Лекция 3.8. **Функциональные ряды.**

Определение:

Возьмём функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in E \subset R$ и построим по ней ещё одну последовательность $\left\{S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Пара последовательностей

$$\left(\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \left\{S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right\}_{k=1}^{\infty}\right)$$

называется функциональным рядом и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

<u>Определение:</u>

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется поточечно сходящимся (или просто сходящимся) на E, если он сходится для любого $x \in E$.

<u>Определение:</u>

Сходящийся на $E \subset R$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ называется равномерно сходя – щимся, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \;\; \forall k > N_\varepsilon \;\; |S_k(x) - S(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in E.$$

Обозначается равномерная сходимость так: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E.

<u>Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \;\; \forall k, m > N_\varepsilon \quad \left| \sum_{n=k}^{m} f_n(x) \right| < \varepsilon \;\; \forall x \in E.$$

<u>Следствие (необходимый признак Коши):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x)| \rightrightarrows 0 \text{ на } E.$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов):

Если для $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на $E \subset R$ $\exists$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, такой, что $|f_n(x)| \le a_n \; \forall x \in E$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E.

Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов):

Рассмотрим на $E \subset R$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x).$$

Признак Абеля: если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows B(x)$ на $E, \exists C\colon\ |a_n(x)| < C\ \ \forall n\ \ \forall x \in E$ ($a_n(x)$ равномерно ограничена на E) и $a_n(x)$ монотонна по n, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Признак Дирихле: если $\exists C: \ \forall N \ \forall x \in E \ \left|\sum_{n=1}^{N} b_n(x)\right| < C$, $a_n(x)$ монотонна по n и $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на E,

то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

<u>*Теорема:*</u>

$f_n(x) \in C[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $(a,b) \Longrightarrow S(x) \in C[a,b]$.

Теорема:

$$f(x) \in C[a,b] \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на}[a,b] \Longrightarrow \ \forall x_0, x \in [a,b] \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$$

Теорема:

$$f_n(x) \in C^1[a,b], \exists x_0 \in [a,b], \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) - \text{сходится},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \rightrightarrows G(x) \text{ на}[a,b] \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \rightrightarrows S(x) \text{ на}[a,b] \text{и } S'(x) = G(x).$$

Лекция 3.8. ***Степенные ряды.***

Определение:

Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ называется степенным рядом с центром разложения в точке x_0, а числа a_n называются коэффициентами степенного ряда.

Замечание:

Сделаем замену переменной $t = x - x_0$. Тогда степенной ряд будет выглядеть так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n .$$

Далее без ограничения общности будем рассматриват

<u>Утверждение (теорема Адамара):</u>

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в какой $-$ то точке x_1, то он сходится $\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в какой $-$ то точке x_2, то он расходится $\forall x \in (-\infty, -|x_2|) \cup$
$\cup\ (|x_2|, +\infty)$.

Следствие:

Пусть $A = \sup\limits_{\substack{\text{такие } x_1\text{, что} \\ \text{ряд сходится}}} \{|x_1|\}, B = \inf\limits_{\substack{\text{такие } x_2\text{, что} \\ \text{ряд расходится}}} \{|x_2|\}$

$\Longrightarrow \quad A = B$, и $\forall x \in (-A, A)$ ряд сходится,

а $\forall x \in (-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ ряд расходится.

Определение:

Число A из следствия называется радиусом сходимости ряда и обозначается R.

Если множество сходимости состоит только из центра разложения, то $R = 0$.

Если множество сходимости совпадает со всей числовой прямой, то $R = +\infty$.

Если $R \in (0, +\infty)$, то интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда