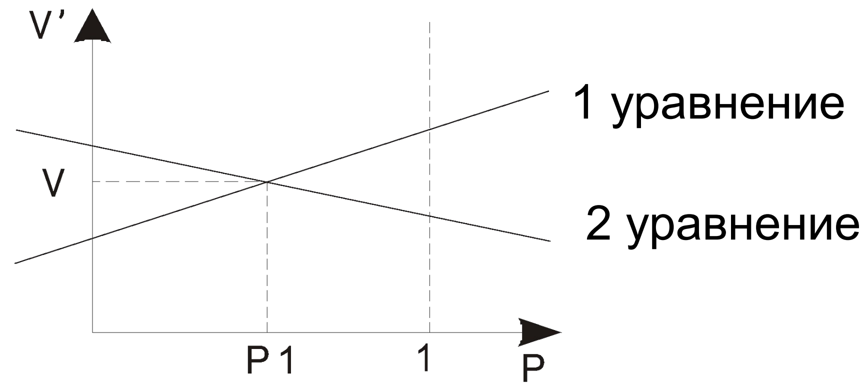
Игры (геометрия)
Статические игры

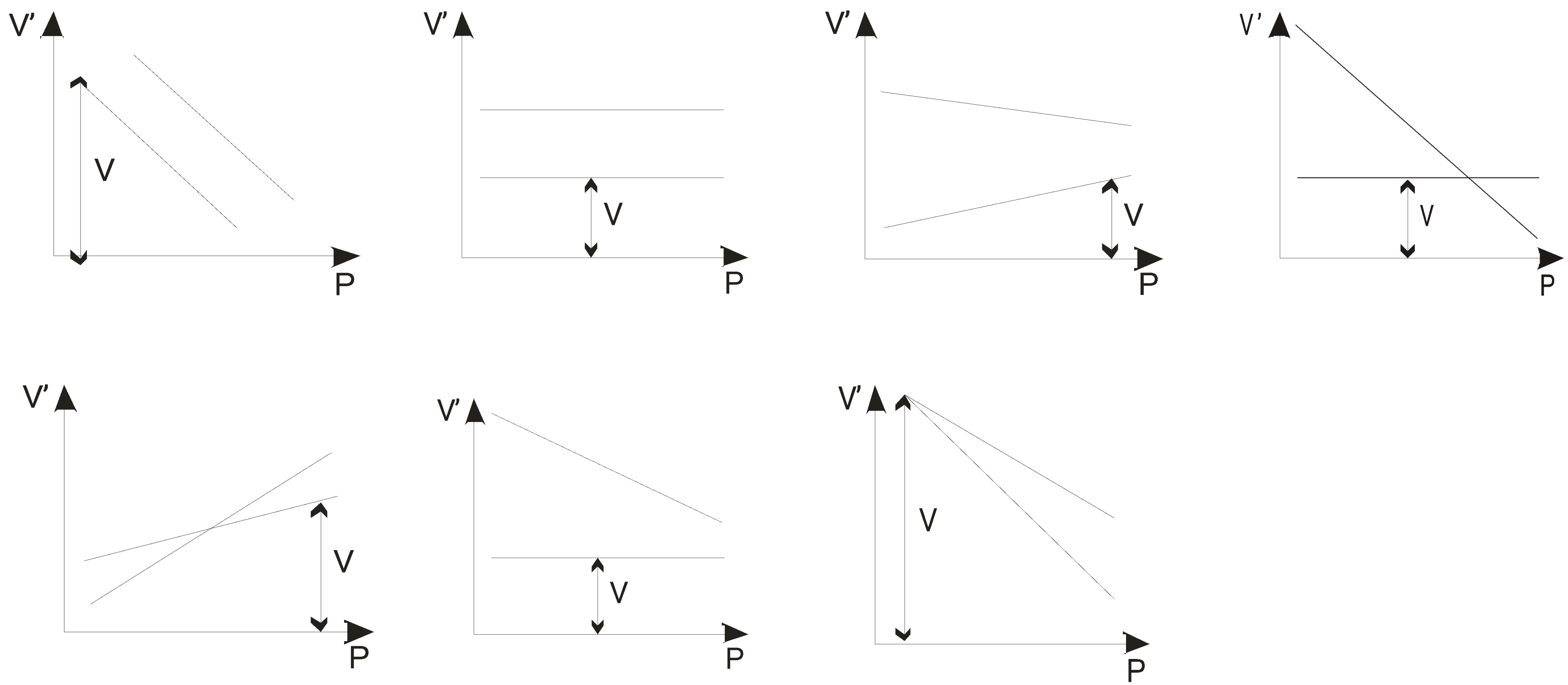
Геометрический способ решения игры(2х2)

$$V=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}$$

$$\begin{cases} a_{11}p_1+a_{21}(1-p_1)=V \\ a_{12}p_1+a_{22}(1-p_1)=V \end{cases}$$



Варианты решений:



Геометрическое решение игры (2xN) и (Mx2)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & q_3 & q_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 = 1 - p_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 4(1-p_1) = V \\ 2p_1 + 3(1-p_1) = V \\ 3p_1 + 2(1-p_1) = V \\ -p_1 + 6(1-p_1) = V \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2p_1 + 4 = V \\ -p_1 + 3 = V \\ p_1 + 2 = V \\ -7p_1 + 6 = V \end{cases}$$

$$p_1 + 2 = -7p_1 + 6$$

$$8p_1 = 4$$

$$p_1{}^* = \frac{1}{2}, \quad p_2{}^* = \frac{1}{2}$$

$$V = 2{,}5$$

$$3q_3 - q_4 = 2{,}5$$

$$3q_3 - 1 + q_3 = 2{,}5$$

$$4q_3 = 3{,}5$$

$$q_3^* = \frac{7}{8}, \quad q_4^* = \frac{1}{8}$$

Приведение игры к ЗЛП

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge V$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_i = \frac{p_i}{V}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1 \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{V} \to \min$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le V$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad q_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

$$y_j = \frac{q_j}{V}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1 \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = \frac{1}{V} \to \max$$

$$y_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

Статические игры (игры с “природой”)

$$
\begin{array}{cc}
 & \Pi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \Pi_n - \text{поведение природы} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \\
 & q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots q_n
\end{array}
$$

<u>Существуют два класса игр с природой:</u>

1. Первый класс, когда к каждому состоянию природы можно приписать некоторую вероятность.

- Второй класс, когда к каждому состоянию природы не можем приписать некоторую вероятность.

Принципы и критерии для выбора решения

1. **Критерий Байеса**

Оптимальной стратегией будет стратегия, в которой достигается

$$\max \overline{a_i}$$

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$$

2. **Принцип недостаточного основания Лапласа**

Если мы не знаем вероятности, то положим состояние природы равновероятными:

$$q_j = \frac{1}{n}$$

3. **Максиминный критерий Вальда**

Оптимальна та стратегия, в которой лежит элемент $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$.

Это пессимистический критерий (рассчитан на самый хороший вариант в самом плохом случае).

4. **Критерий минимального риска Сэвиджа**

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} - \text{риск игрока А}$$

$$\beta_j = \max a_{ij}$$

$$(r_{ij})_{mxn} - \text{матрица риска}$$

Риск – плата за отсутствие информации.

Оптимальна та стратегия, в которой лежит минимальный из максимальных рисков:

$$w = \min_i \max_j r_{ij}.$$

5. Критерий оптимизма – пессимизма Гурвица

$$\max_i[\lambda \min_j(a_{ij}) + (1-\lambda)\max_j(a_{ij})],\ где\ 0 \le \lambda \le 1$$

λ – коэффициент оптимизма

$\lambda=1$– крайний пессимизм$\rightarrow$критерий Вальда

$\lambda=0$ – крайний оптимизм

$\lambda=0,6$

Пример:

	B1	B2	B3	B4	L
A1	7	8	5	6	5
A2	4	3	2	2	2
A3	8	4	3	8	3
A4	7	1	9	12	1
B	8	8	9	12	

1. Критерий Байеса

	7	8	5	6	6,65
	4	3	2	2	2,8
	8	4	3	8	5,8
	7	1	9	12	**6,85**
P	0,25	0,3	0,2	0,25	

2. Максиминный критерий Вальда

7	8	5	6	**5**	*L*
4	3	2	2	2	
8	4	3	8	3	
7	1	9	12	1	

3. Критерий минимального риска Сэвиджа

	7	8	5	6
	4	3	2	2
	8	4	3	8
	7	1	9	12
B	8	8	9	12

Матрица рисков

1	0	4	6
4	5	7	10
0	4	6	4
1	7	0	0

4. Критерий Гурвица

				min	max
7	8	5	6	5	8
4	3	2	2	2	4
8	4	3	8	3	8
7	1	9	12	1	12

	min*0,5	max*0,5	+
$\lambda = 0{,}5$	2,5	4	**6,5**
	1	2	3
	1,5	4	5,5
	0,5	6	**6,5**