в зависимости от времени приведены в таблице:

Температура, °С	**36,5**	**36,8**	**37,5**	**38,2**
Время суток, час	10	12	14	16

3. Графический - задается график функции.

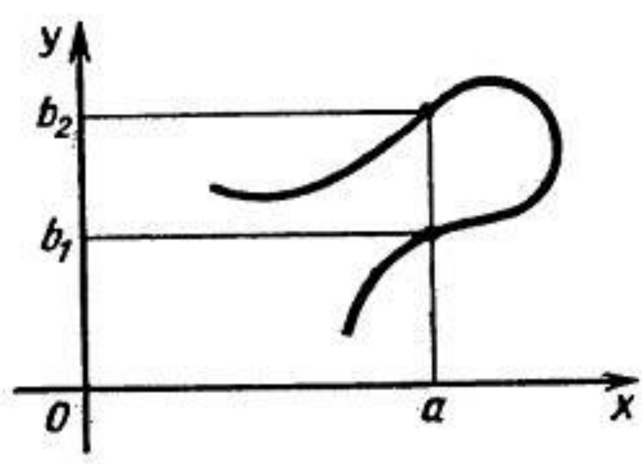
Графиком функции $y = f(x)$ *называется множество всех точек координатной плоскости* $M(x; f(x))$.

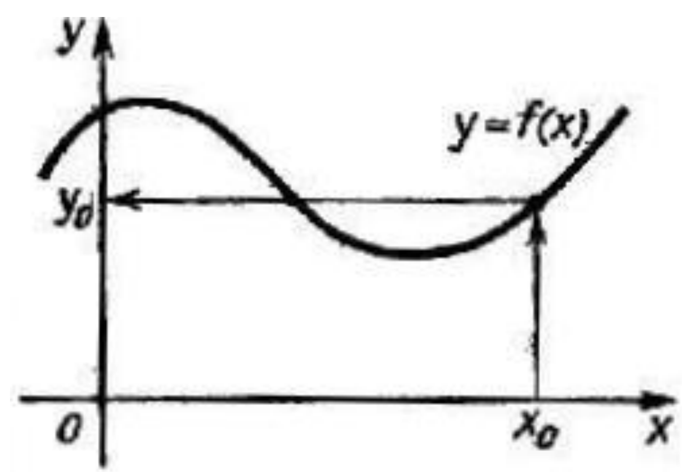
Значения функции *y*, соответствующие значениям аргумента *x*, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком - неточность.



Обратить внимание

- Подмножество координатной плоскости является графиком какой-либо функции, если оно **имеет не более одной** общей точки с любой прямой, параллельной оси OY. Например, множество, изображенное на рисунке слева не является графиком функции, так как оно содержит две точки с одной и той же абсциссой *a*, но разными ординатами b_1 и b_2.
- Графический способ задания зачастую удобен по сравнению с аналитическим, так как по графику сразу видно что из себя представляет функция и можно проанализировать ее поведение.





- ***4. Словесный способ*** **–** состоит в том, что функциональная зависимость выражается словами.
- *Пример 1:* функция ***E*(*x*)** — **целая часть числа *x***, т.е.

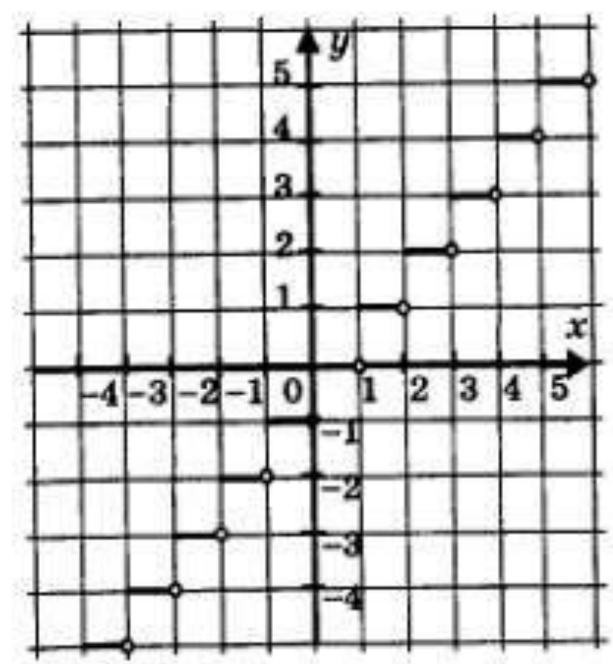
E*(*x*) = [*x*]** - наибольшее из целых чисел, которое не превышает ***x. Иными словами, если ***x* = *r* + *q***, где ***r*** — целое число и ***q*** принадлежит интервалу [0; 1), то **[*x*]** = ***r***. Функция ***E*(*x*) = [*x*]** постоянна на промежутке [***r***; ***r***+1) и на нем **[*x*]** = ***r***.

- Например, [2,534] = 2,

[47] = 47,

[-0,(23)] = -1.

Очень своеобразно выглядит график функции у = [х]



- *Пример 2:* функция $\boldsymbol{y = \{x\}}$ — **дробная часть числа**, т.е.

  $\boldsymbol{y = \{x\} = x - [x]}$, где $\boldsymbol{[x]}$ — целая часть числа $\boldsymbol{x}$.

  Или $\{x\} = \boldsymbol{r + q - r = q}$
- Основными недостатками словесного способа задания функции являются невозможность вычисления значений функции при произвольном значении аргумента и отсутствие наглядности.
- Главное преимущество же заключается в возможности задания тех функций, которые не удается выразить аналитически.

Задание.

- 1. Указать область определения и область значений таблично заданной функции:

x	-2	-1	0	1	2
y	9	2	0	2	9

- 2. Построить график функции

$$y = \begin{cases} -2 \quad \text{при} \quad -3 \le x \le 0, \\ x \quad \text{при} \quad 0 < x \le 2 \\ 3 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

- Вычислить f(-2), f(0,1), f(-3/4), f(3).

Задание .

- 3. Сопоставить каждому графику функции формулу, с помощью которой эта функция задается

1) $y = \frac{3}{x}$
2) $y = -x^3$
3) $y = -x + 2$
4) $y = 2x + 3$
5) $y = -\frac{2}{x}$
6) $y = x^3$
7) $y = 0{,}8x$
8) $y = \sqrt{x}$
9) $y = -x - 3$
10) $y = -x^2$
11) $y = -2x$
12) $y = 5$