Курс: Программные продукты в математическом моделировании.

Приближенное решение нелинейных уравнений

Постановка задачи

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0,$$

где функция **f(x)** **определена и непрерывна** в некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Всякое значение **v**, обращающее функцию **f(x)** в нуль, т.е. такое, что **f(v)=0**, называется **корнем** уравнения или нулем функции **f(x)**.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на ***прямые*** и ***итерационные***.

Прямые методы позволяют записать корни в виде конечного соотношения (формулы). Однако, только для простейших уравнений удаётся найти решение в аналитическом виде, т. е. записать формулу, выражающую искомую величину x в явном виде через параметры уравнения.

В большинстве случаев уравнения приходится решать, используя ***итерационные методы***

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения искомой величины $\boldsymbol{x}$. Каждый шаг называется ***итерацией***. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$.

Если эти значения с ростом $\boldsymbol{n}$ приближаются к истинному значению корня, то говорят, что ***итерационный процесс*** сходится.

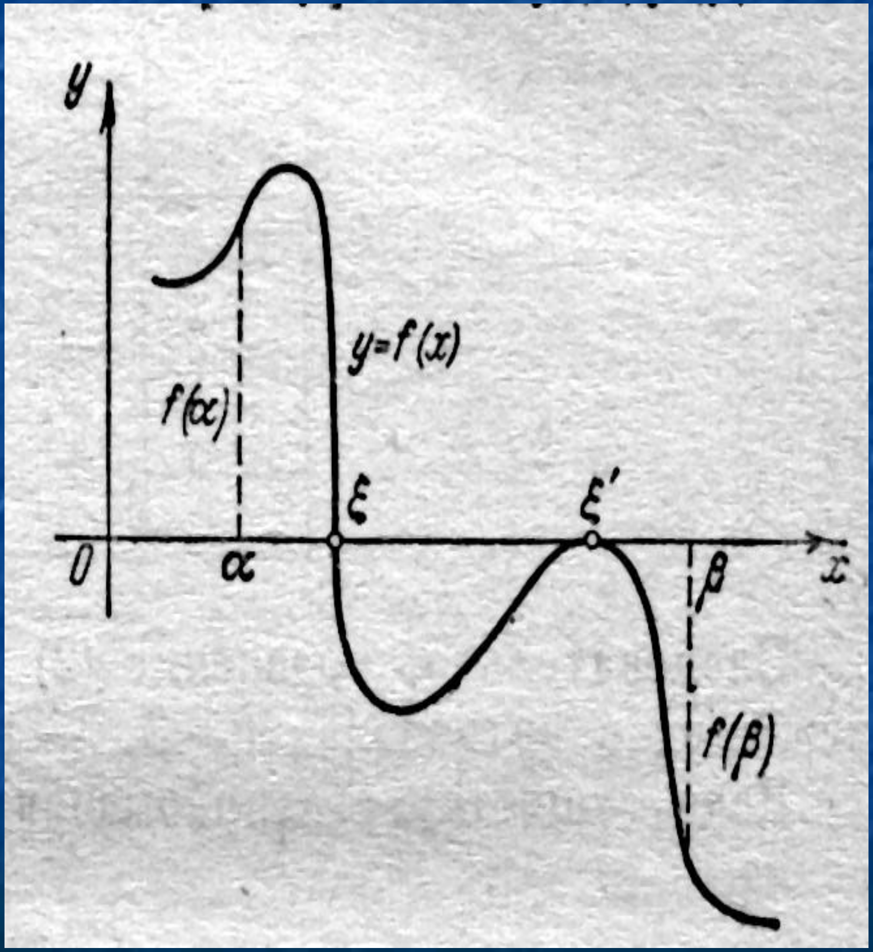
Предположение

Предполагается, что уравнение **f(x) = 0** имеет лишь изолированные корни, т. е. для каждого корня уравнения существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Этапы решения задачи:

1. **<u>Отделение</u>** корней, т.е. установление возможных промежутков (интервалов), в которых содержится один и только один корень уравнения.
2. **<u>Уточнение</u>** приближенных корней, т.е. доведение их до заданной степени точности.

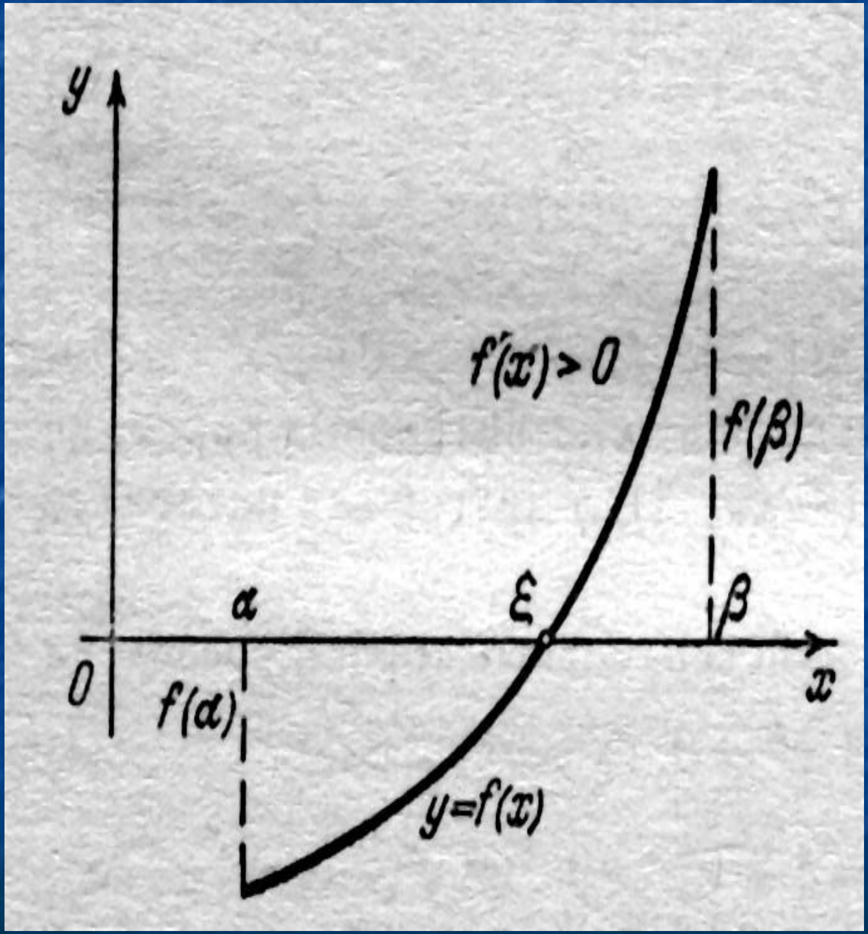
Теорема 1.



Если непрерывная функция **f(x)** принимает значения разных знаков на концах отрезка **[α , β]**, т.е.

f(α)*f(β)<0, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения **f(x)=0**, т.е. найдется хотя бы одно число ε такое, что **f(ε)=0**.

Теорема 2.



Корень **ε** заведомо будет единственным, если производная **f′(x)** существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала **(α ,β)**, т.е. если **f′(x)>0** (или **f′(x)<0**) при **α< x<β**.

Методы отделения корней

- графический способ
- определение знаков функции в ряде промежуточных точек, выбор которых учитывает особенности функции
- специальные способа анализа функции

Методы приближенного нахождения (уточнения) корней

- Метод половинного деления (дихотомии)
- Метод хорд
- Метод касательных
- Метод итераций

Пример

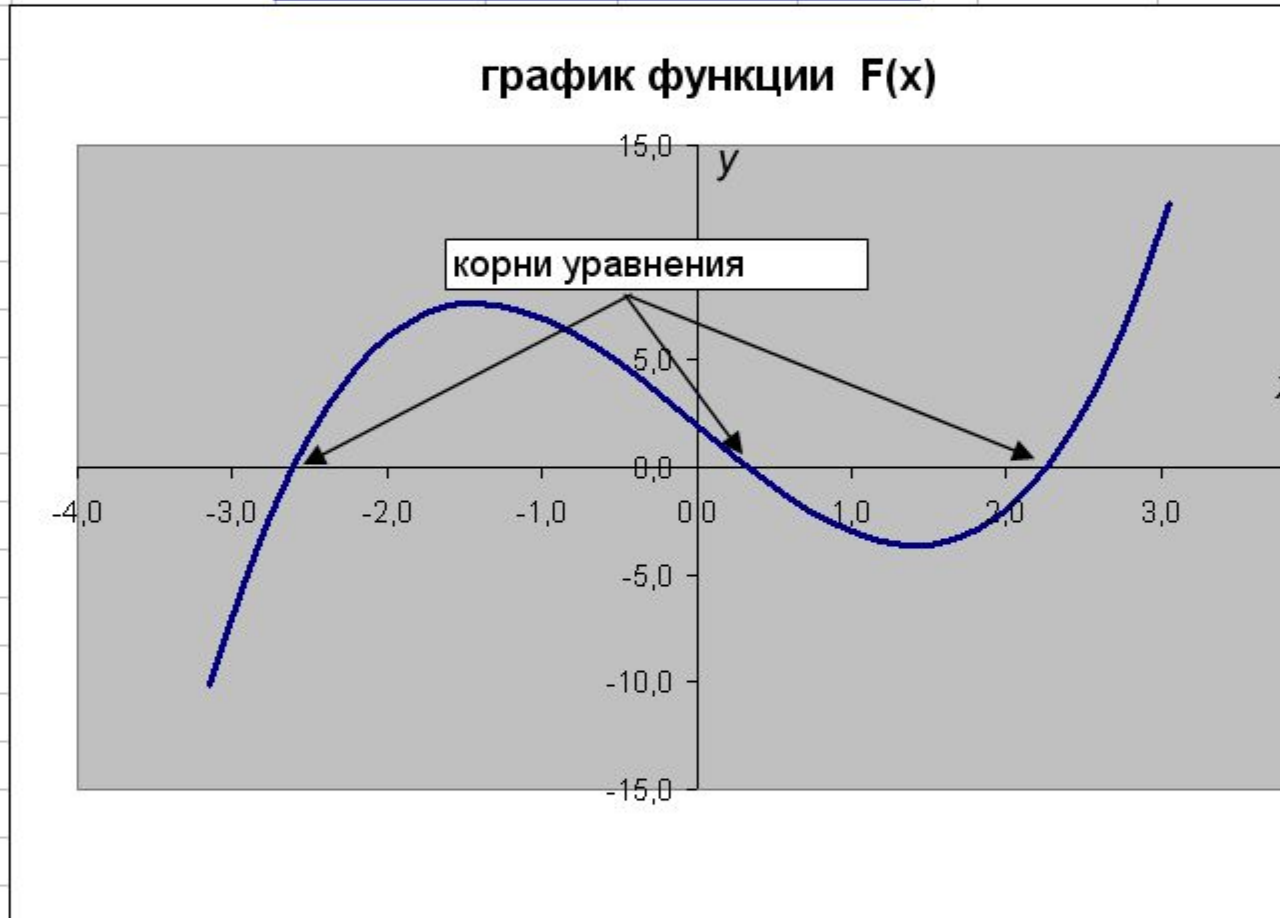
Отделение корней уравнения

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

решение уравнения F(x)=0

$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

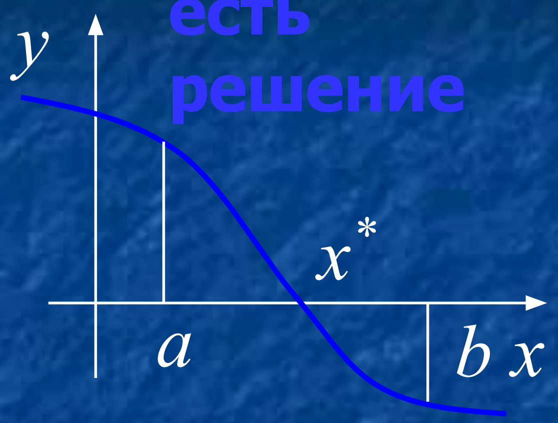
x	F(x)
-3,142	-10,157
-2,832	-3,714
-2,522	1,096
-2,212	4,452
-1,902	6,533
-1,592	7,518
-1,282	7,585
-0,972	6,912
-0,662	5,680
-0,352	4,066
-0,042	2,249
0,268	0,409
0,578	-1,277
0,888	-2,629
1,198	-3,469
1,508	-3,618
1,818	-2,898
2,128	-1,129
2,438	1,868
2,748	6,270
3,058	12,257

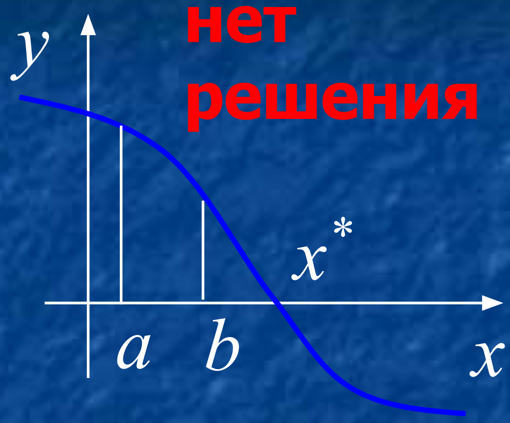


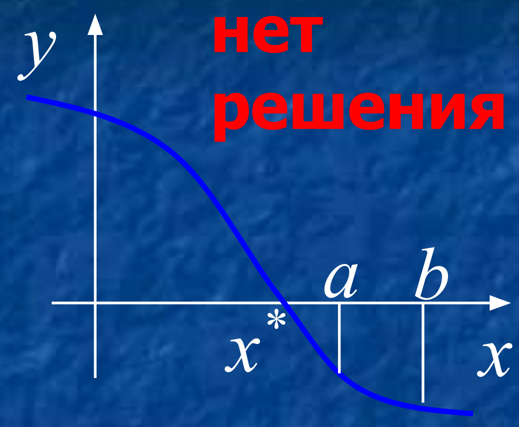
Интервалы расположения корней

- приблизительно -2,5 на интервале [-5,-2]
- приблизительно 2,5 на интервале [2,5]
- приблизительно 0,5 в интервале [-1,1]

Есть ли решение на $[a, b]$?







$f(a) > 0$

$f(b) < 0$

$f(a) > 0$

$f(b) > 0$

$f(a) < 0$

$f(b) < 0$

$f(a) f(b) < 0$

$f(a) f(b) > 0$

!

Если *непрерывная* функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервала $[a, b]$, то в некоторой точке x^* внутри $[a, b]$ имеем $f(x^*) = 0$!

Метод половинного деления (дихотомии)

Условие наличия корня **f(a)*f(b) < 0**.

Вычисляется середина отрезка **x = (a+b)/2**.

Если **f(x) = 0**, то **x** - корень уравнения.

В противном случае выбирается тот из отрезков **[a, x]** или **[x, b]**, на концах которого функция **f(x)** имеет разные знаки. Т.к достичь **f(x) = 0** практически невозможно, то вычисления завершаются при условии **|b – a| < ε**, где **ε** – точность (малое число).

Найти корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 6*x + 2 = 0$$

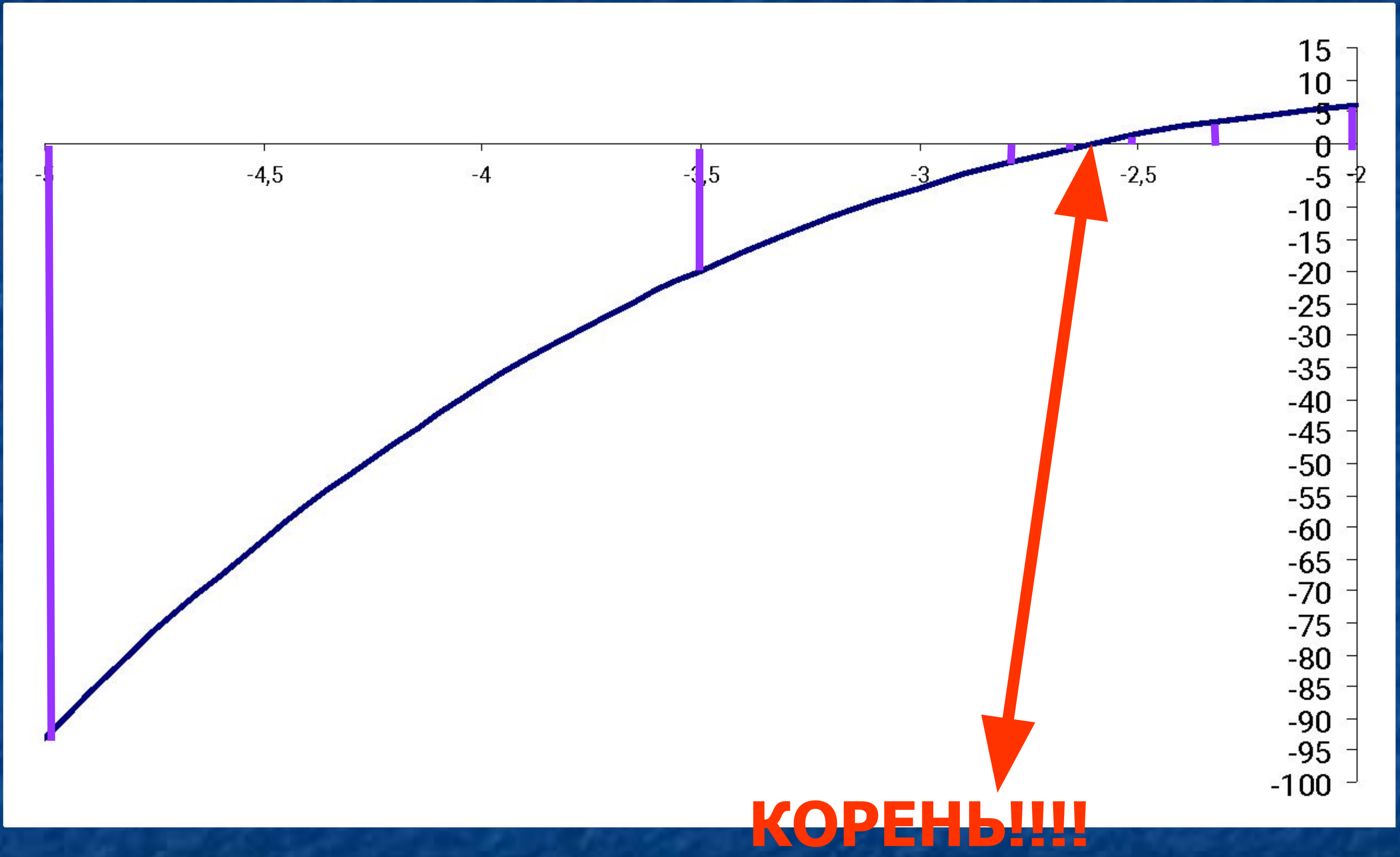
на интервале [-5,-2]
т.е.

границы интервала: $a = -5$; $b = -2$;

значения функции: $f(a) = -7$; $f(b) = 6$.

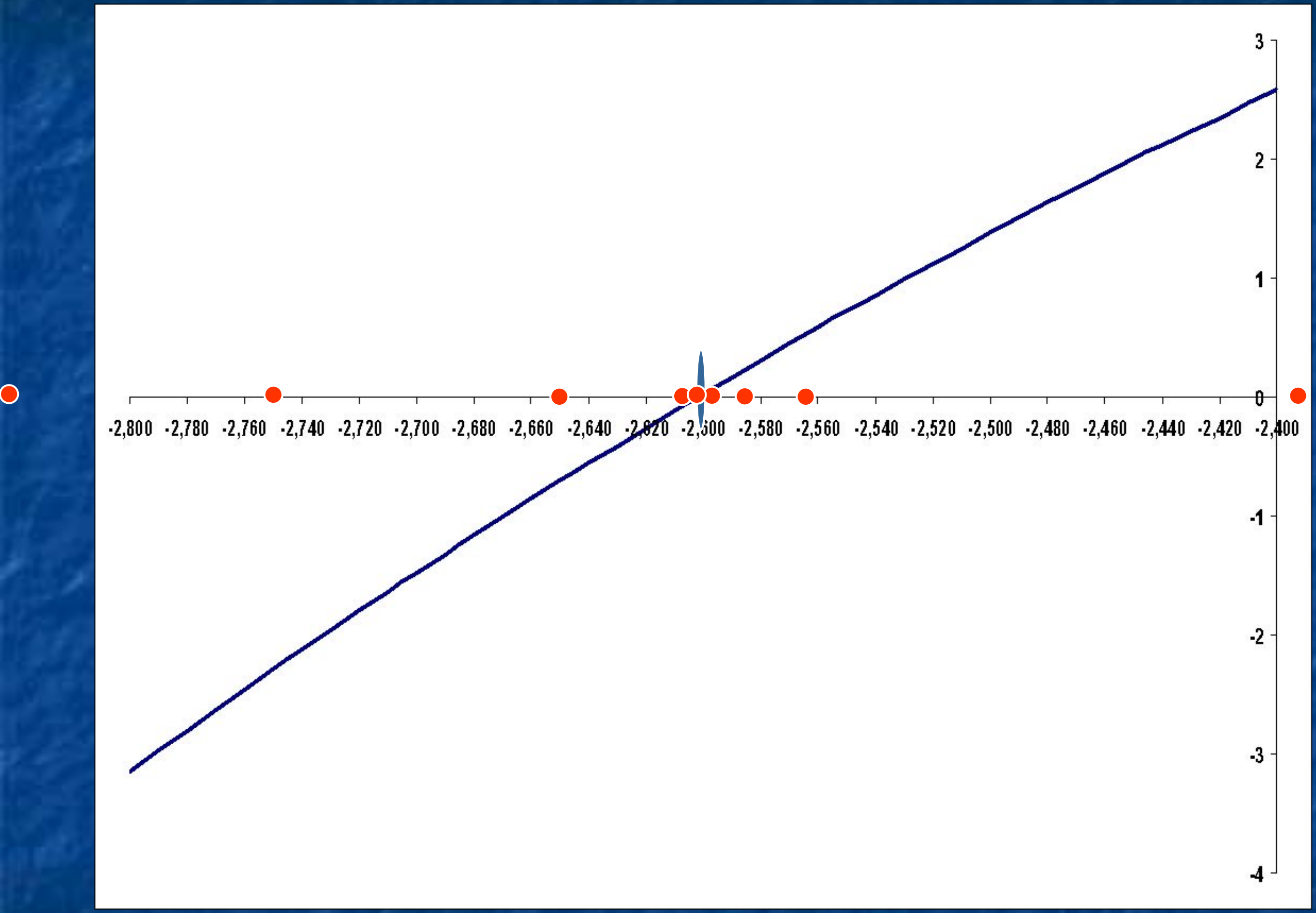
Точность вычисления: $\varepsilon = 0.01$

Реализация метода половинного деления



[-5,-2]
ε=0.01

КРУПНЕЕ:



k=1 x=-3.500 f(x)= -19.875

k=2 x=-2.750 f(x)= -2.297

k=3 x=-2.375 f(x)= 2.854

k=4 x=-2.563 f(x)= 0.542

k=5 x=-2.656 f(x)= -0.800

k=6 x=-2.609 f(x)= -0.105

k=7 x=-2.586 f(x)= 0.222

k=8 x=-2.598 f(x)= 0.053

k=9 x=-2.604 f(x)=

Условием сходимости может быть и

$$|a-b| <= 2\varepsilon$$

Преимущества

- **простота**
- можно получить решение с заданной **точностью** (в пределах точности машинных вычислений)

Недостатки

- нужно знать **интервал** [*a*, *b*]
- на интервале [*a*, *b*] должно быть только **одно** решение
- **большое число шагов** для достижения высокой точности
- только для функций **одной** переменной

Метод хорд

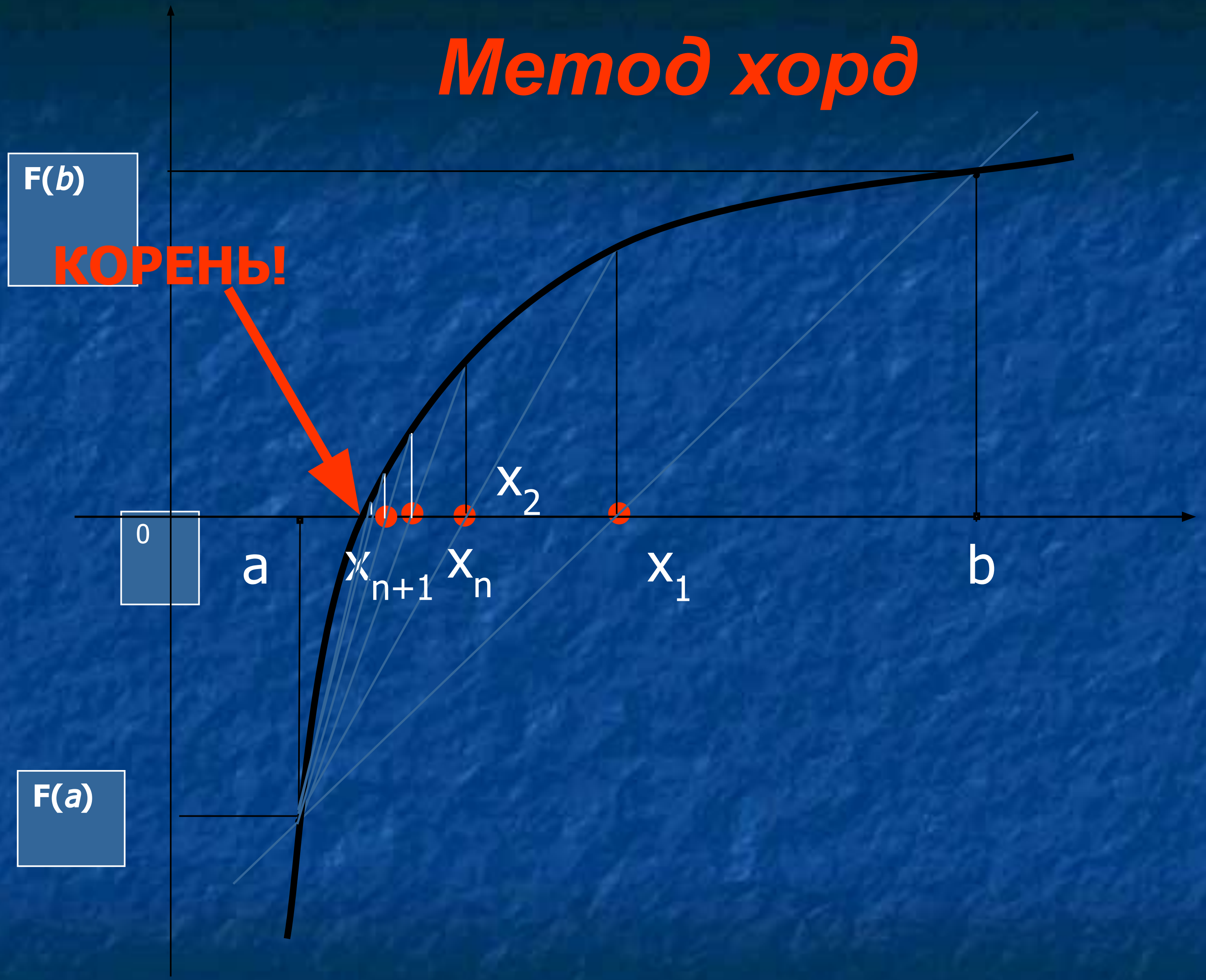
Рассматриваемый метод, как и метод дихотомии предназначен для уточнения корня на интервале [*a,b*], на концах которого функция принимает разные знаки.

В отличие от метода дихотомии приближенное значение корня берем не в середине отрезка [*a,b*], а в точке *x1*, где ось абсцисс пересекает прямая, проведенная через точки *F*(a), *F*(b).

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем тот из двух отрезков ([a,x_1] или [x_1,b]), на концах которого функция $F(x)$ принимает значения с разными знаками.

Заканчиваем процесс уточнения корня, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной погрешности ε, т.е. $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, или когда $|F(x)| < \varepsilon$.

Метод хорд



Очередное приближение корня определяется по формулам

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) * f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, если\ f(b) * f''(x) > 0$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a) * f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}, если\ f(a) * f''(x) > 0$$

В большинстве случаев при решении уравнений методом хорд требуется меньшее количество итераций по сравнению с методом дихотомии.

Необходимым условием сходимости итерационного процесса является выполнение условия $|F'(x)| < 1$.

Метод Ньютона

(метод касательных)

Предположим, что каким-либо методом (например, графическим) определено начальное приближение корня: $x=x_0$

Обычно $$x_0 = \begin{cases} a, при\; f(a) * f''(x) > 0 \\ b, при\; f(b) * f''(x) > 0 \end{cases}$$

Метод Ньютона

Очередное приближение корня определяется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Для окончания итерационного процесса может быть использовано условие $|f(x_n)| < \varepsilon$ или условие близости двух последовательных приближений $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости. Обычная абсолютная точность решения 10^{-5}-10^{-6} достигается через 5-6 итераций.

Недостатком метода является необходимость вычисления на каждой итерации не только функции *f(x)*, но и её производной.

Преимущества

- быстрая (квадратичная) сходимость – ошибка на *k*-ом шаге обратно пропорциональна k^2
- не нужно знать интервал, только начальное приближение
- применим для функция нескольких переменных

Недостатки

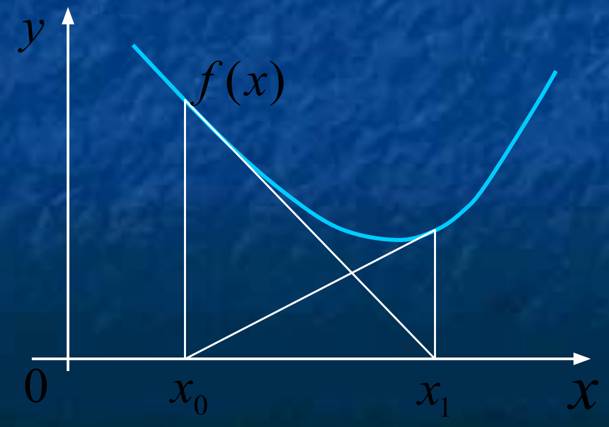
- нужно уметь вычислять производную (по формуле или численно)
- производная не должна быть равна нулю

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

- может зацикливаться

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$



Метод итераций

Дано уравнение

$$f(x) = 0$$

Заменим уравнение $f(x)=0$ равносильным уравнением

$$x = z(x)$$

Выберем каким-либо способом (достаточно грубо, в первом приближении) начальное значение $\mathbf{x_0}$ и подставим его в правую часть уравнения.

Получим некоторое число

$$\mathbf{x_1 = z(x_0)}$$

Подставим в правую часть уравнения вместо $\mathbf{x_0}$ число $\mathbf{x_1}$ и получим

$$\mathbf{x_2 = z(x_1)}$$

Повторяя этот процесс, получим последовательность

$$x_n = z(x_{n-1}),$$

где n=1,2,3,…

Итерационный процесс прекращается если результаты двух последовательных итераций близки : $| x_{n+1} - x_n | < \varepsilon$.

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо выполнение условия

$$| f'(x) | < 1.$$

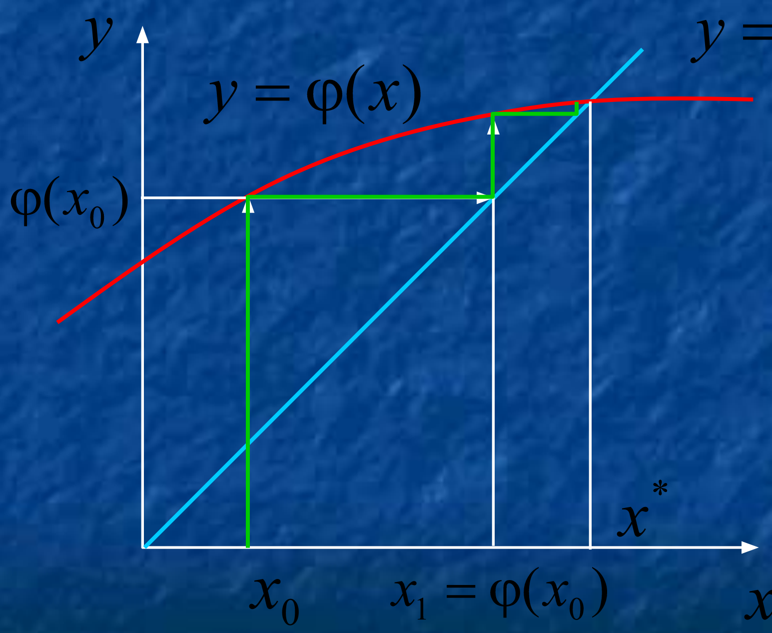
Если нет уверенности в том, что итерационный процесс сходится, то необходимо ограничить число итераций.

Сходимость итераций

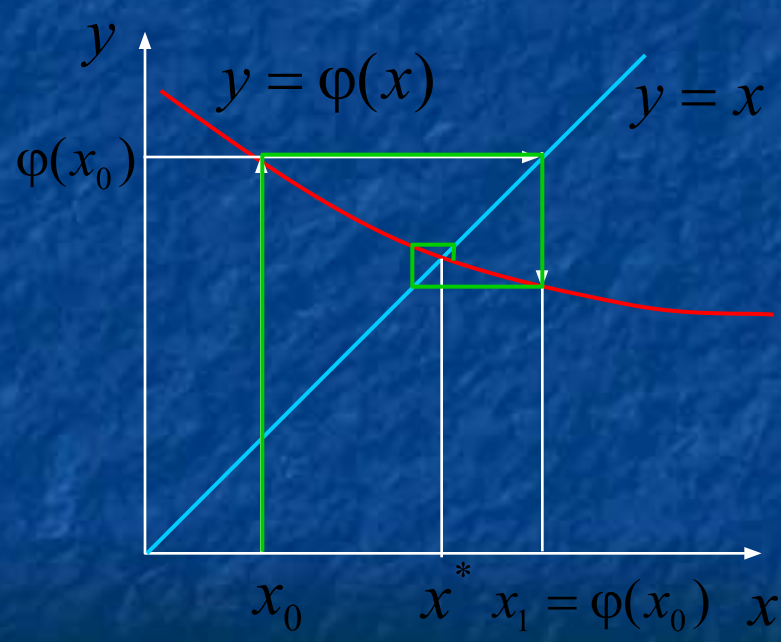
Сходящийся итерационный процесс:

последовательность $x_0, x_1, \ldots$ приближается (сходится) к точному решению.

$$x^* = \varphi(x^*) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots \to x^*$$



односторонняя сходимость

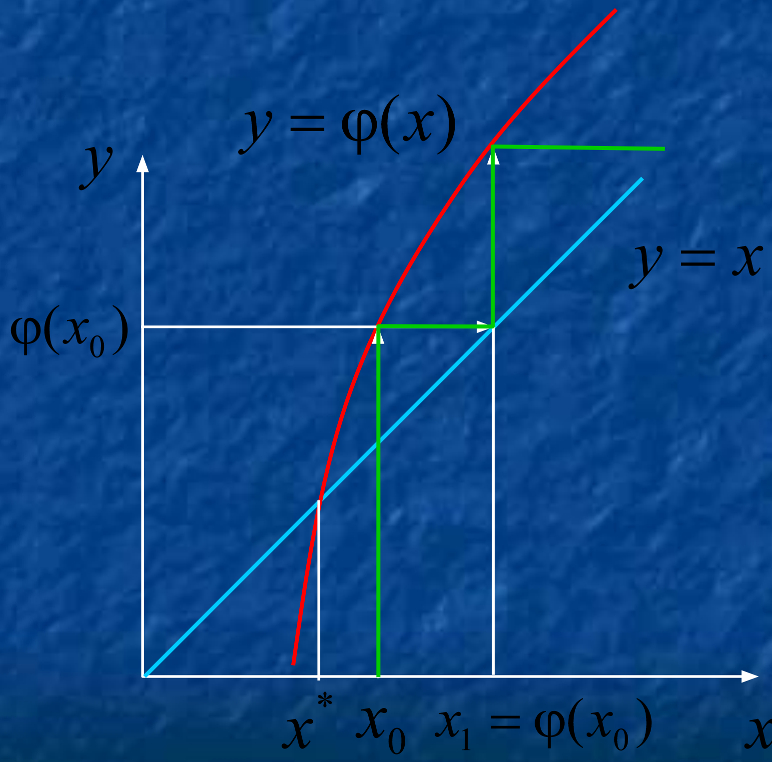


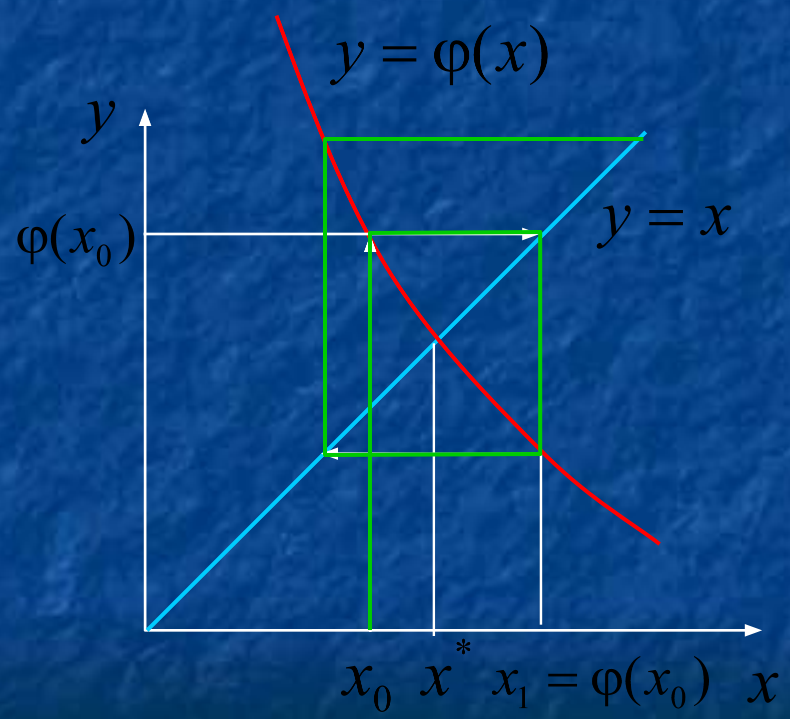
двусторонняя сходимость

Расходимость итераций

Расходящийся итерационный процесс:

последовательность $x_0, x_1, \ldots$ неограниченно возрастает или убывает, не приближается к решению.





односторонняя расходимость

двусторонняя расходимость

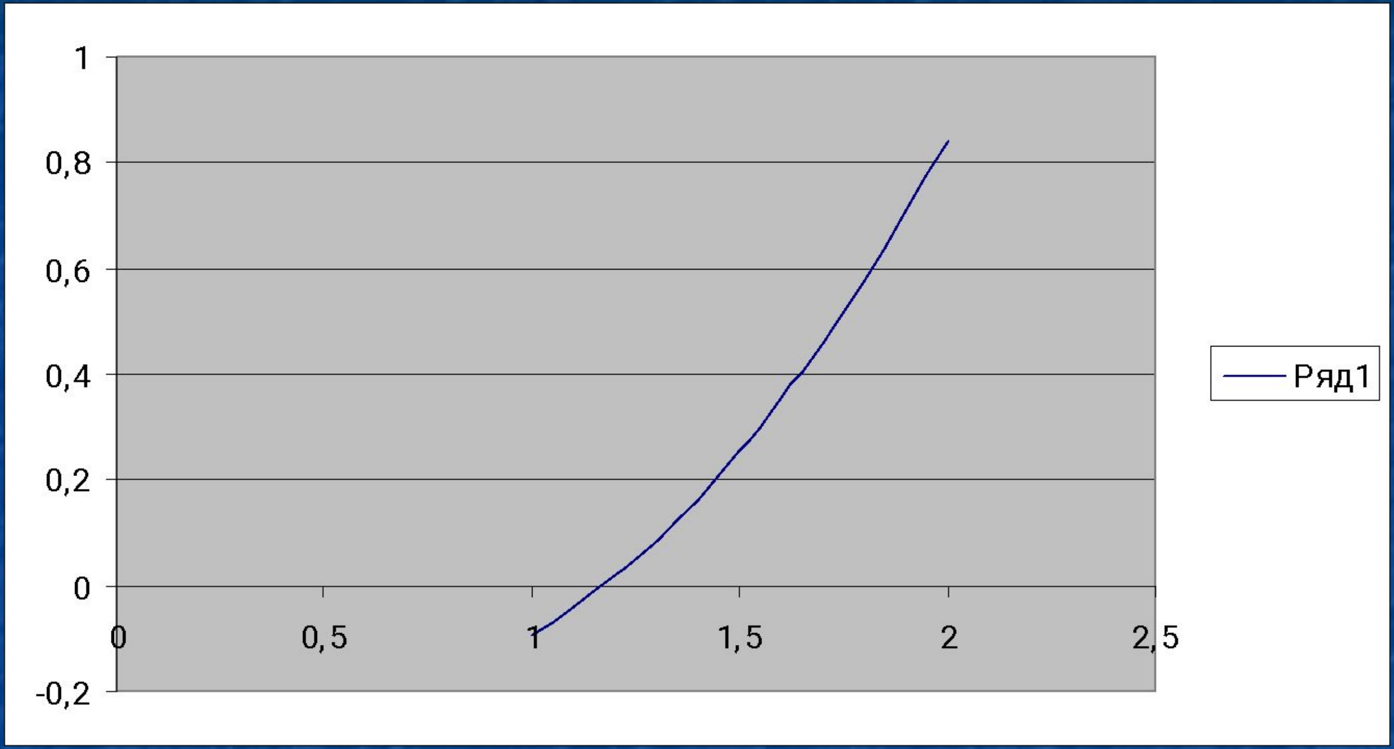
Пример 1 (метод итераций)

Найти действительные корни уравнения

$$x - \sin(x) = 0{,}25$$

с точностью до трех значащих цифр.

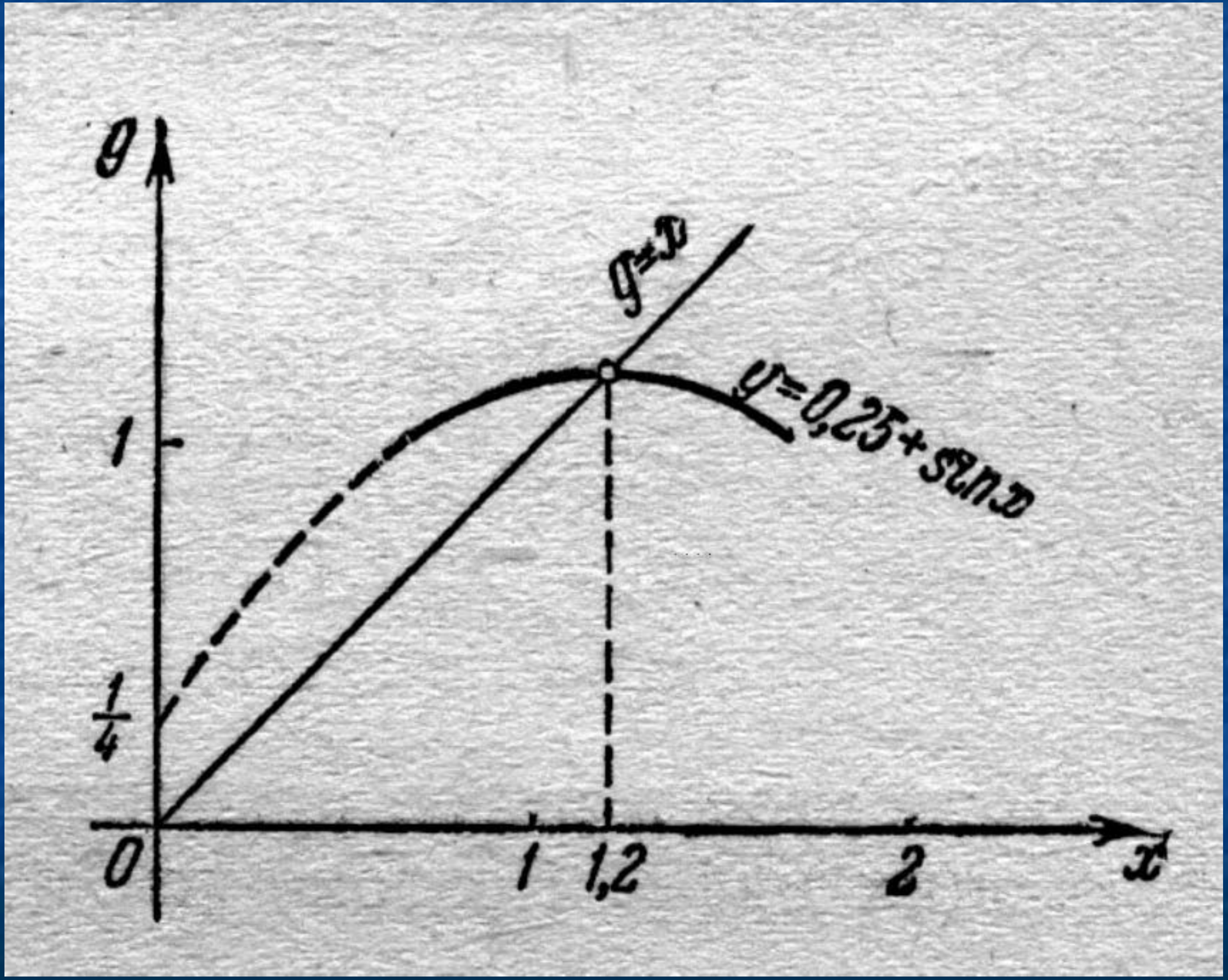
Локализуем корни уравнения, например по графику



Уравнение имеет на отрезке [0,9; 1,5] один вещественный корень ξ, приближенно равный x = 1,2.

Данное уравнение представим в виде

$$x = \sin(x) + 0{,}25$$



Пример 1

Итак, а = 0,9 и в = 1,5.

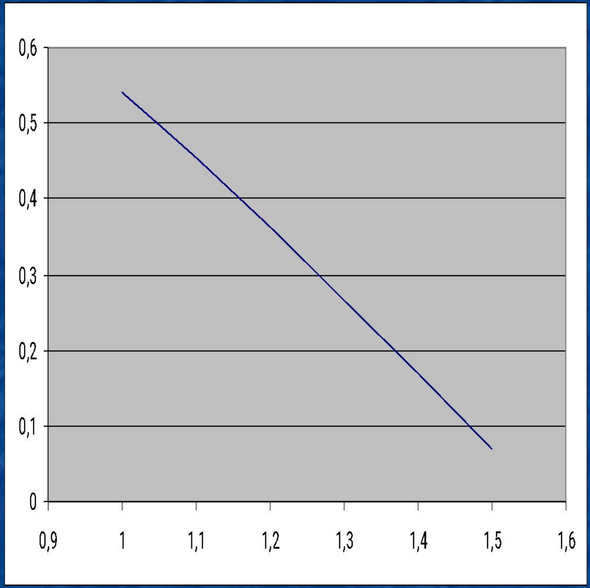
Так как **z(x) = sin(x) + 0,25**

и **z′(x) = cos(x)**,

то на интервале 0,9 < x < 1,5

|z′(x)| <1

Процесс сходится.



Пример 1

Выбираем начальное приближение $x_0 = 1{,}2$.

Производим вычисления:

$x_1 = \sin(1{,}2) + 0{,}25 = 1{,}182;$

$x_2 = \sin(1{,}182) + 0{,}25 = 1{,}175;$

$x_3 = \sin(1{,}175) + 0{,}25 = 1{,}173;$

$x_4 = \sin(1{,}173) + 0{,}25 = 1{,}172;$

$x_5 = \sin(1{,}172) + 0{,}25 = 1{,}172.$

Решение найдено с точностью до 3 значащих цифр: $\xi = 1{,}17 \pm 0{,}005.$