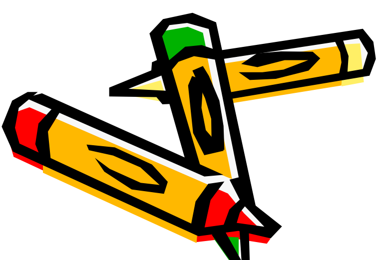
Работа учителя математики на уроке по подготовке к олимпиадам

При изучении темы «Объемы тел» (11 класс) можно предложить учащимся следующую задачу:

«Найдите объем пирамиды, у которой все боковые ребра образуют между собой углы по 90˚, а сами ребра имеют длины соответственно 6, 8, 10 см».



Олимпиадная задача по математике-

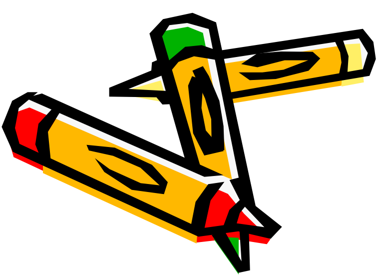
задача повышенной трудности, нестандартная по формулировке или по методам решения.

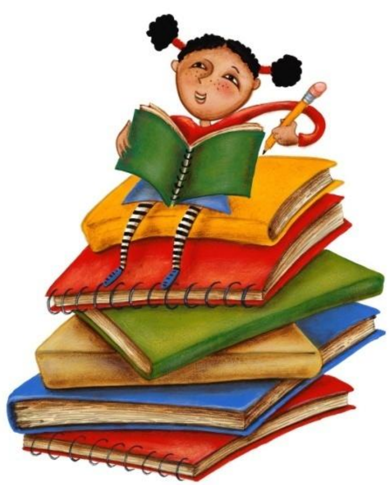
При изучении темы **<u>«Сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел»</u>** можно предложить учащимся следующую задачу:

1. Вычислите:

а) 90+89+88+ … +1+0-1-2- … -90-91-92-93;

б) 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + … + 2012 - 2013.





При изучении темы **«Степень с натуральным показателем»** можно предложить для решения учащимся следующие типы задач:

а) Сравните: 65^{23} и 255^{17}.

б) На какую цифру оканчивается число 2007^{2014}?

Решение.

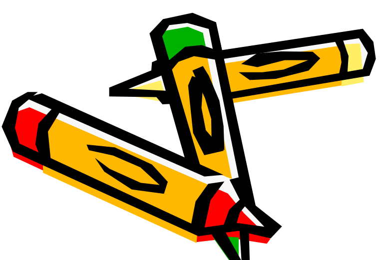
а) $65^{23} > 64^{23} = (2^6)^{23} = 2^{138}$.

А $255^{17} < 256^{17} = (2^8)^{17} = (2^{136})$.

Так как

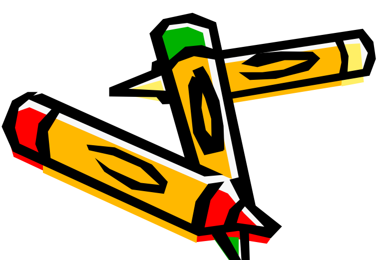
$65^{23} > 2^{138}$, $2^{138} > 2^{136}$,

а $2^{136} > 255^{17}$, то $65^{23} > 255^{17}$.



б) Так как последняя цифра числа 2007^{2014} определяется последней цифрой числа 72014, то найдем значения степеней 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 и т. д. и заметим закономерность: последней цифрой являются 7, 9, 3, 1, а далее они повторяются. Так как $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, то 7^{2014} оканчивается той же цифрой, что и 72, то есть цифрой 9.

Тогда и число 2007^{2014} оканчивается на цифру 9.



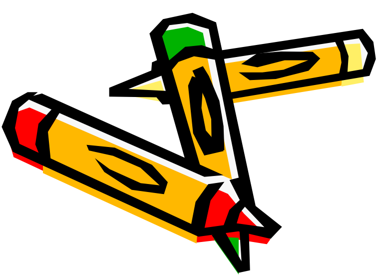
При изучении темы **«Алгебраические дроби»** можно решить следующую задачу:

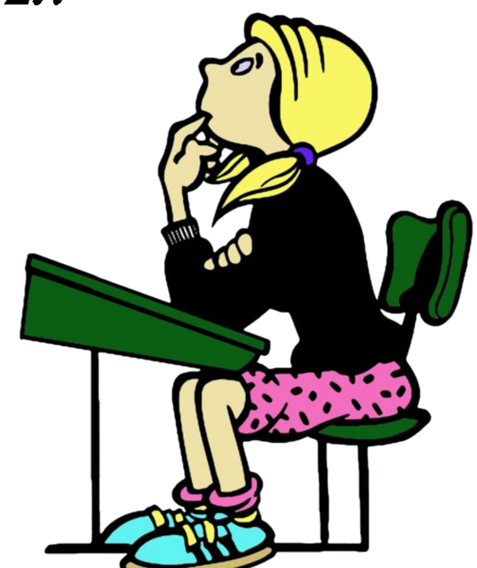
«Вычислите сумму:

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

если

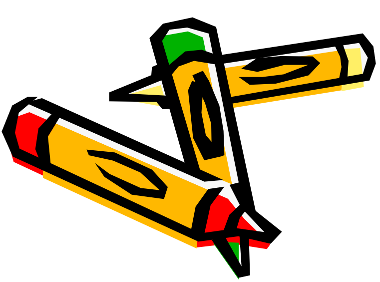
$$xyz = 1"$$





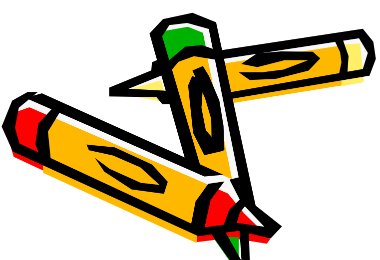
Решение.

Умножим числитель и знаменатель второй дроби на x, а третьей — на xy. Учитывая, что $xyz = 1$, получим у всех дробей одинаковые знаменатели. Сложим данные три дроби, в итоге получим дробь, у которой числитель и знаменатель равны одному и тому же выражению $1 + x + xy$. А значит, искомая сумма равна 1.



При изучении темы **«Квадратные уравнения»** можно решить следующую задачу:

«Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2014? А 2016?»



Решение.

У квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$, где a, b, $c \in Z$, дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Так как $D = 2014$, то найдем целые решения уравнения $b^2 - 4ac = 2014$. Так как правая часть уравнения делится на 2, то и левая часть должна делиться на 2, поэтому $b = 2k$, тогда $4k^2 - 4ac = 2014$. Разделив обе части уравнения на 2, получим: $2k^2 - 2ac = 1007$. В левой части уравнения получилось четное число, а в правой — число нечетное. Поэтому уравнение решений в целых числах не имеет.

Для числа 2016 имеем $b^2 - 4ac = 2016$, а так как $b = 2k$, то получим: $4k^2 - 4ac = 2016$. Разделив на 4 обе части уравнения, получим: $k^2 - ac = 504$. Данное уравнение имеет решения в целых числах, например: $a =1$, $c = 25$, $k = 23$. Тогда уравнение $x^2 + 46x + 25 = 0$

Имеет дискриминант $D = 2116\ \ 4\ \ 1\ \ 25 = 2016$.

При изучении **<u>арифметической прогрессии</u>** можно рассмотреть задачу: «Докажите, что если в бесконечную арифметическую прогрессию с положительной разностью входят числа 25, 43, 70 (не обязательно стоящие рядом), то в эту прогрессию входит и число 2005».

Решение.

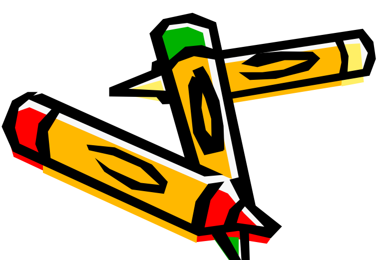
Так как 25, 43, 70 — члены арифметической прогрессии, то $25 = a_1 + kd$; $43 = a_1 + nd$; $70 = a_1 + md$. Из данных трех равенств следует, что $18 = (n - k)d$, $27 = (m - n)d$.

Из данных двух равенств получаем: $9 = (m - 2n + k)d$. Так как $2005 = 70 + 1935$, а $1935 = 215 \cdot 9 = 215(m - 2n + k)d$, то $2005 = 70 + 215(m - 2n + k)d =$
$= a_1 + md + 215(m - 2n + k)d =$
$= a_1 + (216m - 430n + 215k)d$ или $2005 = a_1 + ld$, где $l > 0$.

Решение текстовых задач

а) Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта *A* в пункт *B*. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалось проехать треть пути до *B*. Мотоциклист, доехав до *B*, без остановки поехал обратно в *A*. Кто приедет раньше: мотоциклист в *A* или велосипедист в *B*, если велосипедист после первой остановки больше в пути не останавливался?

Решение. Так как велосипедист стоял, дожидаясь, пока мотоциклисту останется проехать треть пути до *B*, то на треть всего своего пути велосипедист затратил времени меньше, чем мотоциклист на треть своего ($\frac{2}{3}AB$ от $2AB$ составляют $\frac{1}{3}$). Значит, и на весь путь велосипедист затратит времени меньше.



б) Одну овцу лев съел за 2 дня, волк — за 3 дня, собака — за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

Решение.

1) Так как лев съел овцу за 2 дня, то за 1 день он съел $\frac{1}{2}$ овцы.

2) Так как волк съел овцу за 3 дня, то за 1 день он съел овцы. $\frac{1}{3}$

3) Так как собака съела овцу за 6 дней, то за 1 день она съела $\frac{1}{6}$ овцы.

4) Вместе лев, волк и собака за 1 день съедят $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, то есть 1 овцу.

Старинная задача. «Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть три женщины».

Решение. Обозначив число учеников Пифагора за *x*, получим, что $\frac{1}{2}x$ изучает математику, $\frac{1}{4}x$ — музыку, а $\frac{1}{7}x$ пребывает в молчании. Так как, кроме того, есть еще 3 женщины, то получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$$

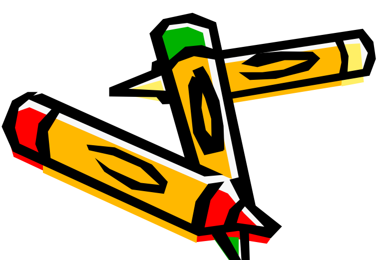
Решением данного уравнения будет $x = 28$. Следовательно, школу Пифагора посещают 28 учеников.

При изучении **геометрических построений** можно предложить задачи на построение углов заданной градусной меры через известный угол.

Например:

«Построить угол в 5°, если дан угол в 34°».

Решение. Если отложить 5 раз угол, равный 34°, то получится угол, равный 170°. Так как разность развернутого угла и угла, равного 170 ° будет равна 10 °, то разделим угол в 10 ° на 2 равных угла и получим угол в 5 °.



Задача с использованием дополнительного построения

Рассмотрим такую задачу:

«Дан параллелограмм $ABCD$. K — середина стороны BC, M — середина стороны CD, $AK = 6$ см, $AM = 3$ см, $\angle KAM = 60^\circ$. Найдите длину стороны AD. Ответ обоснуйте»

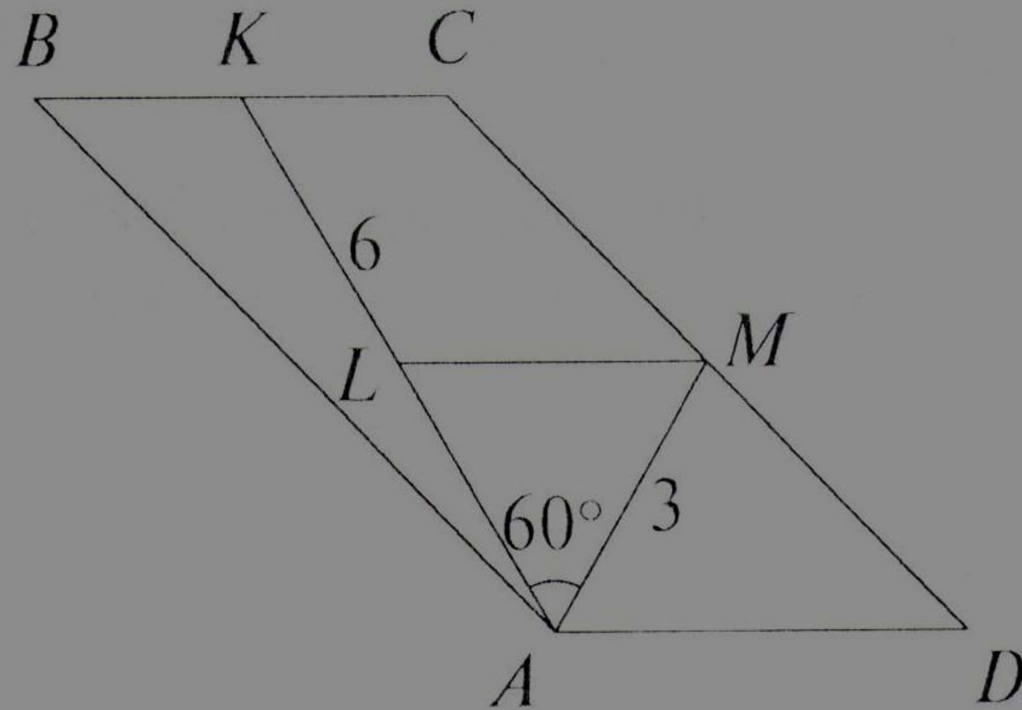


Рис. 1

Решение.

Задача имеет множество решений. Рассмотрим наиболее оригинальное. Проведем в трапеции $AKCD$ среднюю линию ML. Она будет параллельна AD и KC, причем $AL = 3$ см. Получается, что треугольник ALM – равнобедренный с углом при вершине 60°, поэтому он равносторонний, поэтому $LM = 3$ см. Обозначим $AD = 2x$, тогда $KC = x$. А тогда, используя свойство средней линии трапеции, имеем: $\frac{2x+x}{2}=3$, откуда $x = 2$, а значит, $AD = 4$ см.