«Геометрические приемы в алгебре»

Учитель математики МБОУ лицей «Технический» г.Самары

Сергеева Наталья Викторовна

Например, если из условия следует, что допустимые значения переменной **X** определяются неравенством **$|X| \leq 1$**, то удобны замены **$X=\sin a$, $a \in [-П/2;П/2]$** или **$X=\cos a$, $a \in [0;П]$.**

В случаях, когда переменная может принимать любые значения, используются замены **$X=\mathrm{tg}\, a$, $a \in [-П/2;П/2]$** или **$X=\mathrm{ctg}\, a$, $a \in [0;П]$**.

Решите уравнение

$\sqrt{(1 - x^2)} = 4x^3 - 3x$

Решение: $|x| \leq 1$ – из условия.

Пусть $x = \cos a$, $a \in [0;\Pi]$,

тогда получим $\sqrt{(1 - \cos^2 a)} = 4\cos^3 a - 3\cos a$

или $|\sin a| = \cos 3a$,

но в нашем случае $\sin a \geq 0$,

так что $\sin a = \cos 3a$,

или $\cos 3a = \cos(\Pi/2 - a) = 0$

продолжение на сл. слайде

Решая последнее уравнение, имеем:

$a = П/8 + Пк/2, к \in z$ или $a = 3П/4 + Пn, n \in z$

Условию $0 \le a \le П$ удовлетворяют три значения:

$a\ 1 = П/8$; $a\ 2 = 5П/8$; $a\ 3 = 3П/4$

Поэтому

X1 $= \cos(П/8) = \sqrt{(1+\cos п/4)/2} =$

$= \sqrt{(1+ (\sqrt{2}/2))/2} = 1/2 \sqrt{(2+ \sqrt{2})}$

X2 $= \cos(5П/8) = -\sqrt{(1+\cos(5п/4))/2} =$

$= -\sqrt{(1-\cos п/4)/2} = - 1/2 \sqrt{(2- \sqrt{2})}$

X3 $= \cos 3П/4 = -\cos П/4 = - (\sqrt{2})/2$

Ответ: $-(\sqrt{2})/2$; $-1/2 \sqrt{(2- \sqrt{2})}$; $1/2 \sqrt{(2+ \sqrt{2})}$.

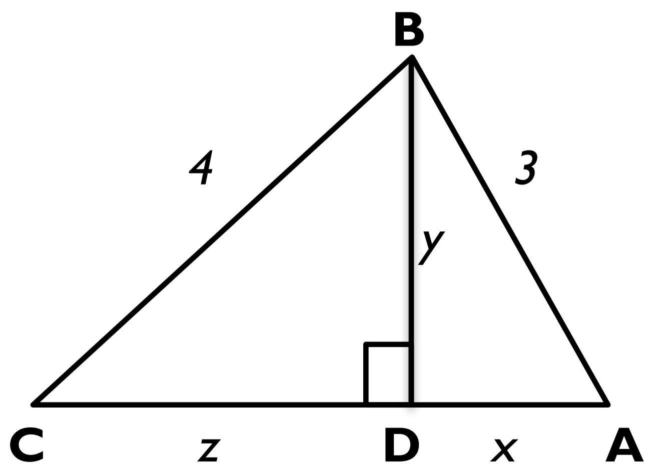
Негеометрические задачи и их геометрическое решение.

<u>Дано:</u>

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 9 \\ Y^2 + Z^2 = 16 \\ Y^2 = XZ \end{cases}$$

<u>Найти:</u>

XY+YZ



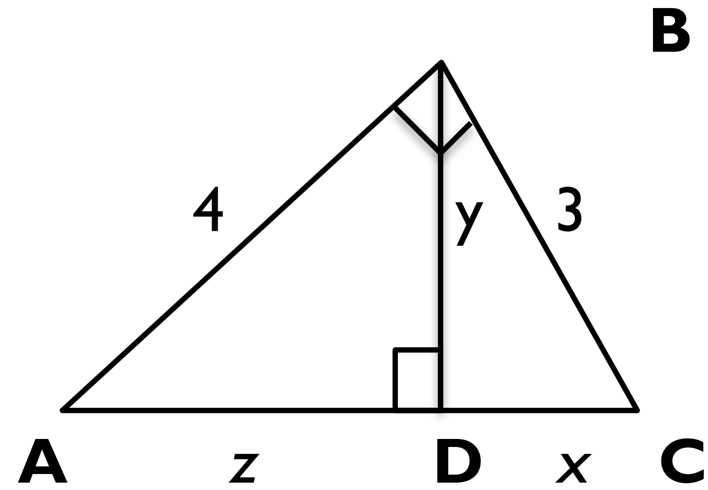
<u>Решение:</u> т.к. X>0, Y>0 и Z>0, то задачу можно интерпретировать геометрически. По теореме, обратной теореме Пифагора, числа x, y и 3 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы тр. ABD (угол D прямой). Тогда, рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y, z и 4 являются соответственно длинами катетов и гипотенузы тр. CBD (угол D прямой).

Третье уравнение системы разрешает утверждать, что число Y есть среднее пропорциональное чисел X и Z. Тогда по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, угол ABC прямой.

Теперь, чтобы ответить на главный вопрос задачи, рассмотрим выражение XY+YZ.

$$XY + YZ = (X + Z) * Y =$$

$$= 2S_{ABC} = 3 * 4 = 12.$$

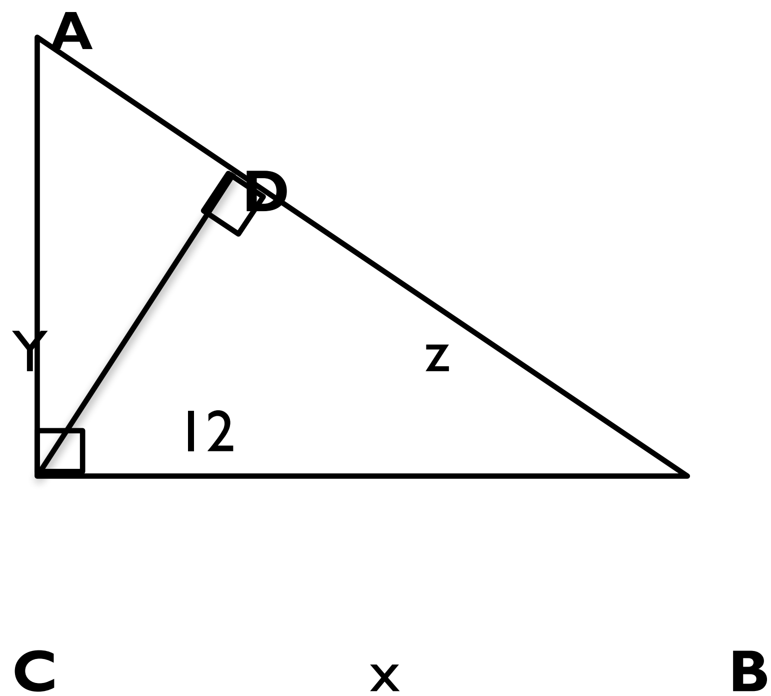


<u>Ответ:</u> xy + yz = 12

Дано:

$$\begin{cases} X+Y+Z = 60 \\ X^2 + Y^2 = Z^2 \\ XY/Z = 12 \end{cases}$$

Решить систему уравнений.



Решение: ***1)*** Если $X>0, Y>0$ и $Z>0$, то существует тр. ABC, с прямым углом C, у которого X и Y – катеты, а Z – гипотенуза.
Периметр этого треугольника равен 60, а длина его высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна 12.
Из первого уравнения получаем, что $(x+y)^2 = (60-z)^2$, а из второго и третьего уравнений: $(x+y)^2 = z^2 + 24z$. Приравняв правые части последних уравнений, заметим, что $144z = 60^2$, т.е. $z = 25$

Далее наша система позволяет получить другую:

$$\begin{cases} X + Y = 35 \\ XY = 300 \end{cases}$$

В этой системе одно неизвестное равно 15, а второе 20. Значит, исходная система имеет решения: (15; 20; 25) и (20; 15; 25).

2) В условии системы не оговаривается, что x, y и z – положительные числа. Из третьего уравнения следует, что два из трех неизвестных могут быть отрицательны. Однако по ходу решения мы убеждаемся, что $Z>0$. Значит, могут быть только $X<0$ и $Y<0$. Но это невозможно, так как $X + Y = 35$

<u>Ответ:</u> (15; 20; 25), (20; 15; 25).

Спасибо за внимание!