НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Предположим, что переменная Y зависит от переменной X в соответствии с показанной зависимостью, и необходимо получить оценки β_1, β_2, и β_3, имея данные Y и X.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Представленное выше уравнение не может быть преобразовано в уравнение линейного вида, поэтому в этом случае невозможно применение обычной процедуры оценивания регрессии.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Тем не менее, все же можно использовать принцип минимизации суммы квадратов остатков для получения оценок параметров. Мы опишем простой нелинейный регрессионный алгоритм, который использует принцип, состоящий из серии повторяющихся шагов.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение β_1, β_2, и β_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.

Начинаем с оценивания правдоподобных значений параметров.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение β_1, β_2, и β_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.

Вычисляем соответствующие установленные значения Y из данных по X, обусловленные этими значениями параметров.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение β_1, β_2, и β_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.

Вычисляем остатки для каждого наблюдения в выборке и, следовательно, RSS - сумму квадратов остатков.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение β_1, β_2, и β_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$

Затем вносим небольшие изменения в одну или более оценку параметров.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение β_1, β_2, и β_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, $\hat{u}_i$, RSS.

Используя новые оценки β_1, β_2, и β_3 , пересчитываем установленные значения Y. Затем пересчитываем остатки и RSS.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. **Предположение β_1, β_2, и β_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.**
2. **Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.**
3. **Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.**
4. **Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.**
5. **Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$**
6. **Пересчитываем Y_i, $\hat{u}_i$, *RSS*.**
7. **Если новый *RSS* < предыдущего *RSS*, продолжить вычисление методом наименьших квадратов.**

В противном случае выполнить другое вычисление.

Если RSS меньше стал меньше предыдущего, новые оценки параметров лучше предыдущих, необходимо продолжать корректировать оценки в одном направлении. В противном случае необходимо выполнить различные вычисления методом наименьших квадратов.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение b_1, b_2, и b_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, $\hat{u}_i$, *RSS*.
7. Если новый *RSS* < предыдущего *RSS*, продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
8. Повторите шаги 5, 6 и 7 для сближения.

Вы повторяете шаги 5, 6 и 7 вновь до тех пор, пока не окажется невозможным внести какие-либо изменения в оценки параметров, которые привели бы к уменьшению RSS.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение b_1, b_2, и b_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, $\hat{u}_i$, RSS.
7. Если новый RSS < предыдущего RSS, продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
8. Повторите шаги 5, 6 и 7 для сближения.

Делается вывод о том, что величина RSS минимизирована и конечные оценки параметров являются оценками по методу наименьших квадратов.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

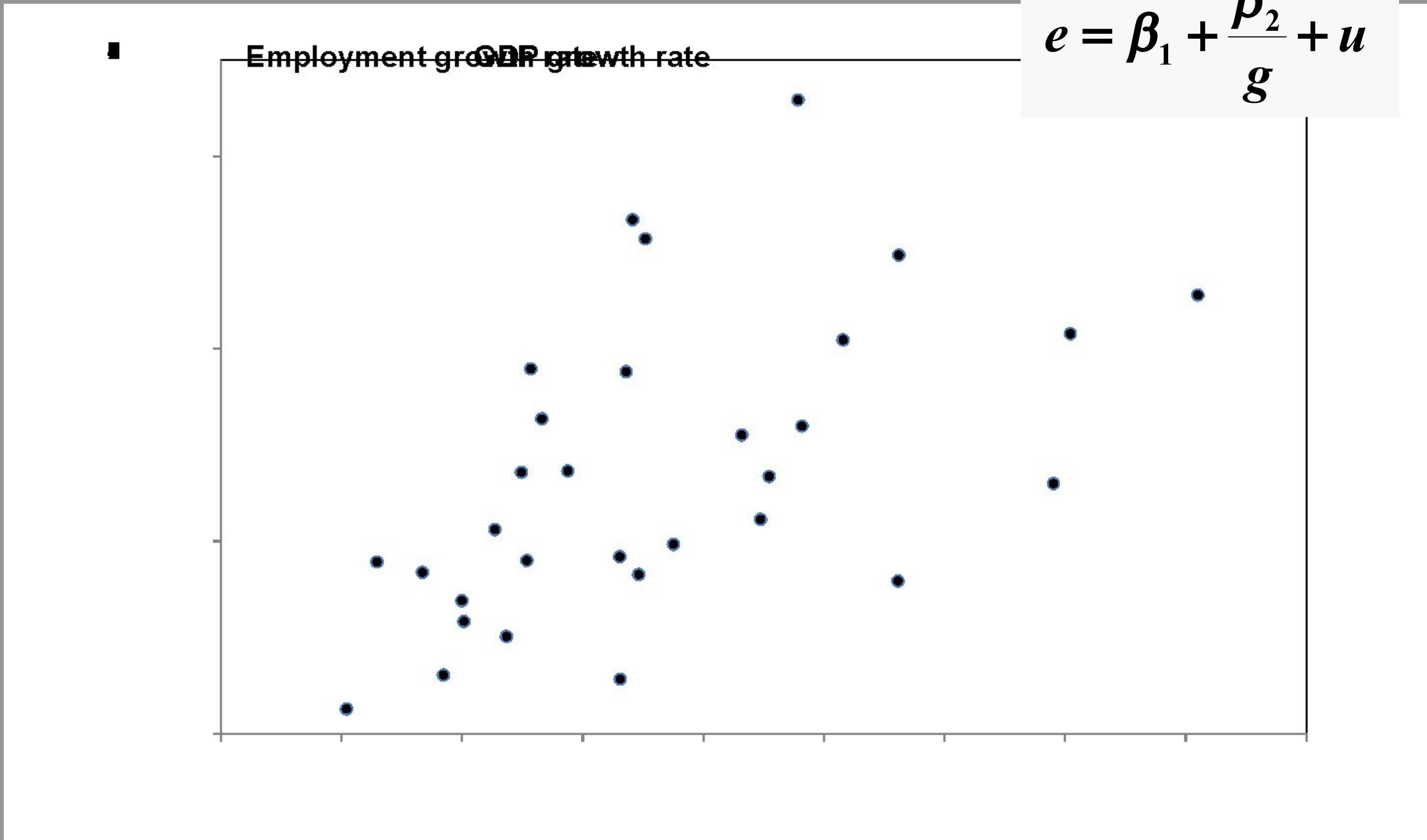
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение b_1, b_2, и b_3. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, $\hat{u}_i$, RSS.
7. Если новый RSS < предыдущего RSS, продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
8. Повторите шаги 5, 6 и 7 для сближения.

Следует подчеркнуть, что математики давно разработали сложные методы, чтобы свести к минимуму количество шагов, требуемых алгоритмами этого типа.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

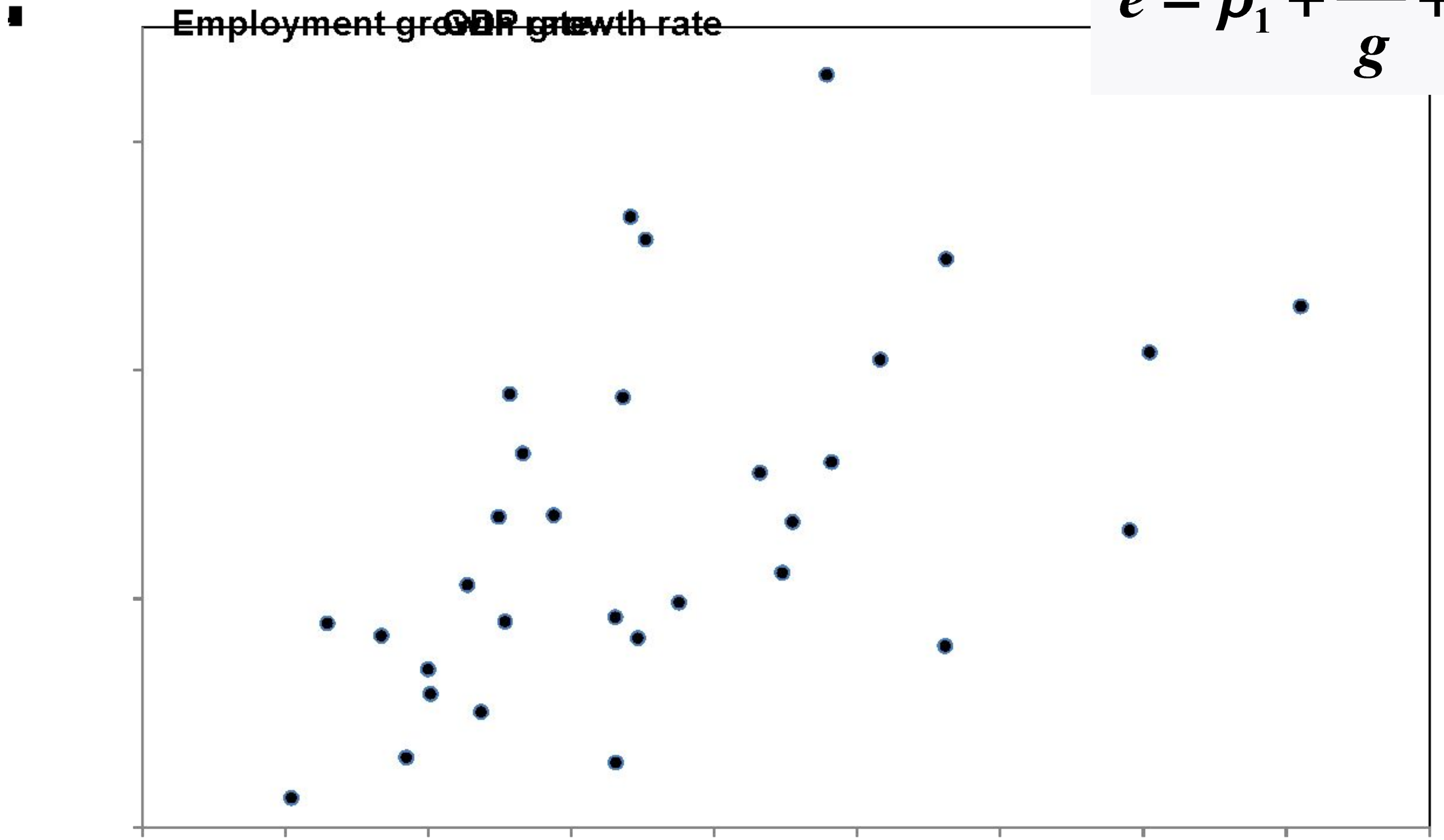


$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

Мы вернемся к взаимосвязи между темпами роста занятости, *e* и темпами роста ВВП, *g*, в первом слайд-шоу этой главы. Предполагается, что *e* и *g* связаны между собой как показано.

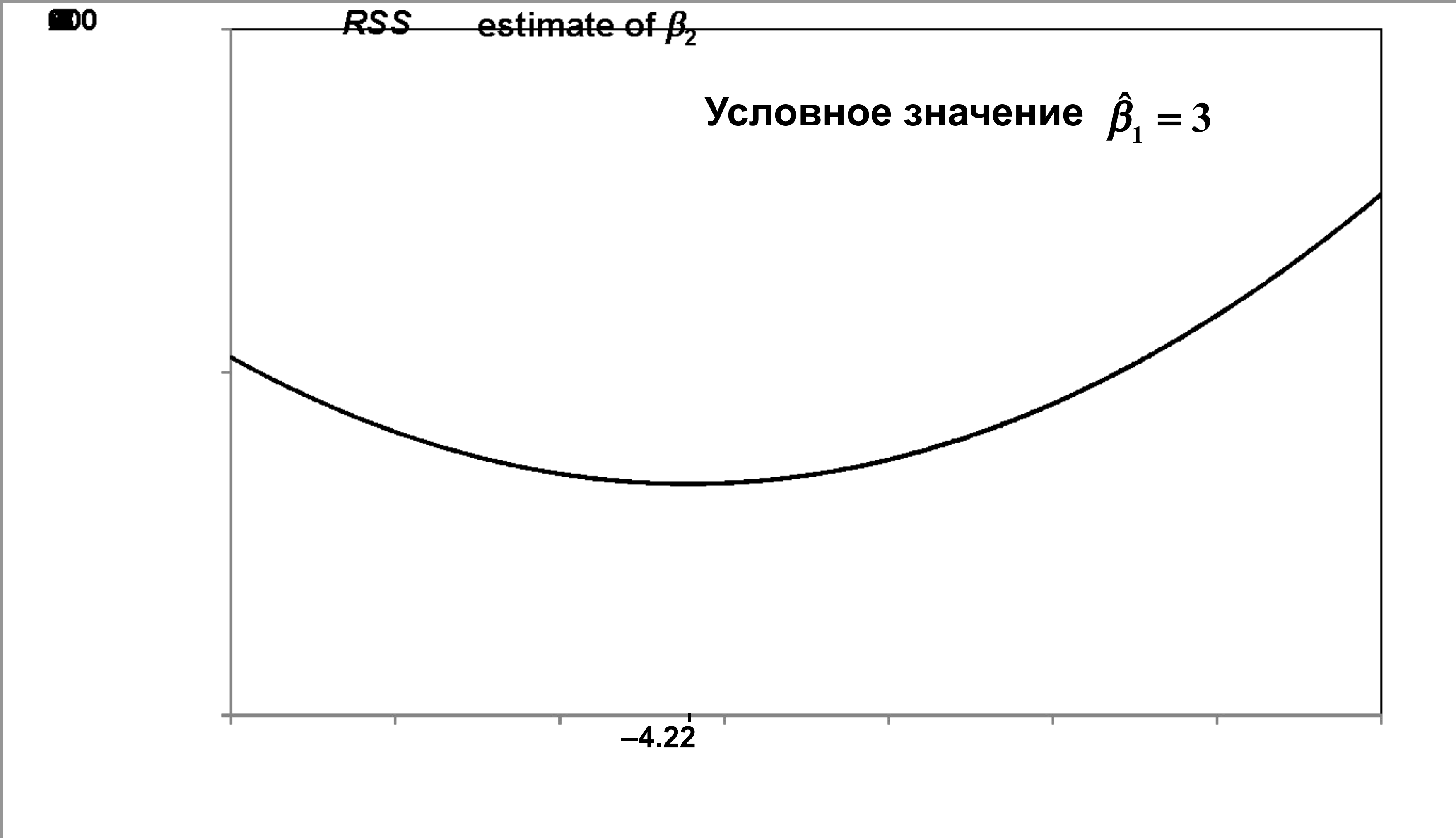
НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

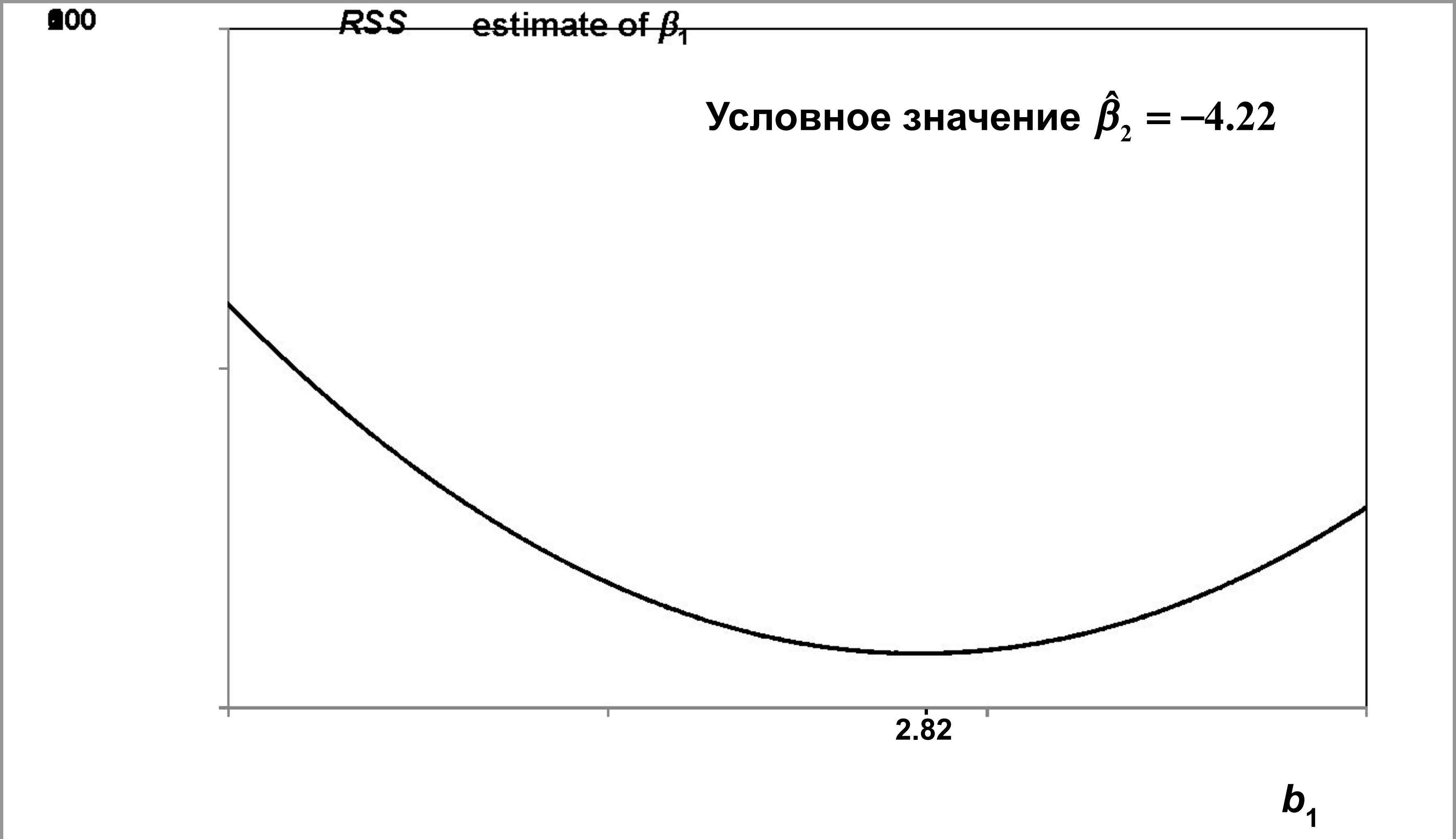


Согласно этой спецификации, когда g становится большим, e будет стремиться к пределу β_1. На рисунке видно, что максимальное значение e равно 3. Поэтому будем считать его начальным значением для β_1. Затем мы ищем оптимальное значение β_2, обусловленное этой предпосылкой для β_1.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

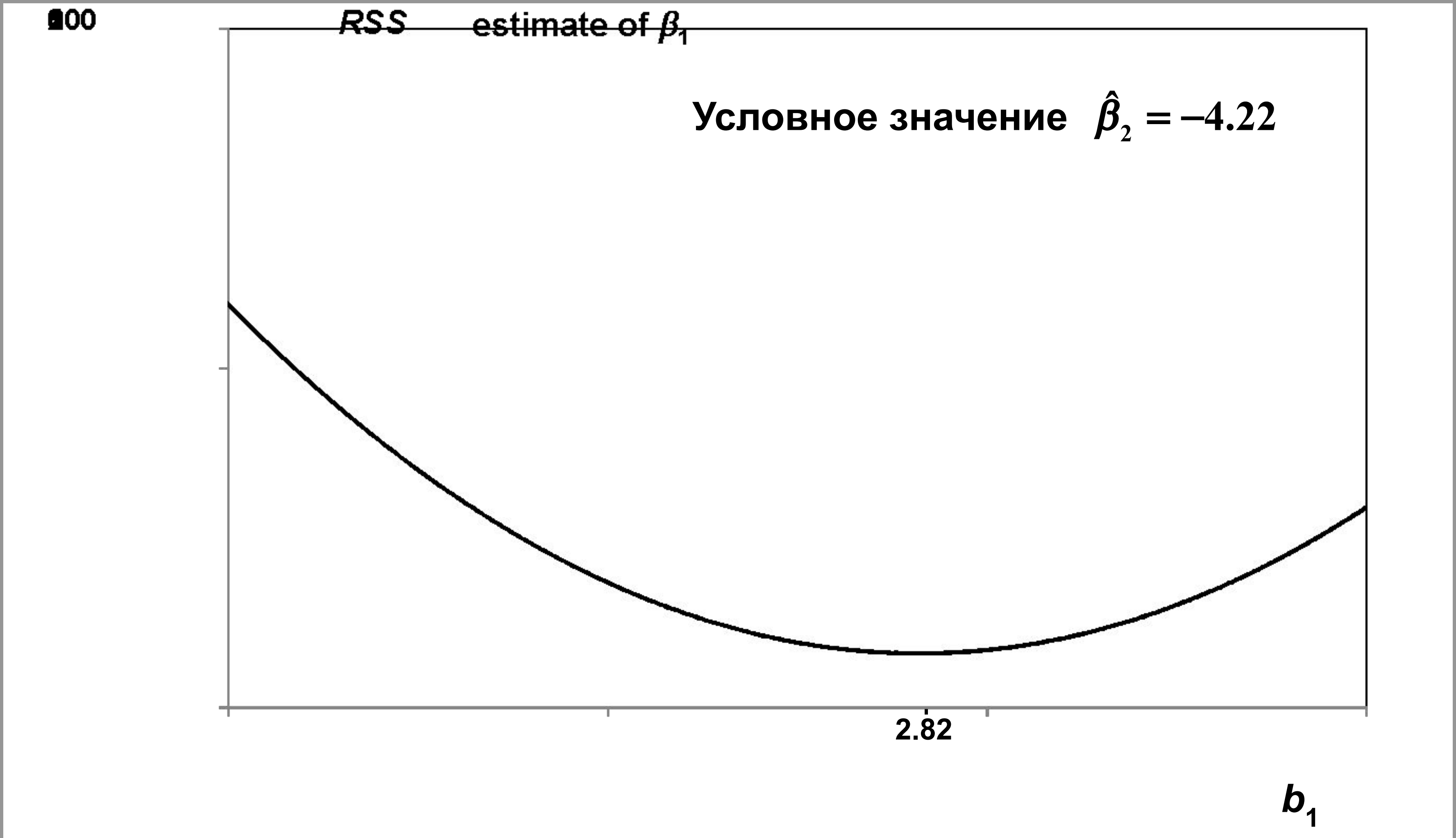


На рисунке показано, как RSS отображается в зависимости от $\hat{\beta}_2$,условное значение $\hat{\beta}_1$ = 3. Из этого мы видим, что оптимальное значение $\hat{\beta}_2$, условное на $\hat{\beta}_1$ = 3, равно -4.22.



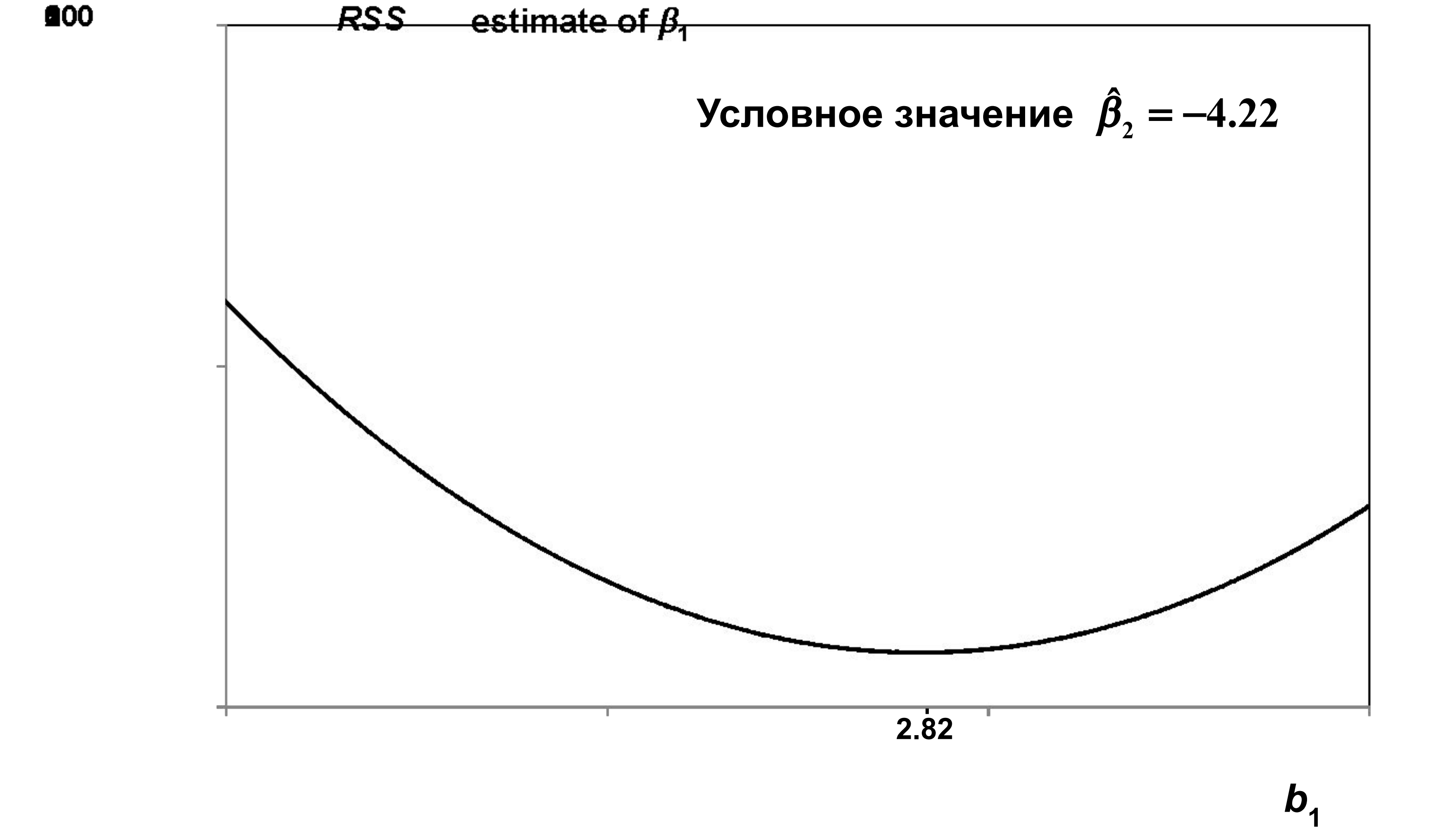
Затем, фиксируя $\hat{\beta}_2$ на уровне -4.22, мы стараемся улучшить наше предположение для $\hat{\beta}_1$. На рисунке показано RSS в зависимости от $\hat{\beta}_1$, условное значение $\hat{\beta}_2$ = -4.22. Мы видим, что оптимальное значение b_1 равно 2.82.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



Мы продолжаем делать так до тех пор, пока обе оценки параметров сходятся к пределам и затем перестают меняться. Затем мы достигнем значений, которые дают минимальную сумму квадратов остатков (RSS).

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



Пределы должны быть значениями преобразованной линейной регрессии, показанной в первом слайд-шоу для этой главы: $\hat{\beta}_1$ = 2,18 и $\hat{\beta}_2$ = -2,36. Они были определены по тому же критерию, что и минимизация RSS. Все, что мы сделали – использовали другой метод.

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/g)
(obs = 31)

Iteration 0:  residual SS =  12.30411
Iteration 1:  residual SS =  12.30411

----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS
-------------+------------------------------         Number of obs =        31
       Model |  5.80515805     1  5.80515805         R-squared     =    0.3206
    Residual |   12.304107    29   .42427955         Adj R-squared =    0.2971
-------------+------------------------------         Root MSE      =  .6513674
       Total |   18.109265    30  .603642167         Res. dev.     =  59.32851
----------------------------------------------------------------------------
           e |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
      /beta1 |    2.17537    .249479     8.72   0.000     1.665128    2.685612
      /beta2 |  -2.356136   .6369707    -3.70   0.001    -3.658888   -1.053385
----------------------------------------------------------------------------
```

Вот результат для данной гиперболической регрессии влияния *e* на *g* с использованием нелинейной регрессии. Это, как обычно, вывод Stata, но вывод из других приложений регрессии будет похожим.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/g)
(obs = 31)

Iteration 0:  residual SS =  12.30411
Iteration 1:  residual SS =  12.30411

----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS
-------------+------------------------------         Number of obs =        31
       Model |  5.80515805     1  5.80515805         R-squared     =    0.3206
    Residual |   12.304107    29   .42427955         Adj R-squared =    0.2971
-------------+------------------------------         Root MSE      =  .6513674
       Total |   18.109265    30  .603642167         Res. dev.     =  59.32851
----------------------------------------------------------------------------
           e |      Coef.   Std. Err.       t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
      /beta1 |    2.17537    .249479     8.72   0.000     1.665128    2.685612
      /beta2 |  -2.356136   .6369707    -3.70   0.001    -3.658888   -1.053385
----------------------------------------------------------------------------
```

Команда Stata для нелинейной регрессии - «nl». За этим следует гипотетическая математическая связь в круглых скобках. Параметры должны иметь имена, помещенные в фигурные скобки. Здесь b_1 является {beta1}, а b_2 - {beta2}.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

```
. gen z = 1/g
. reg e z
```

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

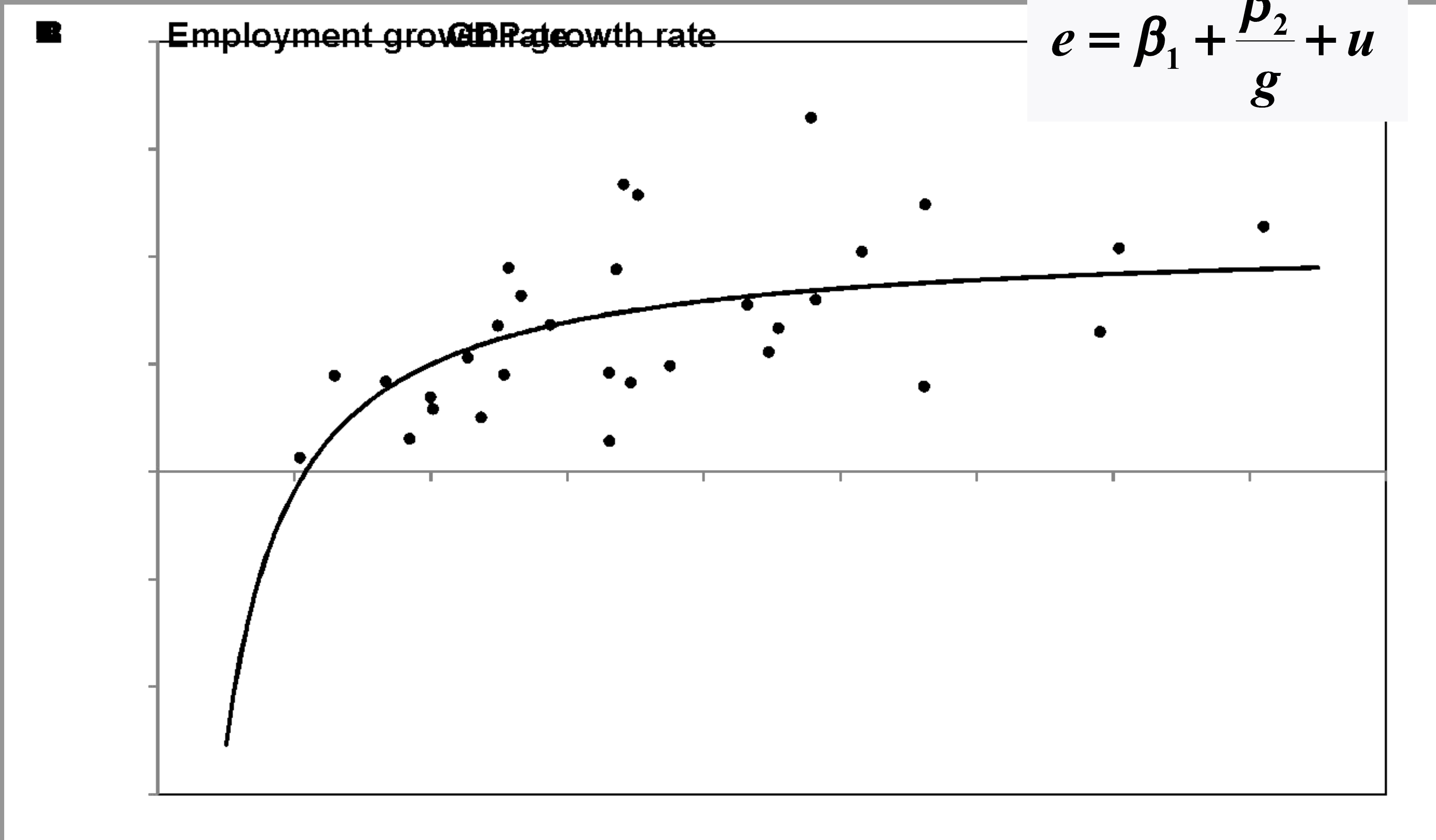
```
------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      31
-------------+------------------------------           F(  1,    29) =   13.68
       Model |  5.80515811     1  5.80515811           Prob > F      =  0.0009
    Residual |  12.3041069    29  .424279548           R-squared     =  0.3206
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2971
       Total |   18.109265    30  .603642167           Root MSE      =  .65137
------------------------------------------------------------------------------
           e |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           z |  -2.356137    .6369707    -3.70   0.001    -3.658888   -1.053385
       _cons |    2.17537     .249479     8.72   0.000     1.665128    2.685612
------------------------------------------------------------------------------
```

$$\hat{e} = 2.18 - 2.36z = 2.18 - \frac{2.36}{g}$$

Выходные данные аналогичны выходным данным линейной регрессии в первом слайд-шоу для этой главы.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$



Гиперболическая функция вводит такое ограничение, что функция стремится к минус бесконечности для положительного *g* при приближении *g* к нулю.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + g} + u$$

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/({beta3} + g))
(obs = 31)

Iteration 0:  residual SS =  12.30411
Iteration 1:  residual SS =  12.27327
.....................................
Iteration 8:  residual SS =  11.98063

----------------------------------------------------------------------------
    Source |       SS          df         MS
-----------+------------------------------           Number of obs =        31
     Model |  6.12863996      2   3.06431998           R-squared     =    0.3384
  Residual |  11.9806251     28   .427879466           Adj R-squared =    0.2912
-----------+------------------------------           Root MSE      =   .654125
     Total |   18.109265     30   .603642167           Res. dev.     =   58.5026
----------------------------------------------------------------------------
         e |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|      [95% Conf. Interval]
-----------+----------------------------------------------------------------
    /beta1 |   2.714411   1.017058     2.67   0.013      .6310616     4.79776
    /beta2 |  -6.140415   8.770209    -0.70   0.490     -24.10537    11.82454
    /beta3 |   1.404714   2.889556     0.49   0.631     -4.514274    7.323702
----------------------------------------------------------------------------
```

Эта особенность может быть ослаблена путем использование показанного изменения. В отличие от предыдущей функции, она не может быть приведена к линейному виду каким-либо преобразованием. Здесь должна использоваться нелинейная регрессия.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + g} + u$$

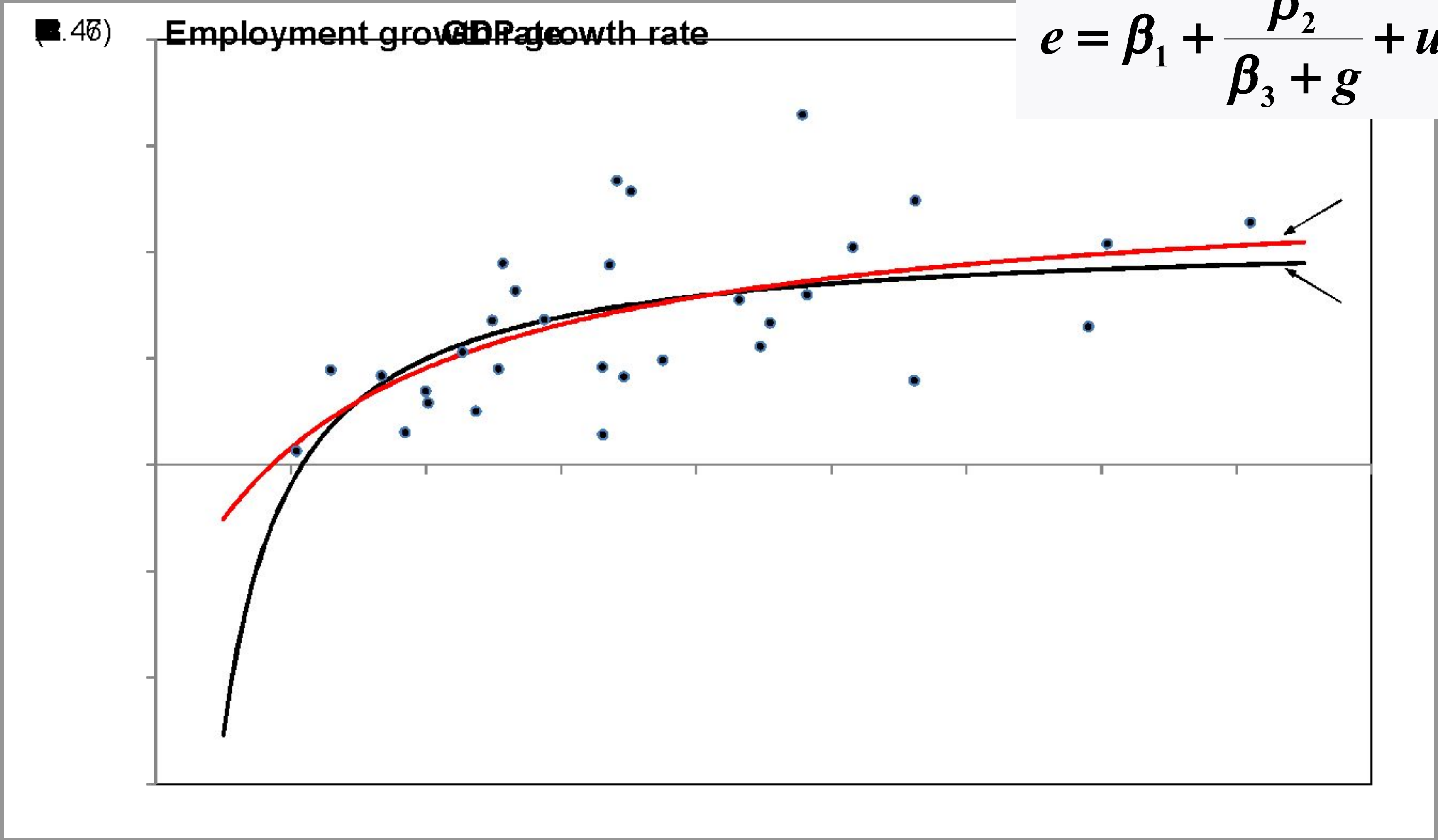
```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/({beta3} + g))
(obs = 31)

Iteration 0:  residual SS =  12.30411
Iteration 1:  residual SS =  12.27327
....................................
Iteration 8:  residual SS =  11.98063

----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS
-------------+------------------------------         Number of obs =        31
       Model |  6.12863996     2  3.06431998         R-squared     =    0.3384
    Residual |  11.9806251    28  .427879466         Adj R-squared =    0.2912
-------------+------------------------------         Root MSE      =   .654125
       Total |   18.109265    30  .603642167         Res. dev.     =   58.5026
----------------------------------------------------------------------------
           e |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
      /beta1 |   2.714411   1.017058     2.67   0.013      .6310616    4.79776
      /beta2 |  -6.140415   8.770209    -0.70   0.490     -24.10537   11.82454
      /beta3 |   1.404714   2.889556     0.49   0.631     -4.514274   7.323702
----------------------------------------------------------------------------
```

Вывод для данной спецификации (характеристик) показан с наибольшим количеством сообщений.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + g} + u$$

На рисунке сравниваются оригинальные (черные) и новые (красные) гиперболические функции. Общее выравнивание значительно не улучшено, но спецификация (характеристики) кажется более удовлетворительной.