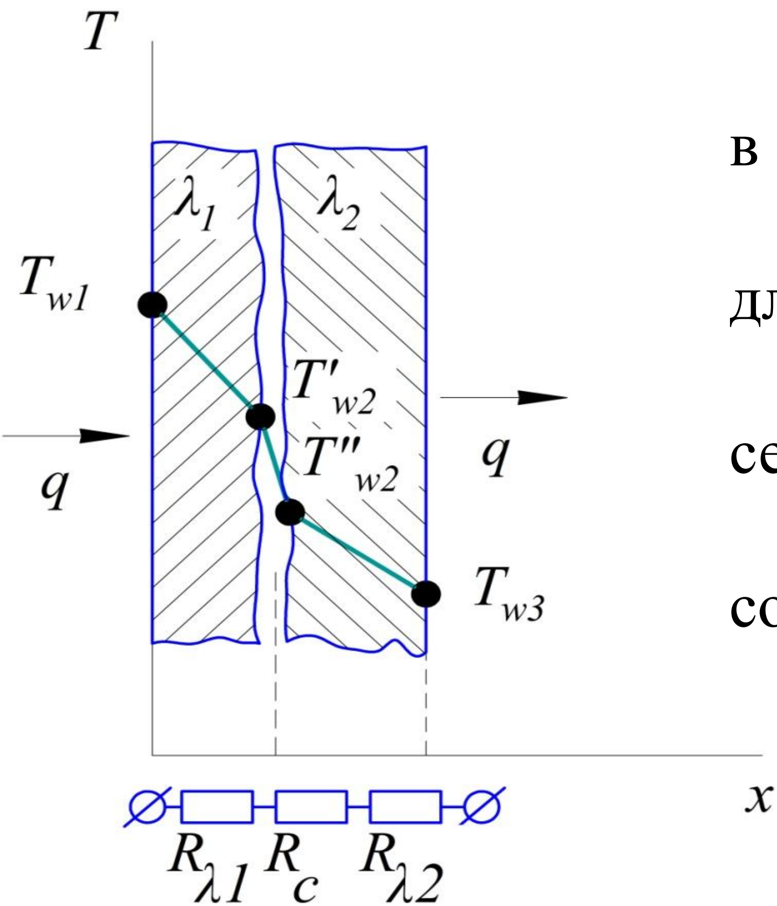
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Электротепловая аналогия

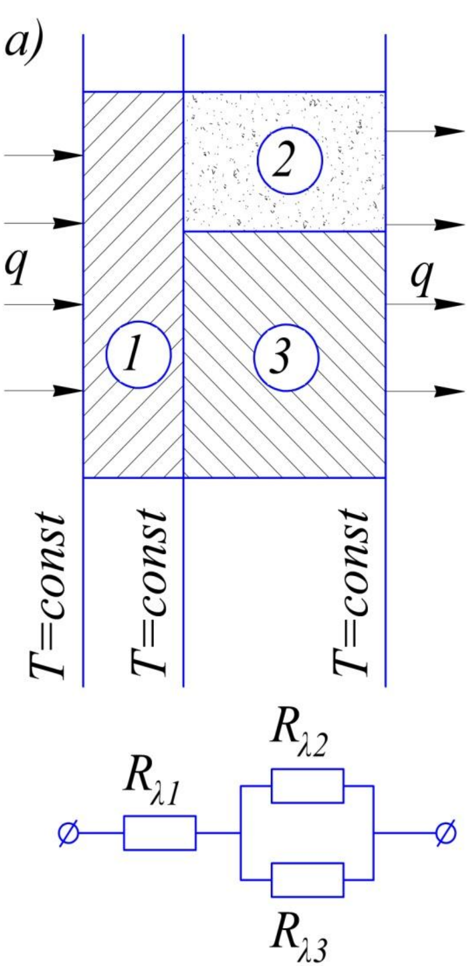
контактное термическое сопротивление Rt_k

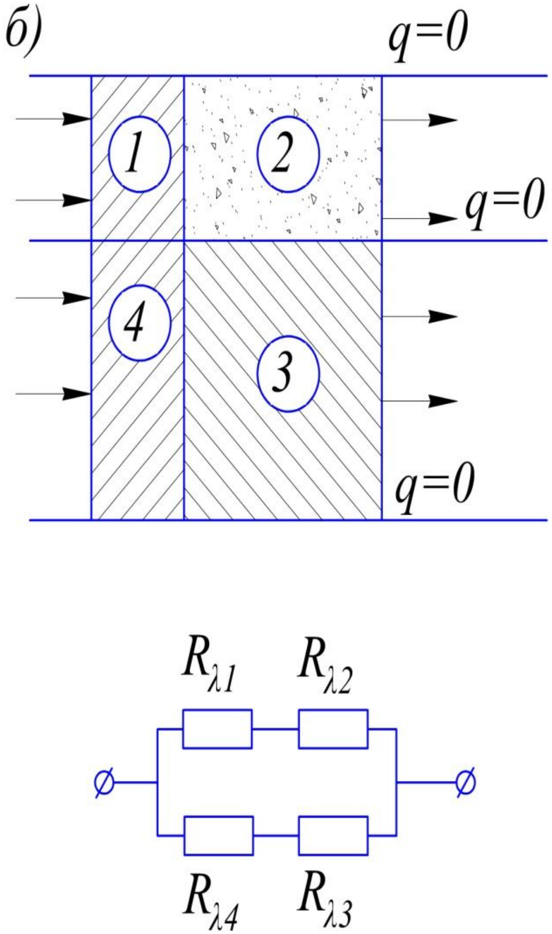


$$\Delta T_{tc} = T'_{w2} - T''_{w2}$$

в стационарной задаче теплопроводности для пластины в любом поперечном сечении q = idem, контактное термическое сопротивление

$$R_{tc} = \frac{\Delta T_{tc}}{q} = \frac{T'_{w2} - T''_{w2}}{q}.$$





λ=0,01...400 Вт/(м·К)

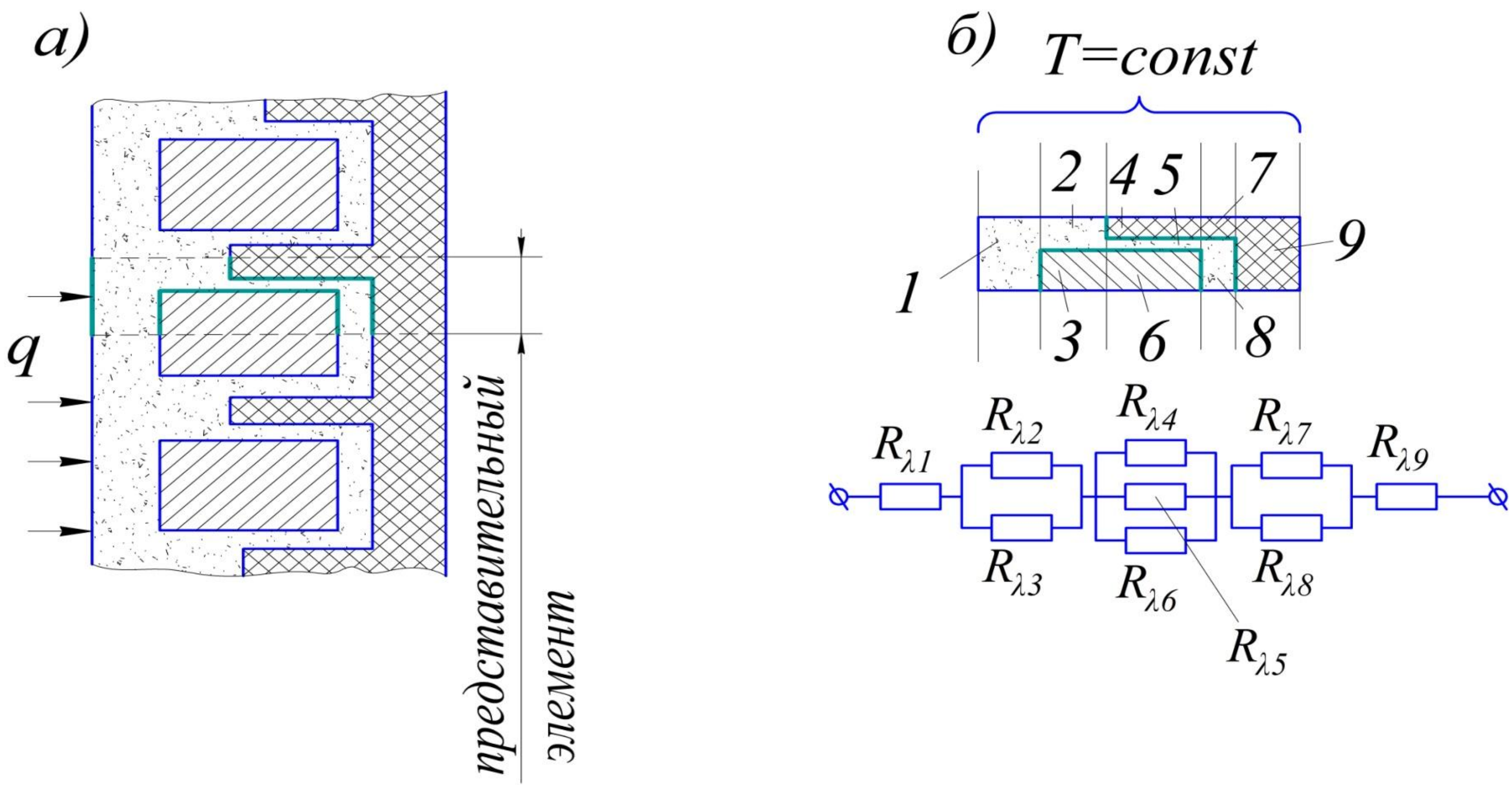
$$R_{\lambda\Sigma}\Big|_{T=const} = R_{\lambda 1} + \frac{1}{\dfrac{1}{R_{\lambda 2}} + \dfrac{1}{R_{\lambda 3}}};$$

$$R_{\lambda\Sigma}\Big|_{q=const} = \left(\frac{1}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2}} + \frac{1}{R_{\lambda 3} + R_{\lambda 4}}\right)^{-1}.$$

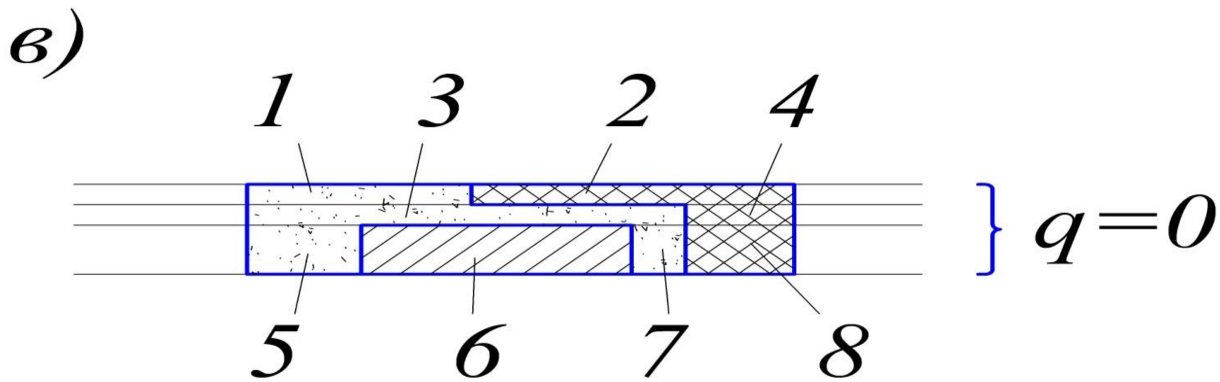
Расчет составных тел

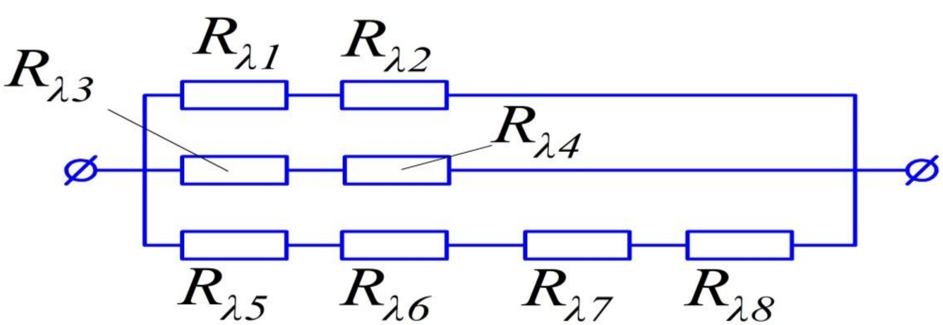
Если составное тело рассматривать как единое целое, следует ввести **эквивалентную** теплопроводность λ_e

$$\frac{\Delta T}{q} = \frac{\delta_\Sigma}{\lambda_e} = R_{\lambda\Sigma}$$



Расчет составных тел





$$R_{\lambda\Sigma}\Big|_{q=const}=\left[\frac{1}{R_{\lambda1}+R_{\lambda2}}+\frac{1}{R_{\lambda3}+R_{\lambda4}}+\left(\frac{1}{R_{\lambda5}+R_{\lambda6}+R_{\lambda7}+R_{\lambda8}}\right)\right]^{-1}.$$

Расчет составных тел

термическое сопротивление тела $R^* = \frac{\Delta \mathrm{T}}{Q}$, $\frac{\mathrm{К}}{\mathrm{Вт}}$,

Удельная величина термического сопротивления

$$R^* = \frac{\Delta \mathrm{T}}{Q/l}, \quad (\mathrm{К} \cdot \mathrm{м})/\mathrm{Вт}.$$

При соблюдении граничных условий III рода (теплопередача при разности температур жидкостей

$$T_{f1} - T_{f2} = \Delta T_\alpha$$

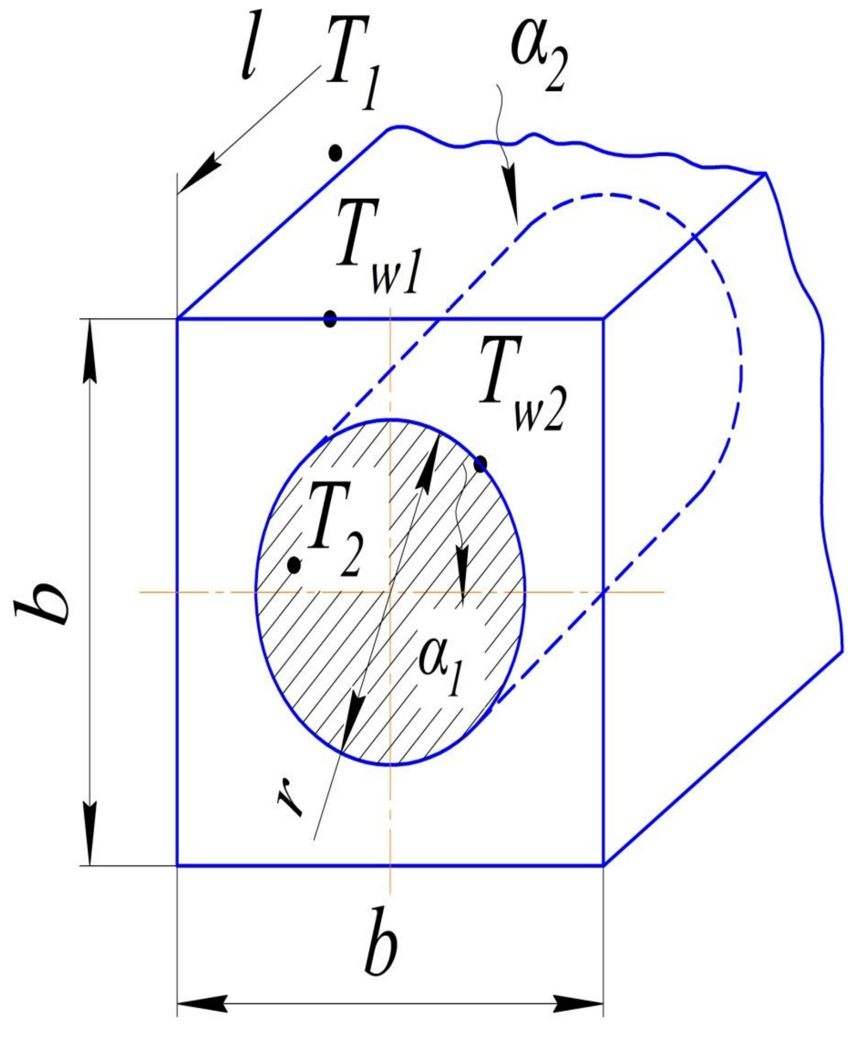
$$R^*_\Sigma = \frac{\Delta T_\alpha}{Q}, \quad \mathrm{К}/\mathrm{Вт}.$$

Поскольку

$$\Delta T_\alpha = T_{f1} - T_{f2} > \Delta \mathrm{T} = T_{w1} - T_{w2}$$

$$R^*_\Sigma > R^*$$

Расчет составных тел

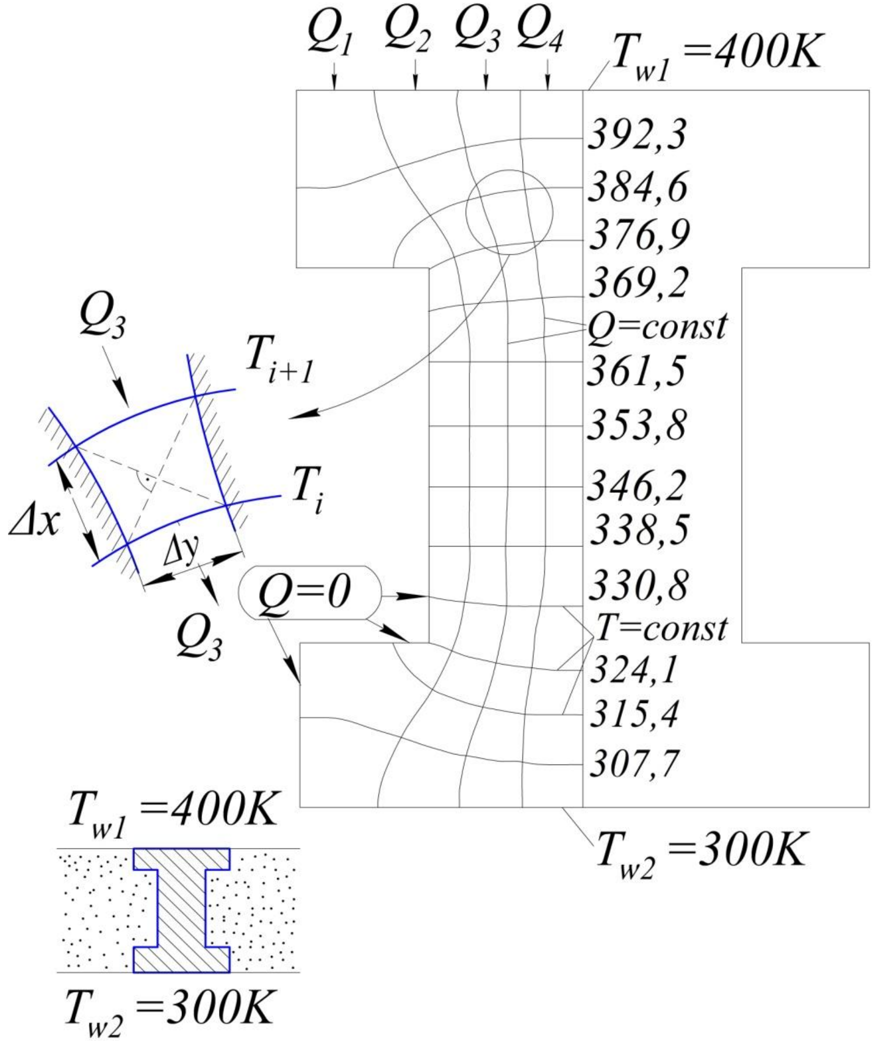


$$R^* = \frac{\ln(0{,}54b/r)}{2\pi/\lambda}$$

$$R_\Sigma^* = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{\ln(0{,}54b/r)}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1 r} + \frac{1}{2\alpha_2 b} \right].$$

Графический метод



Решение задачи разделяют на три этапа:

1. Вычерчивают, соблюдая масштаб, сечение расчетной области.

2. Наносят линии $T = const$ и $q = const$, добиваясь, чтобы диагонали косоугольных четырехугольников делили одна другую пополам и были взаимно перпендикулярны.

Графический метод

Тепловой поток разделим на составляющие Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4,

$$Q_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

Для каждой ячейки уравнение Фурье

$$q_i = \frac{Q_i}{\Delta y} = \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Если теперь между изотермами на чертеже М промежутков

$$T_{i+1} - T_i = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{M}; \quad Q_i = \frac{\lambda (T_{w1} - T_{w2})}{M}; \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\lambda}{M}(T_{w1} - T_{w2}).$$

Графический метод

Условие $\Delta x = \Delta y$ одно из очень важных $Q_\Sigma = NQ_i$

$$Q_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} Q_i = NQ_i = N\frac{\lambda(T_{w1} - T_{w2})}{M} = \frac{4}{13}\frac{\lambda}{M}(T_{w1} - T_{w2}).$$

Отношение *N/M* = *S* называют **формфактором теплопроводности**;

$$Q_\Sigma = \lambda S(T_{w1} - T_{w2}) = \lambda S \Delta T,$$

$$[S] = \frac{Q_\Sigma}{\lambda \Delta T} = \frac{[\text{Вт}]\cdot[\text{м}]\cdot[\text{К}]}{[\text{Вт}]\cdot[\text{К}]} = [\text{м}].$$

Графический метод

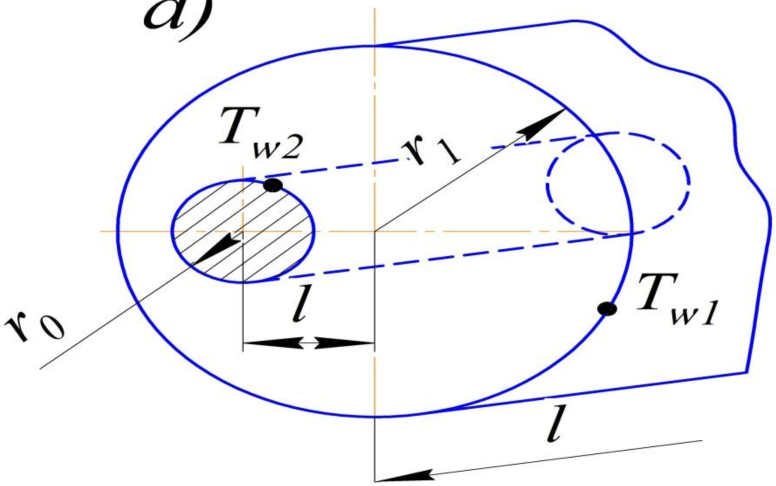
для пластины размерами h x b x d $S = hb/\delta$

для полого цилиндра D x d x h $S = \dfrac{2\pi p}{\ln(d/D)}$

формфактор S связан с термическим сопротивлением тела R* зависимостью

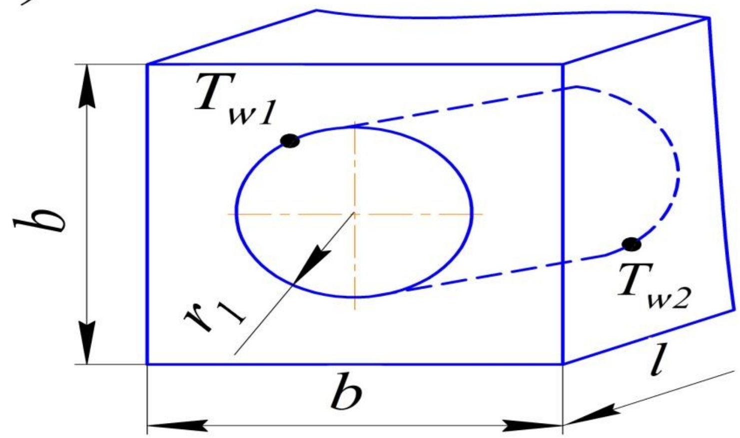
$$R = 1/\lambda S$$

а)



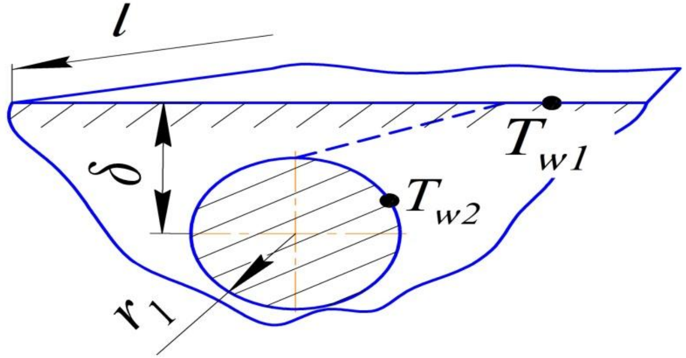
$$S=\frac{2\pi l}{arch\left(\frac{r_0^{\,2}+r_1^{\,2}-t^{\,2}}{2r_0 r_1}\right)}$$

б)



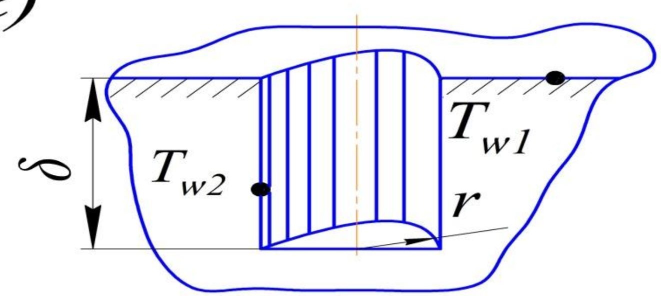
$$S=\frac{2\pi l}{ln\left(\frac{0,54b}{r_1}\right)}$$

в)



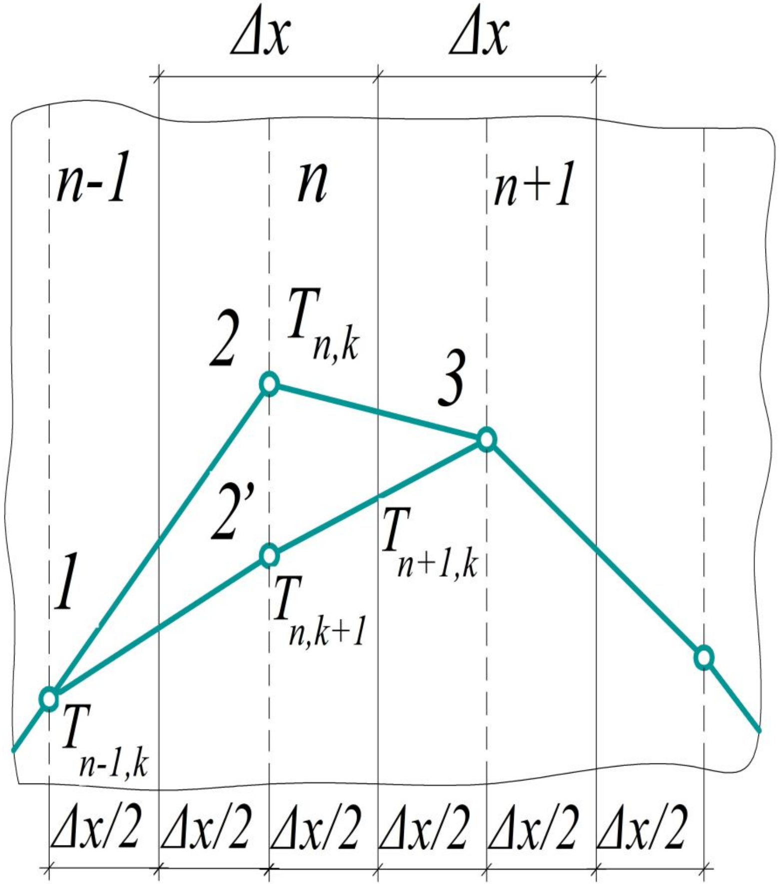
$$S=\frac{2\pi l}{arc\delta\left(\frac{\delta}{r_1}\right)}$$

г)



$$S=\frac{2\pi\delta}{ln\frac{28}{r}}$$

Метод конечных разностей



Заменим дифференциальное уравнение Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

конечно – разностным приближением

$$\frac{\Delta T}{\Delta \tau} = a\frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2}.$$

для некоторого момента $\tau = k\Delta\tau$

аналог частной производной $\frac{\Delta T}{\Delta \tau}$ имеет два значения

“левое” $\left(\frac{\Delta T}{\Delta \tau}\right)_-$

“правое” $\left(\frac{\Delta T}{\Delta \tau}\right)_+$

Метод конечных разностей

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_- = \frac{T_{n,k} - T_{n-1,k}}{\Delta x}; \qquad \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_+ = \frac{T_{n+1,k} - T_{n,k}}{\Delta x}.$$

Аналог второй частной производной

$$\frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_- + \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_+\right] = \frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{n+1,k} + T_{n-1,k} - 2T_{n,k}\right)$$

Аналог производной $\frac{\Delta T}{\Delta \tau}$

$$\frac{\Delta T}{\Delta \tau} = \frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{\Delta \tau}.$$

Метод конечных разностей

С учетом подстановок перепишем уравнение Фурье

$$\frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{\Delta\tau} = a\frac{T_{n+1,k} + T_{n-1,k} - 2T_{n,k}}{\Delta x};$$

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(\frac{T_{n+1,k} + T_{n-1,k}}{2} - T_{n,k}\right)$$

Δx и $\Delta\tau$ задали произвольно, выберем его так, чтобы

$$\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad T_{n,k+1} = \frac{1}{2}\left(T_{n+1,k} + T_{n-1,k}\right),$$

т. е. температура в *n*-м слое в момент $(k+1)\Delta\tau$ равна полусумме температур в двух соседних слоях в момент $k\Delta\tau$

Метод конечных разностей

$\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} = Fo$ условие $\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} = 1 \Rightarrow$ Fo=0,5

для решения задачи методом Шмидта необходимо:

-разбить сечение на *n* слоев толщиной Δx каждый;

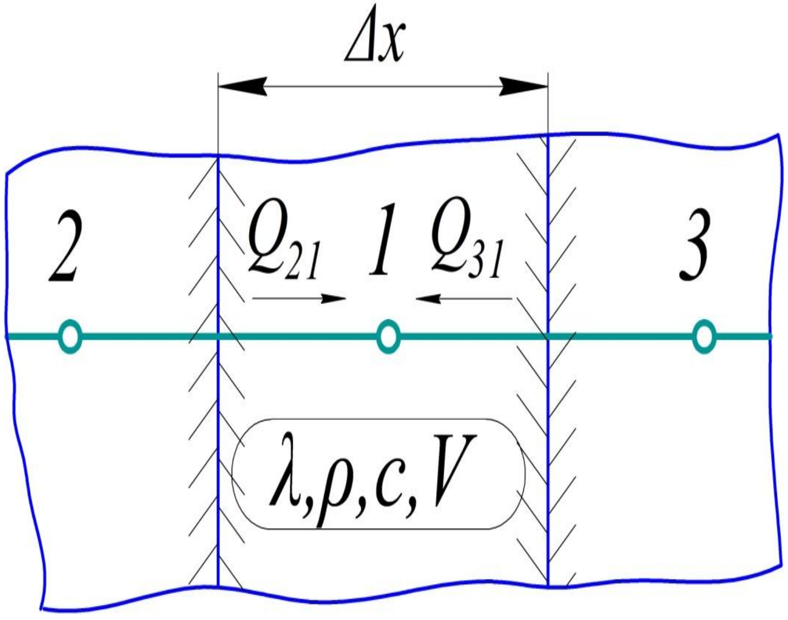
-выбрать интервал времени $\Delta\tau$, удовлетворяющий условию Fo=0,5;

-задать начальное распределение температур 1-2-3-...;

-последовательно определить температуры в моменты $\Delta\tau$

$2\Delta\tau$ $k\Delta\tau$ используя итоговое соотношение

Метод элементарных балансов



три постулата

•Изменение температуры между расчетными точками (узлами) происходит по линейному закону и определяется термическим сопротивлением тепловых связей.

•Изменение температуры во времени происходит скачками.

•Увеличение энтальпии элементарного объема, прилегающего к данному узлу, пропорционально приращению температуры в этом узле.

Метод элементарных балансов

расчеты ведем для пластины единичной площади

$$V = \Delta x \cdot \Delta x \cdot 1 = (\Delta x^2).$$

Теплота, переданная слою по связи 2-1, постулата 1

$$Q_{21} = \frac{\lambda}{\Delta x}(T_2 - T_1)\Delta x \Delta \tau;$$

а переданная по связи 3-1

$$Q_{31} = \frac{\lambda}{\Delta x}(T_3 - T_1)\Delta x \Delta \tau;$$

в силу постулата 3 температура узла 1

$$c\rho V(T_1' - T_1)\Delta \tau = Q_{21} + Q_{31} = \frac{\lambda \Delta x}{\Delta x}\Delta \tau (T_2 - T_3 - 2T_1),$$

Метод элементарных балансов

$$T_1' = \frac{\lambda\Delta\tau}{c\rho V}\left(T_2 + T_3 - 2T_1 + \frac{T_1}{\frac{\lambda\Delta\tau}{c\rho V}}\right).$$

Если учесть

$$\frac{\lambda}{c\rho V} = a$$

$$V = (\Delta x)^2$$

$$\frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} = Fo$$

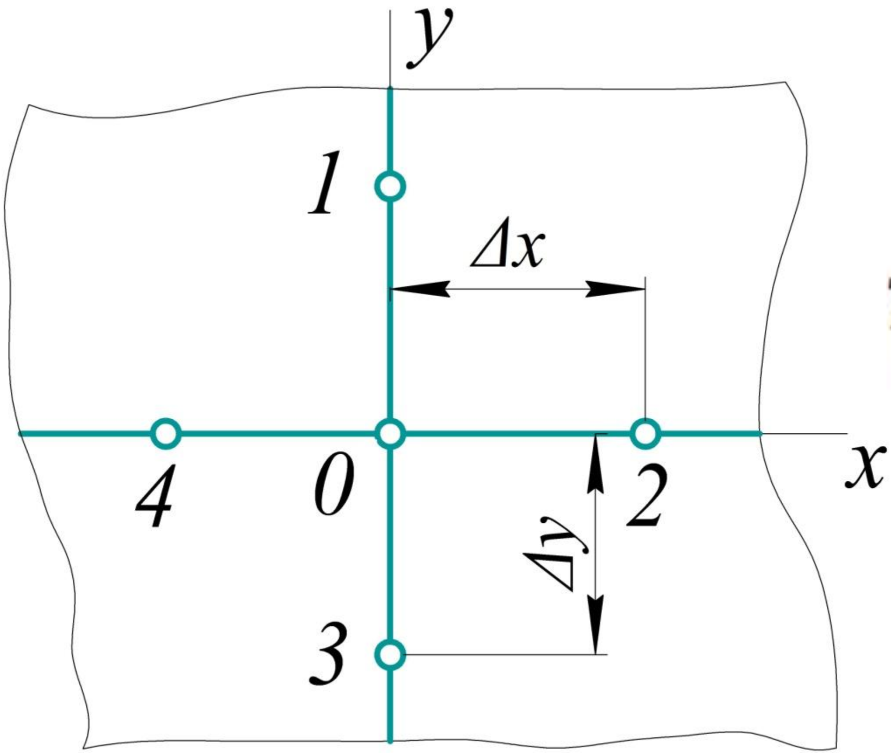
$$T_1' = Fo\left[T_2 + T_3 + T_1\left(\frac{1}{Fo} - 2\right)\right]$$

Fo = 0,5 $\Rightarrow$ $T_1' = \frac{T_2 + T_3}{2}.$

при $Fo = 1/3$ $\quad T_1' = \frac{1}{3}(T_2 + T_3 + T_1),$

при $Fo = 1/4$ $\quad T_1' = \frac{1}{4}(T_2 + T_3 + 2T_1),$

Метод элементарных балансов



$$\Delta x = \Delta y = \delta \qquad Fo = \frac{a\Delta\tau}{\delta^2}$$

$$T_1' = Fo\left[T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_0\left(\frac{1}{Fo} - 2\right)\right],$$

при Fo = 1/4

$$T_1' = \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4).$$

оба метода дают правильные результаты лишь при *Fo* < 1/2 для одномерной задачи и при *Fo* < 1/4 — для двумерной. При больших значениях *Fo* явные методы дают физически необъяснимые решения

Неявные схемы

Запишем балансовое уравнение для момента $\tau + \Delta\tau$

$$c\rho V(T_1' - T_1)\Delta\tau = Q_{21} + Q_{31} = \lambda\Delta\tau[(T_2' - T_1') + (T_3' - T_1')],$$

после преобразований получим

$$(1 - Fo)T_1' - Fo(T_2' - T_3') - T_1 = 0$$