Чётные и нечётные функции. Периодические функции.

Фомина Л.В.

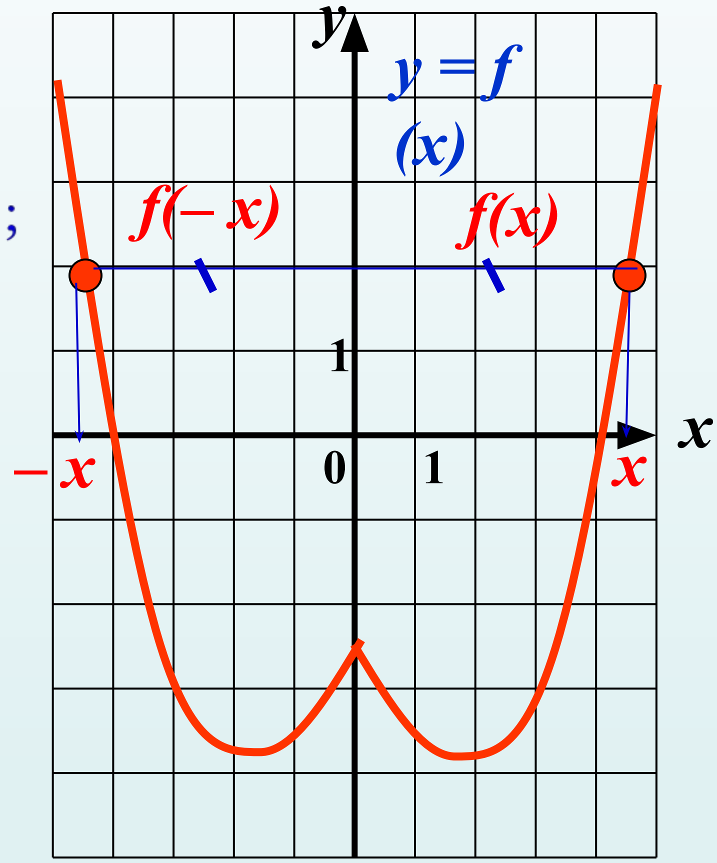
Чётная функция

Функция **y = f (x)** с D(f) называется **чётной,** если:

1) D(f) симметична относительно нуля, т.е. если x ϵ D(f), то и (-x) ϵ D(f);

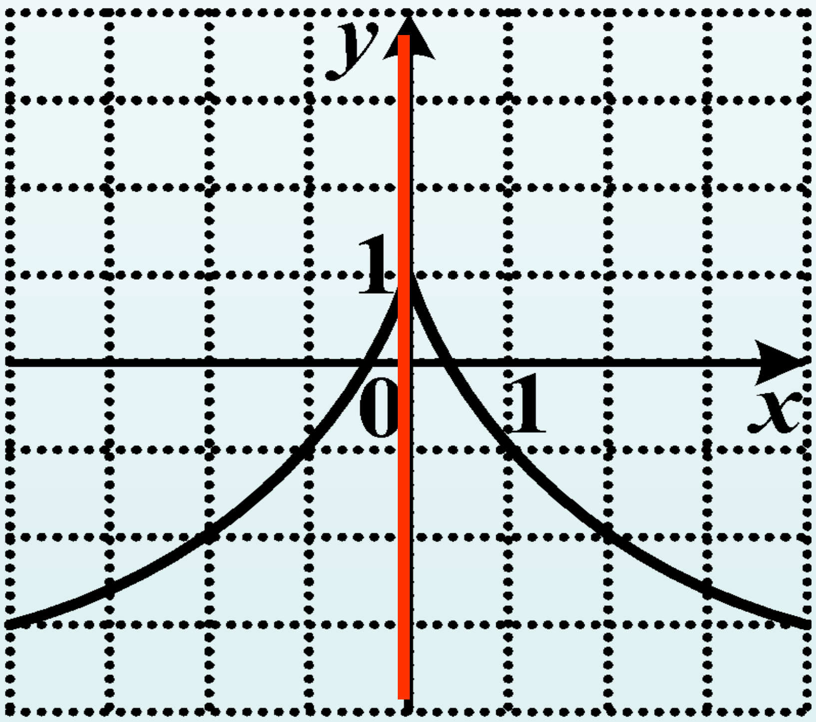
2) **f (– x) = f (x)**

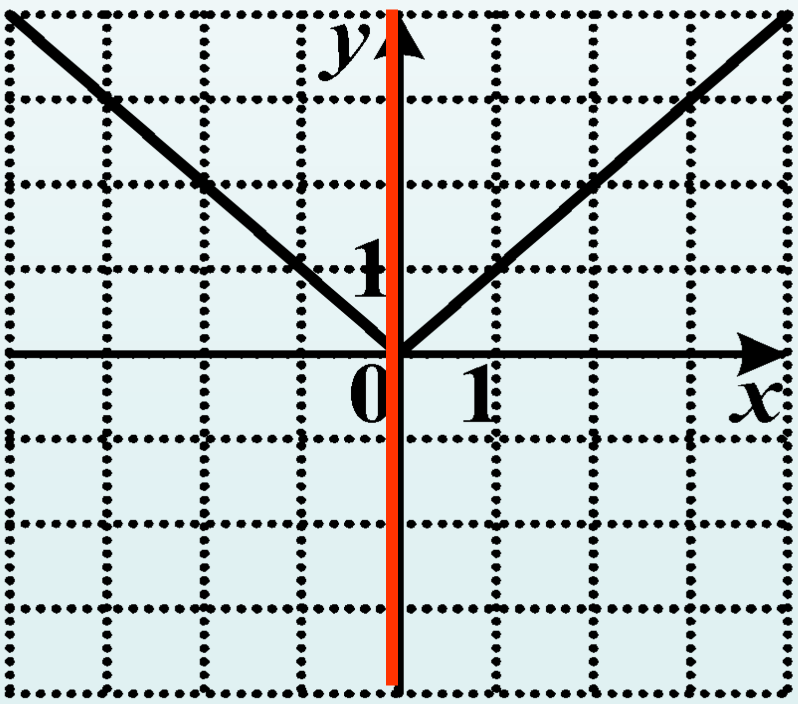
График чётной функции симметричен относительно оси ординат (OY)



Четные функции

Их графики симметричны относительно оси OY.
(Мысленно перегибаем координатную плоскость по оси OY , ветви графика должны совпасть)





Примеры чётных функций

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$y(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2=\frac{1}{2}x^2$$

$$y(-x)=y(x)$$

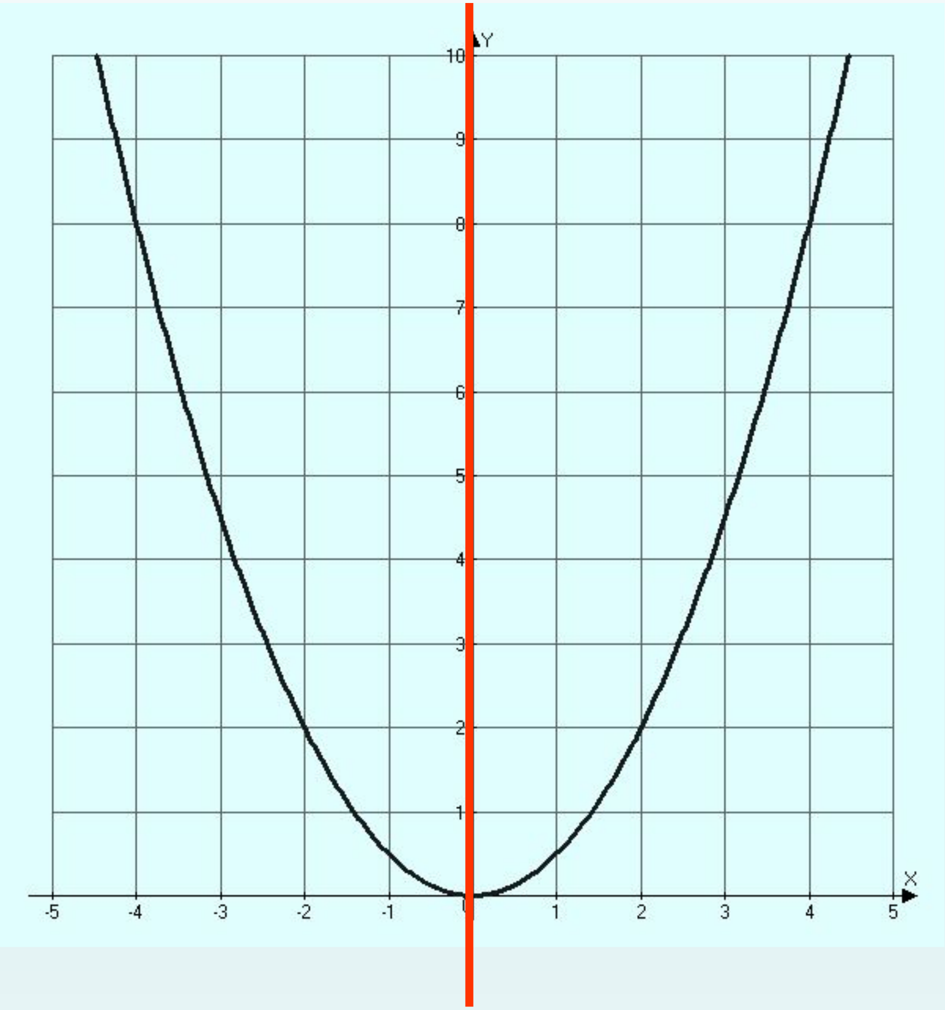


График данной функции симметричен относительно оси OY

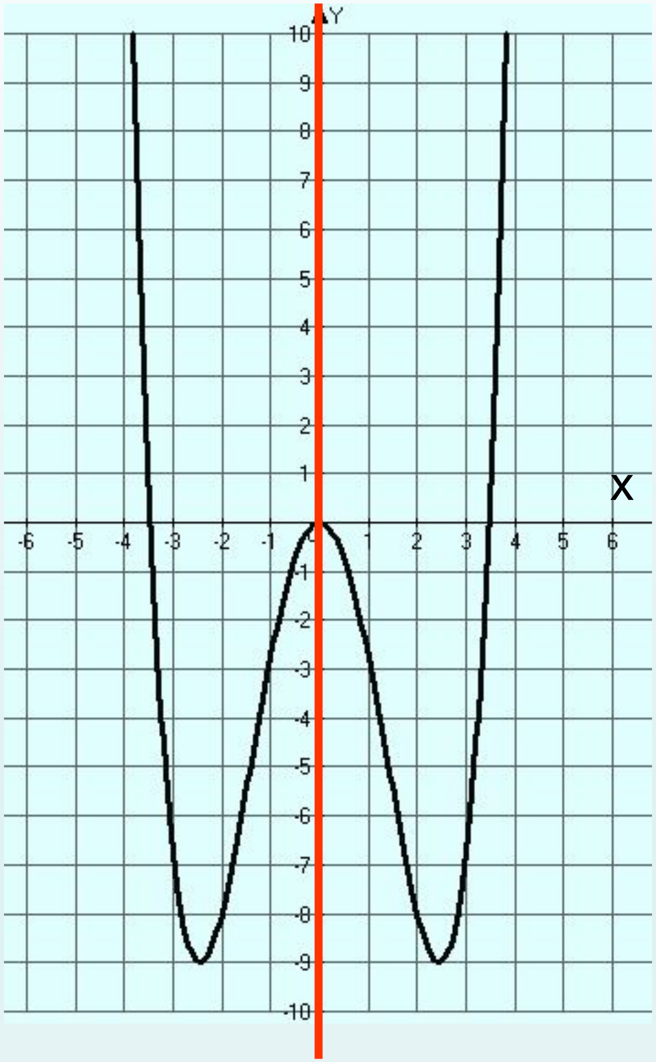
Примеры чётных функций

$$y(x) = 0,25x^4 - 3x^2$$

$$y(-x) = 0,25(-x)^4 - 3(-x)^2 =$$
$$= 0,25x^4 - 3x^2$$

$$y(-x) = y(x)$$

График данной функции симметричен относительно оси OY



Нечётная функция

Функция **y = f (x)** с D(f) называется **чётной,** если:

1) D(f) симметична относительно нуля, т.е. если x ϵ D(f), то и (-x) ϵ D(f);

2) f (– x) = f (x)

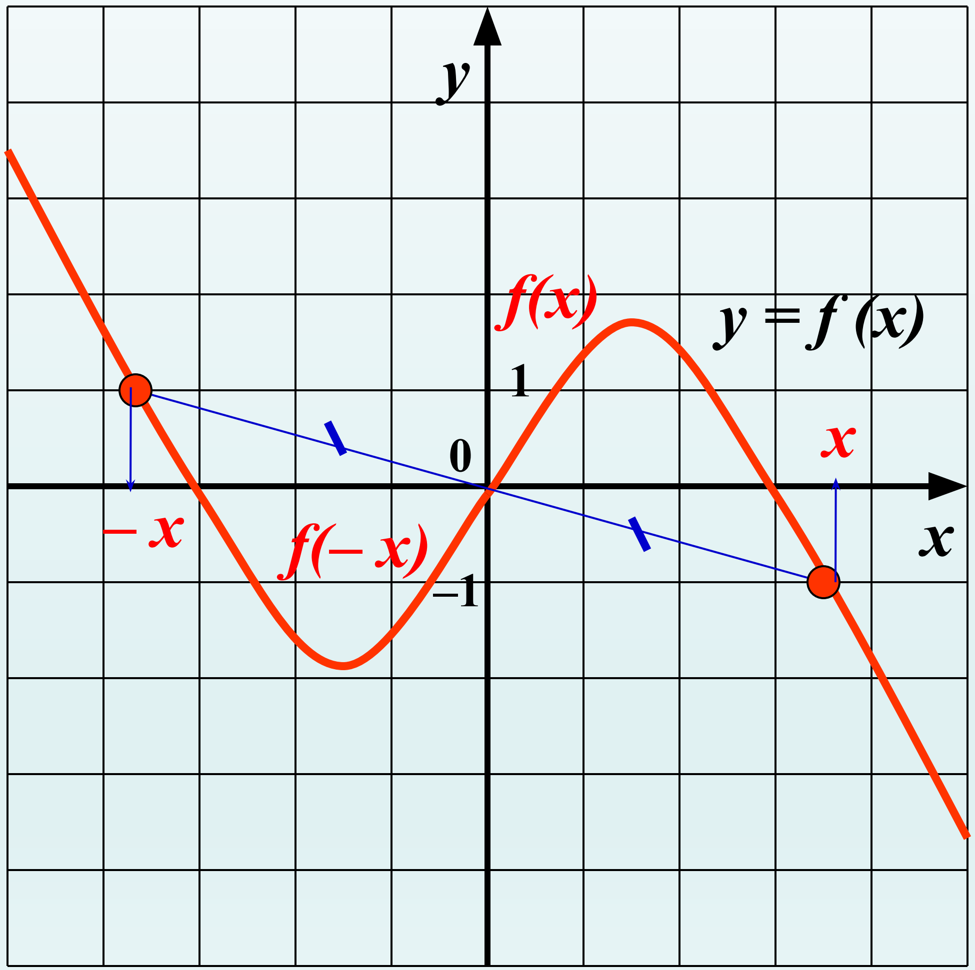
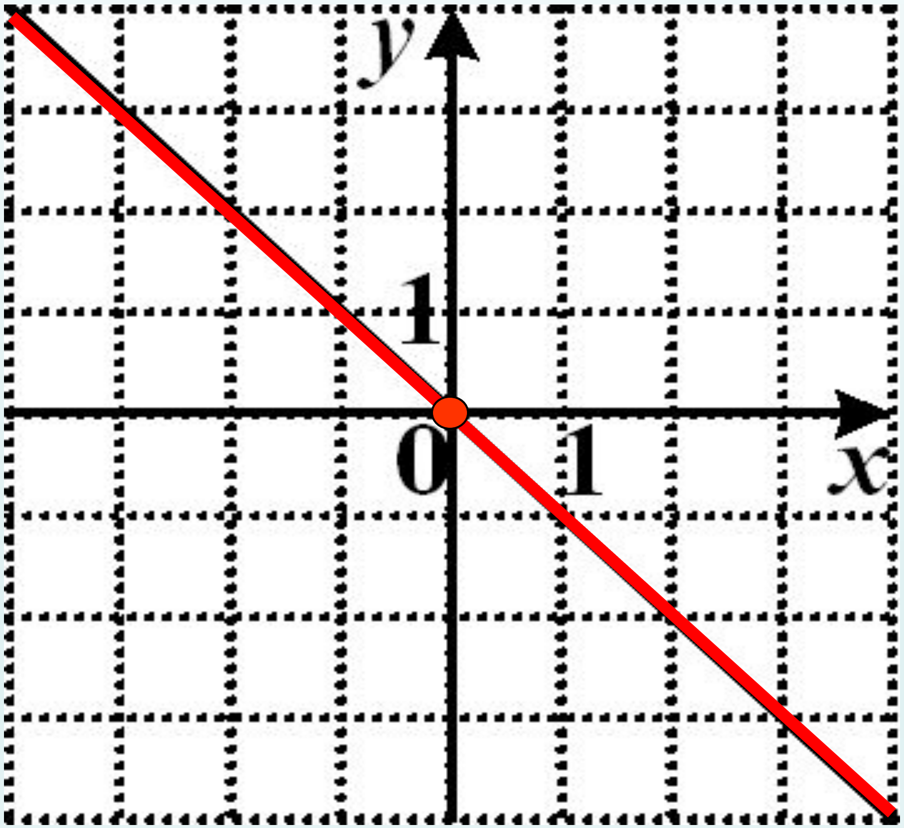
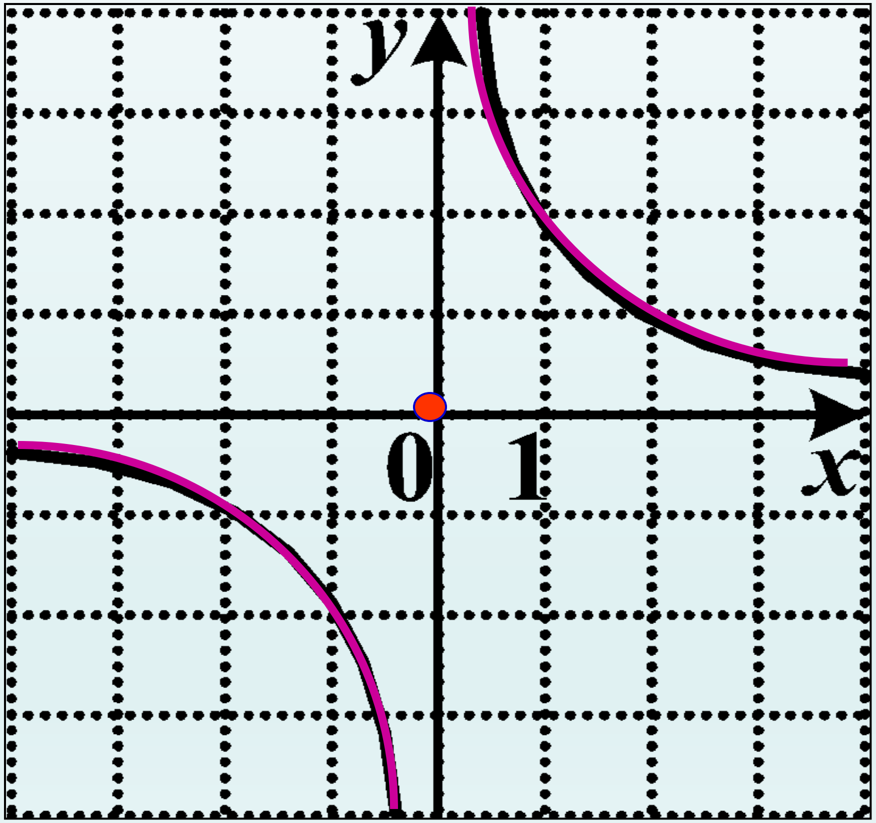


График нечётной функции симметричен относительно начала координат O(0;0)

Нечетные функции

Их графики симметричны относительно начала координат.
(Мысленно «забиваем» гвоздь в точку О(0;0) и поворачиваем на 180°, ветви должны совпасть)





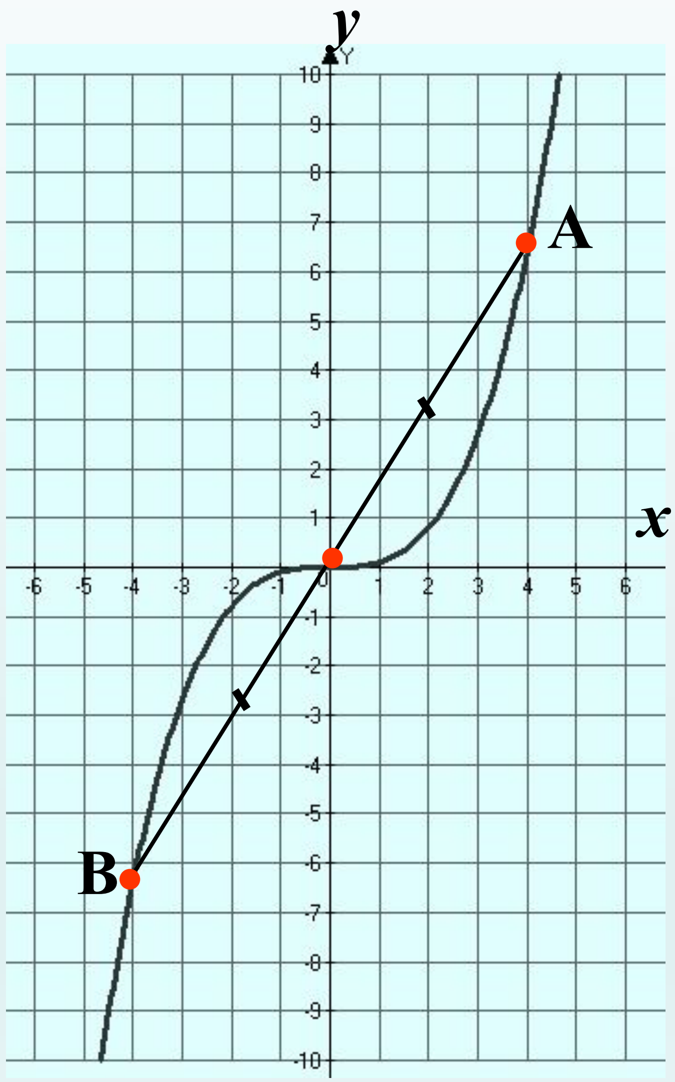
Примеры нечётных функций

$$y(x) = \frac{1}{10}x^3$$

$$y(-x) = \frac{1}{10}(-x)^3 = -\frac{1}{10}x^3$$

$$y(-x) = -y(x)$$

График данной функции симметричен относительно начала координат O(0;0).



Примеры нечётных функций

$$y(x)=\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{2}x$$

$$y(-x)=\frac{1}{40}(-x)^5-\frac{1}{2}(-x)=$$

$$=-\frac{1}{40}x^5+\frac{1}{2}x=-\left(\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{2}x\right)$$

$$y(-x)=-y(x)$$

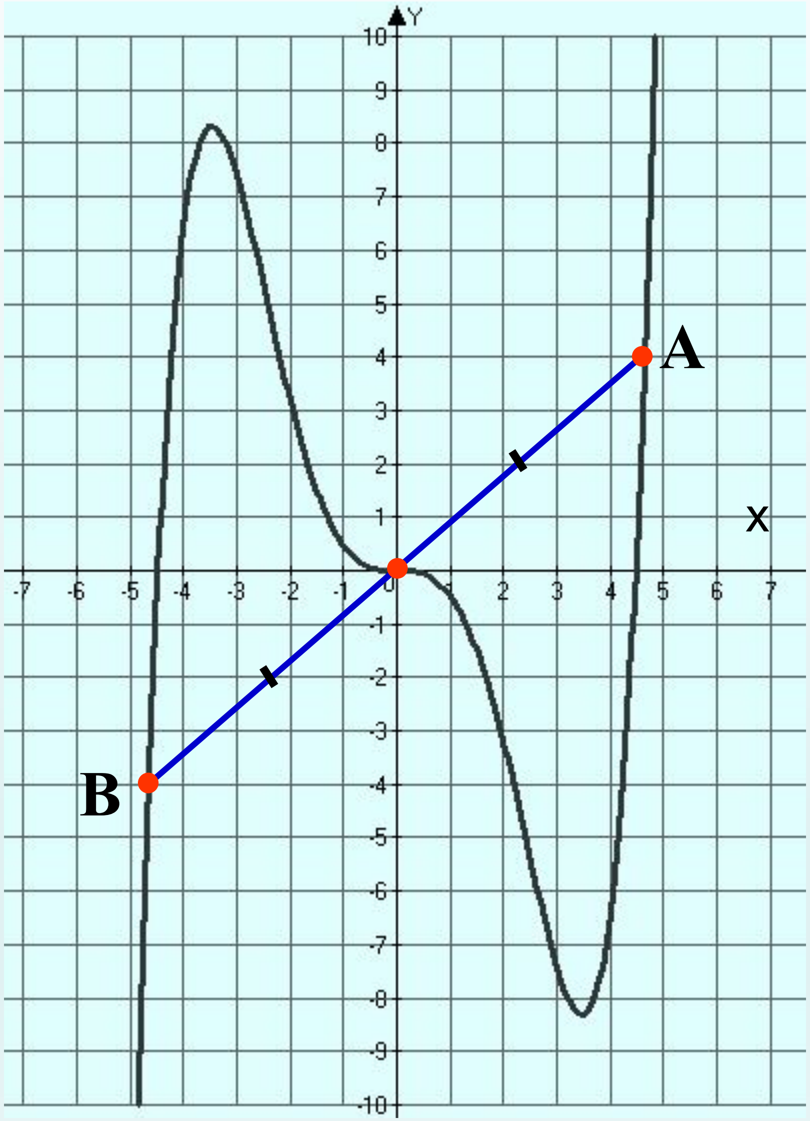
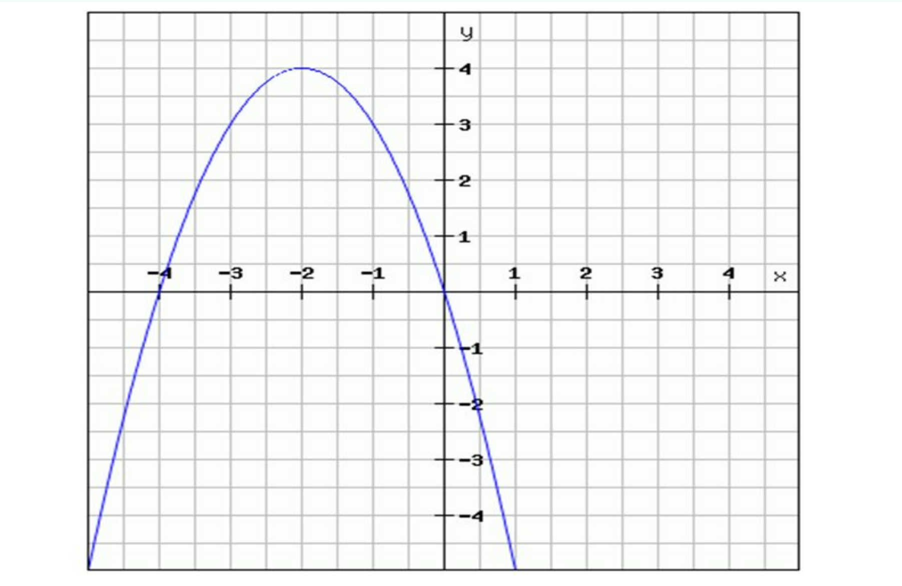
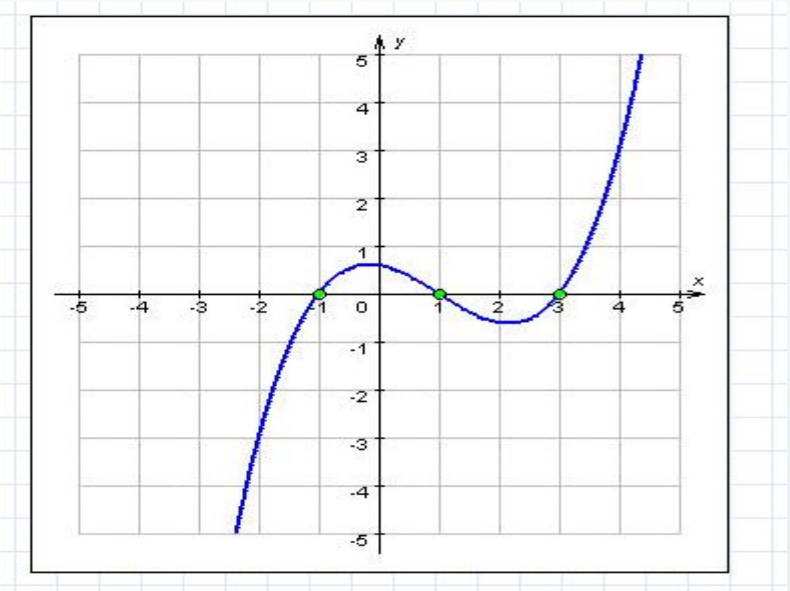
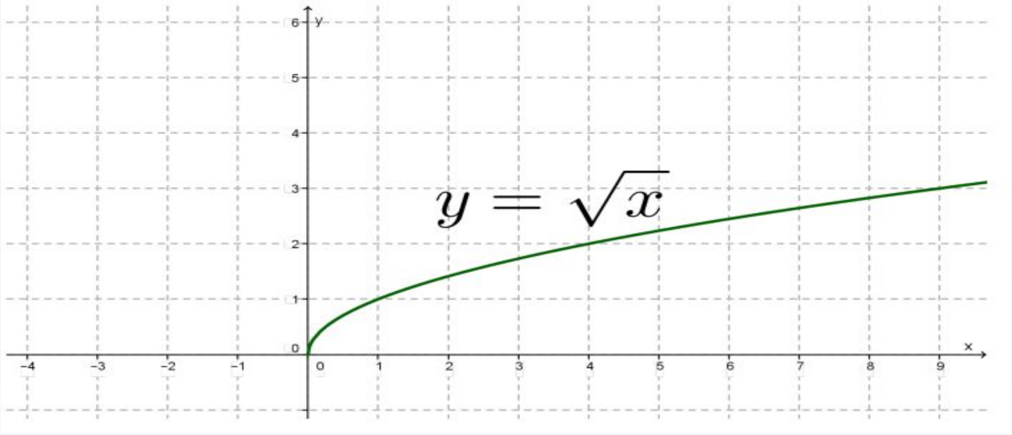


График данной функции симметричен относительно начала координат O(0;0).

Не всякая функция является четной или нечетной. Функции общего вида являются ни четными, ни нечетными.







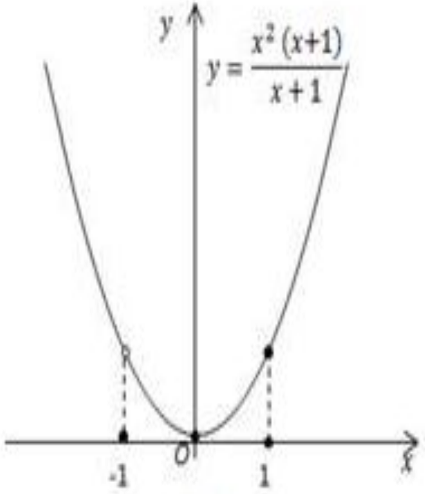
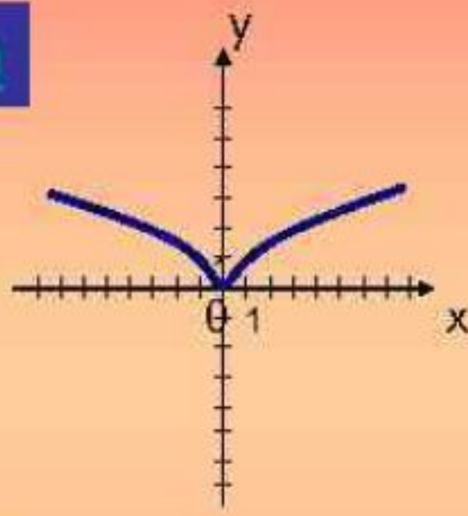


Рис.4

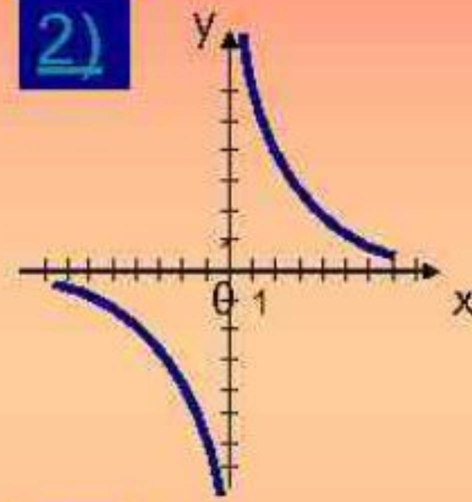
В точке $(-1;0)$ функция не существует, а в точке $(1;0)$ – существует. Область определения несимметрична относительно нуля, значит $y = \frac{x^2(x+1)}{x+1}$ – функция общего вида.

Задание 1: ***Укажите рисунок, на котором изображен график четной функции.***

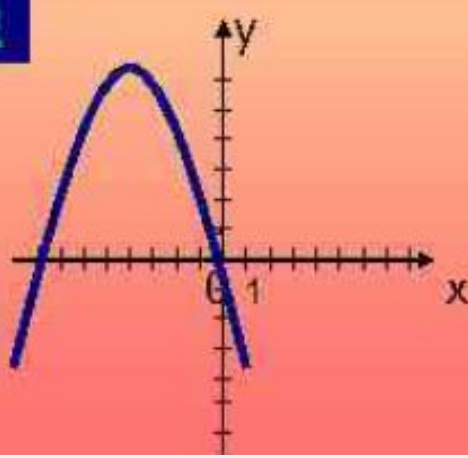
1)



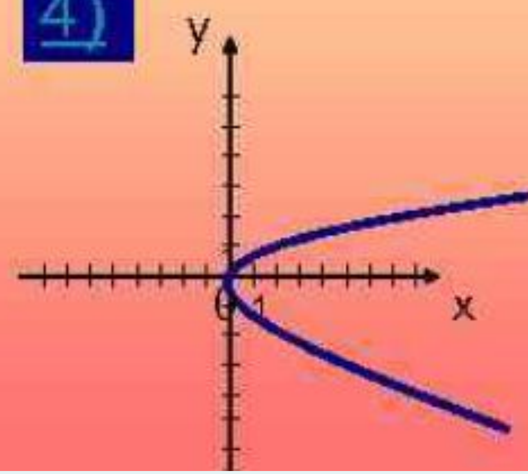
2)



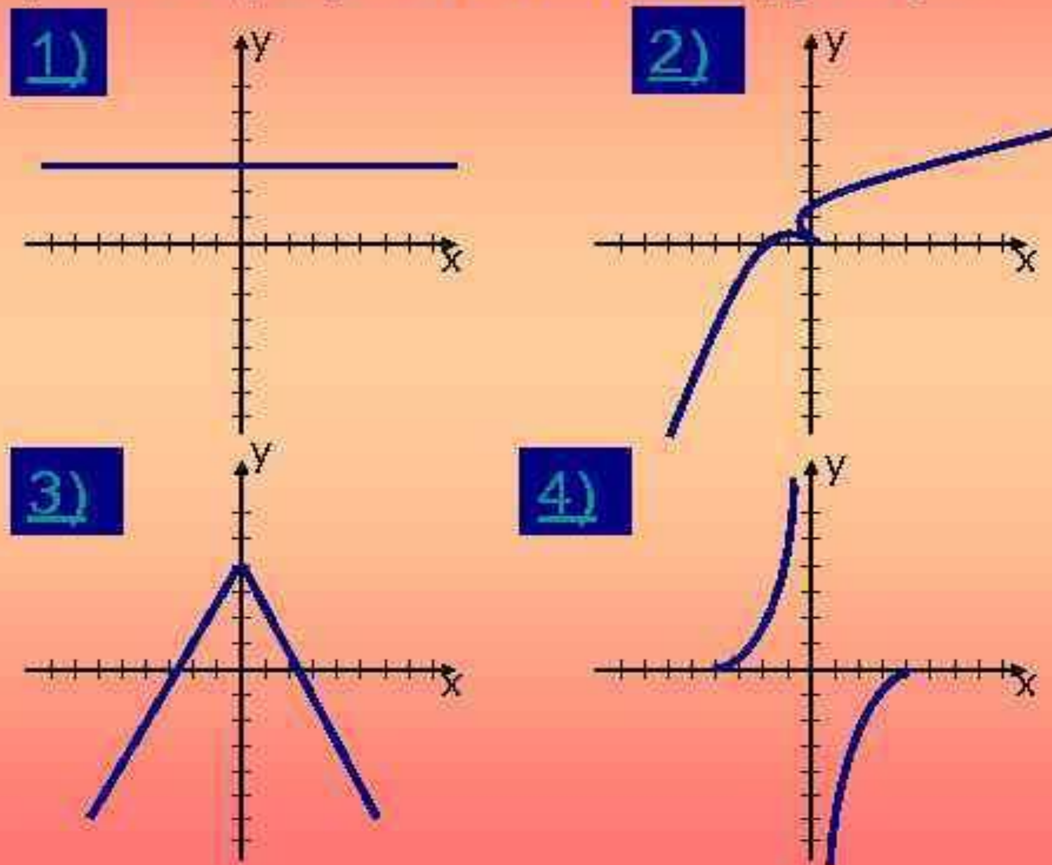
3)



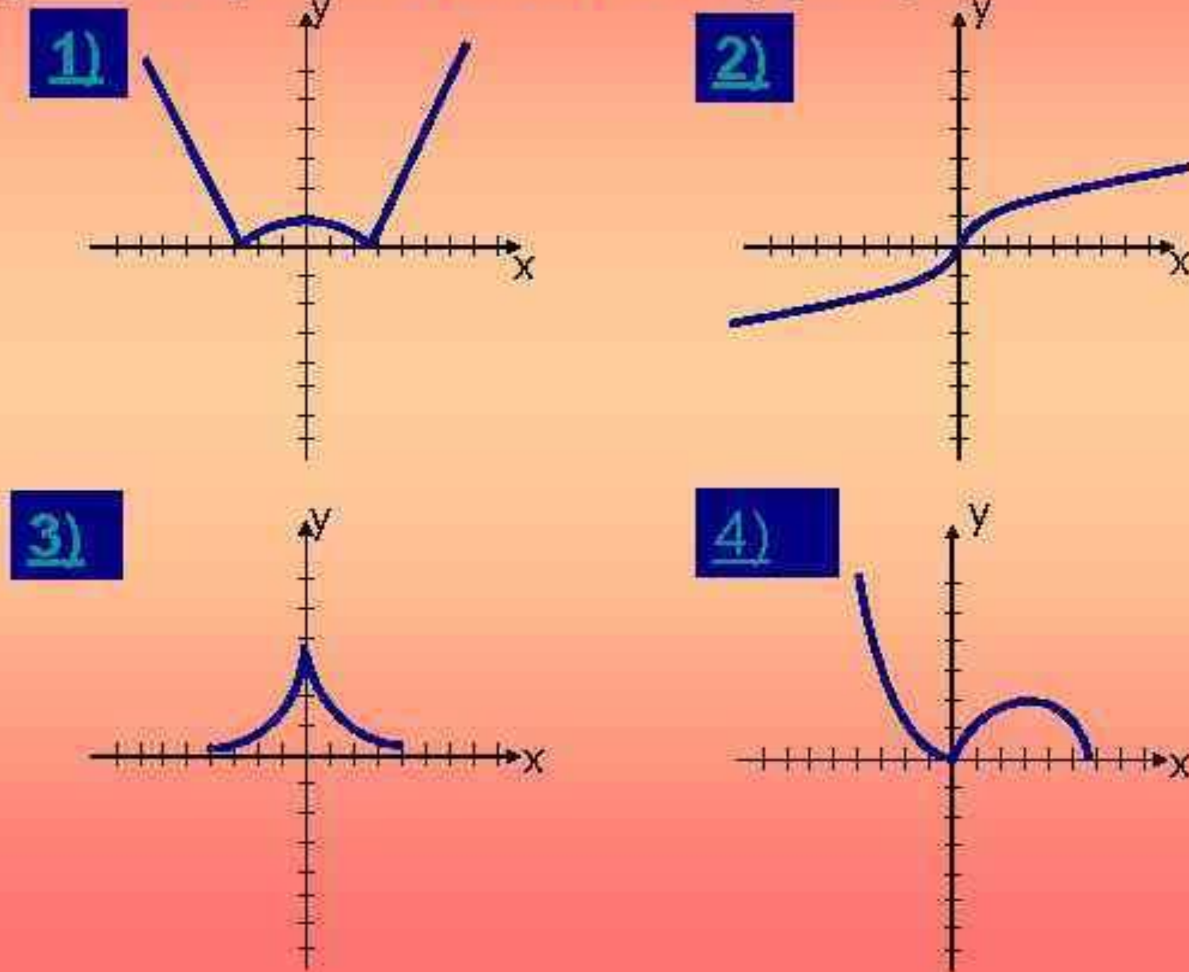
4)



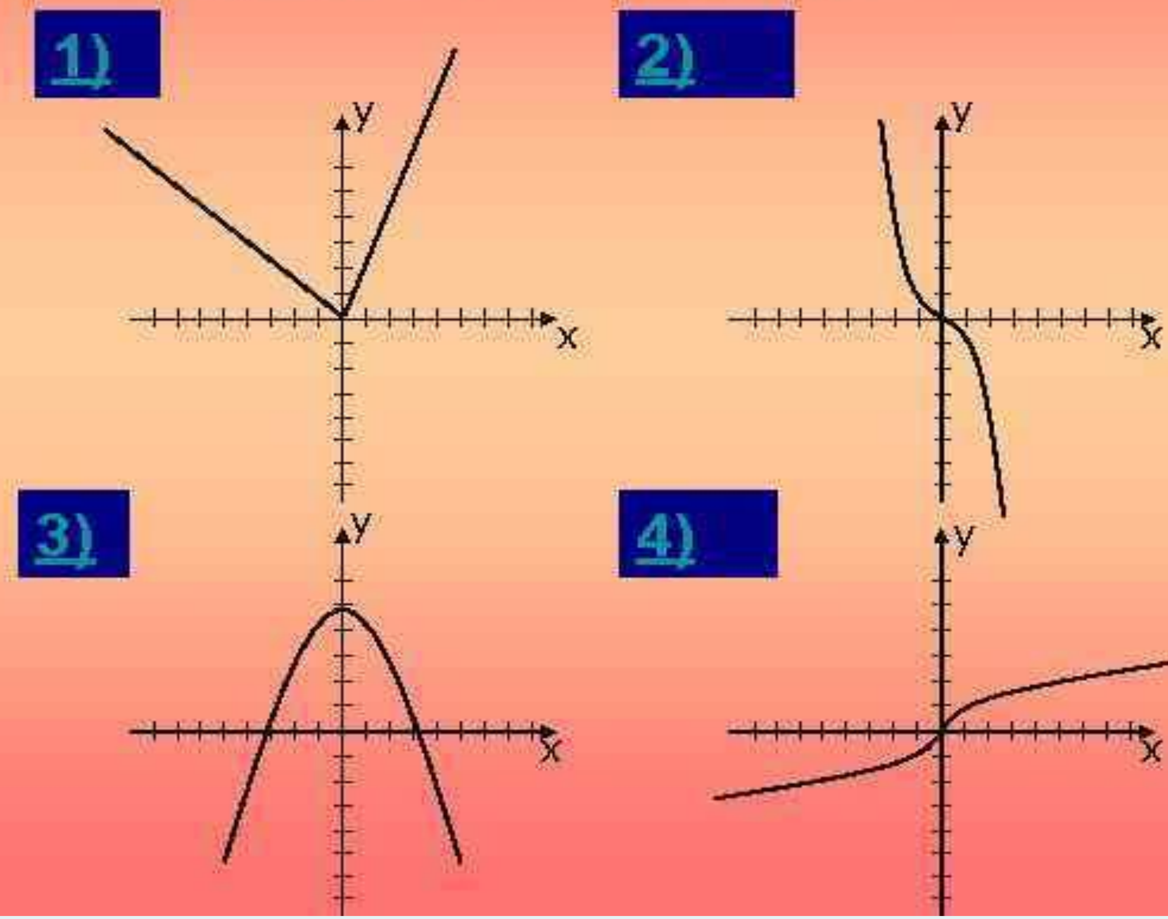
Задание 2: ***Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.***



Задание 3: ***Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.***

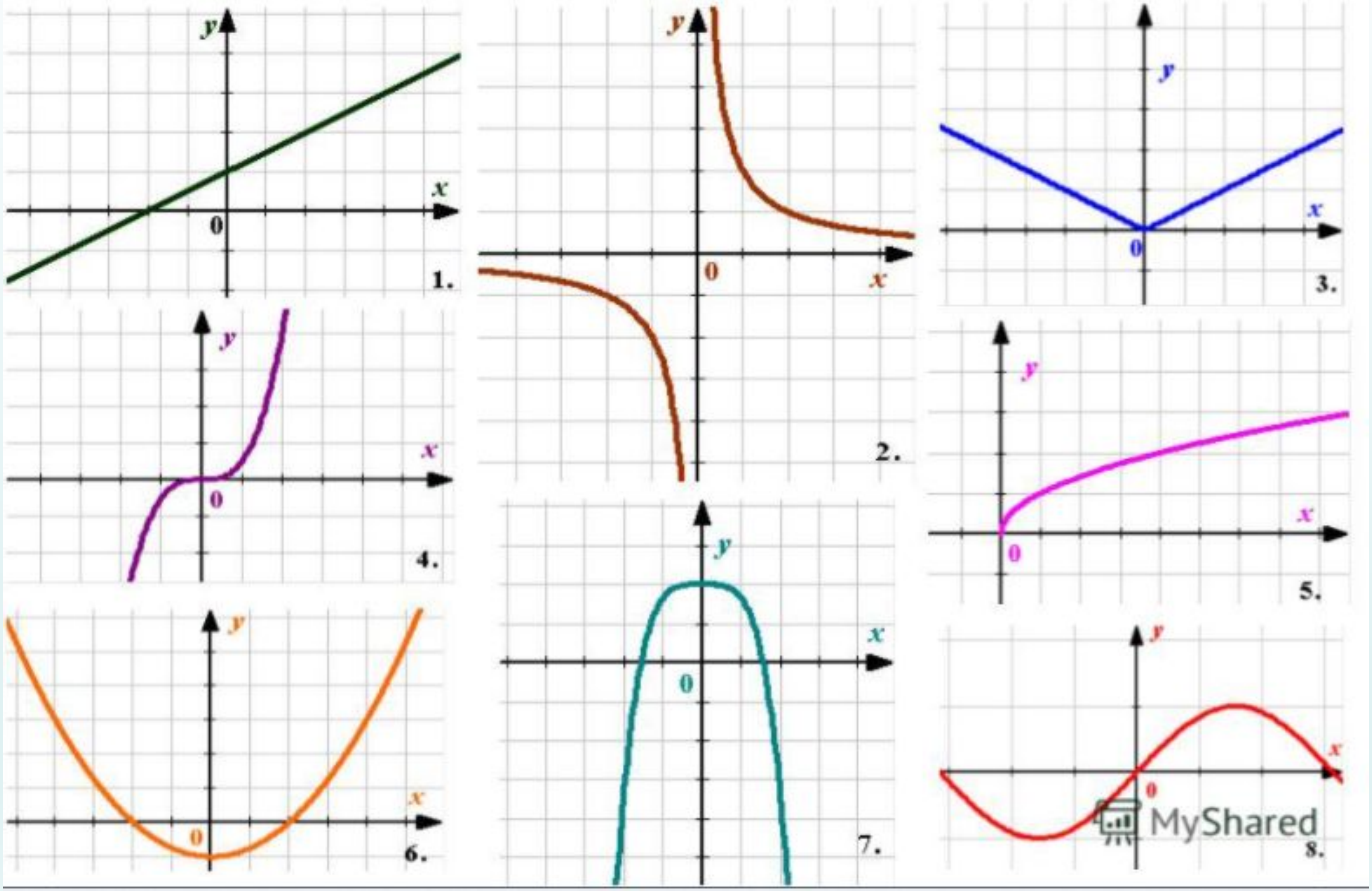


Задание 4: ***Укажите рисунок, на котором изображен график четной функции.***



Укажите графики функций

I – четных. **II – нечетных.**



Ответь на вопросы:

- **Может ли быть чётной или нечётной функция, областью определения которой является:**

  а) промежуток [- 2; 5] ;

  б) промежуток (- 7; 7);

  в) объединение промежутков [- 10; - 2] U [2; 10] .

- **а) Функция f – чётная, f (3) = 25. Найти f (- 3).**

  б) Функция f – нечётная, f (- 8) = 71. Найти f (8).

Исследовать на чётность функцию

а) $y = 3x^2 + 7$;

б) $y = x^3$;

в) $y = x^3 + 7$.

Стихотворение о четных и нечетных функциях

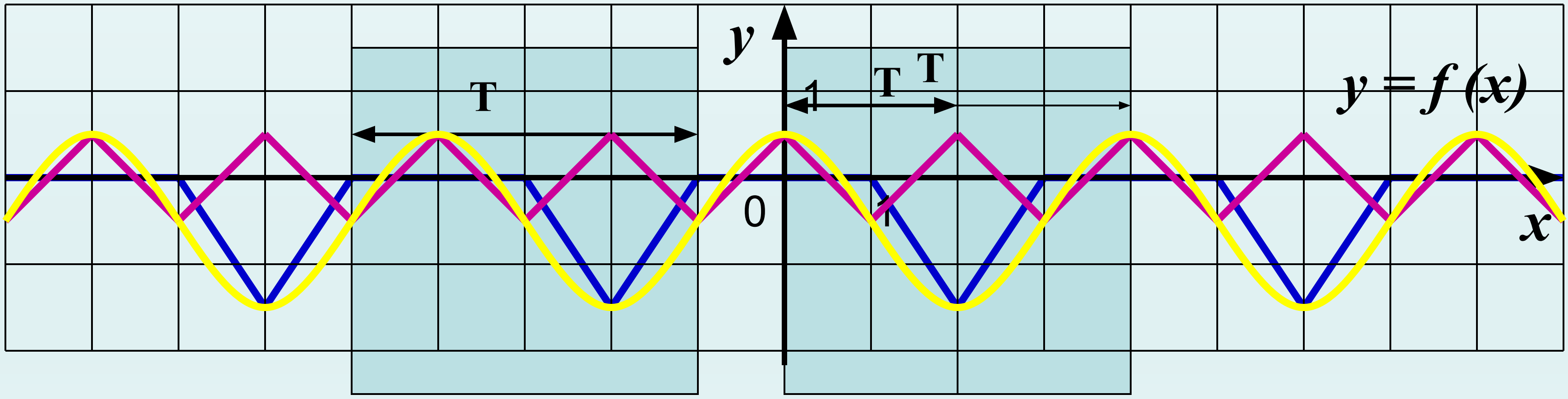
Жили- были 2 сестры параболы
Старшая, четная квадратичная,
Добродушная, симпатичная,
Относительно оси y
симметричная.
Младшая, нечетная кубическая,
Всегда капризная и недовольная,
Относительно точки О,
симметричная.
Стала спрашивать квадратичная:
«Почему ты злишься, сестра
кубическая?»:
Та кричит ей: «Смотри-
Ты и шире меня и полнее,
А я тоньше тебя и длиннее.»
Но ответила сестра:
«Я же старше, я четна.»
И сказала еще нежней:
«Неизвестно, кто нужней!»
Но настала ночь, и к сестре,
Пробираясь по доске, младшая
Решила: «Надо помириться.»
И относительно оси х,
Как в зеркале, отобразиться,
И в свою сестру сразу
превратиться.

Домашнее задание:

Учебник: № 57; № 58

Периодичность функции

Графики периодических функций:



Определение

Функция $y=f(x)$ называется периодической , если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения этой функции значения $x + T$ и $x – T$ также принадлежат области определения и выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

T - период функции $y=f(x)$

У периодической функции бесконечно много периодов, если Т период, то и 2Т и 3Т и 10Т тоже периоды, вообще любое число вида: kT, где k- целое число.

Наименьший положительный период называется основным периодом.

- $\sin(x+2\pi k)=\sin x,\ k\in Z.$
- $\cos(x+2\pi k)=\cos x, k\in Z.$

$y=\sin x$, $y=\cos x$ — периодические функции с наименьшим положительным периодом $\mathbf{2\pi}$

- $tg(x+\pi k)=tgx,\ k\in Z$
- $ctg(x+\pi k)=ctgx, k\in Z$

$y = tgx$, $y=ctgx$— периодические функции с наименьшим положительным периодом $\boldsymbol{\pi}$

Пример №1

Найти основной период функции $y = \sin 7x$

Решение:

Пусть T основной период нашей функции, тогда:

$\sin 7x = \sin(7(x+T)) = \sin(7x+7T)$.

мы знаем что $2\pi k$ период синуса, найдем решение нашей задачи:

$\sin(7x+7T) = \sin(7x+2\pi k)$

$7t = 2\pi k$

$t = 2\pi k/7$

Ответ: $T = 2\pi k/7$

Свойство 1.

Функция **$y = f(x)$** с $D(f)$ называется **чётной,** если:

1) $D(f)$ симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) **$f(-x) = f(x)$**

Пример №2.

Найти наименьший положительный период функций

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной,** если:

1) $D(f)$ симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной,** если:

1) $D(f)$ симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$

№62
Докажите, что число T является периодом функции f, если:

Функция **y = f (x)** с D(f) называется **чётной,** если:
1) D(f) симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) **f (– x) = f (x)**

№ 62

а) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$; $T_1 = 4\pi$

$$T_1 = \frac{T}{|k|}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi.$$

№ 63

Докажите, что функции являются нечетными:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

№ 63

а) $f(x) = 2 - \cos x$

$f(x+T) = f(x+2\pi) = 2 - \cos(x+2\pi) = 2 - \cos x = f(x)$

$f(x-T) = f(x-2\pi) = 2 - \cos(2\pi - x) = 2 - \cos x = f(x)$

$f(x+T) = f(x-T) = f(x) \Rightarrow$ периодическая

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

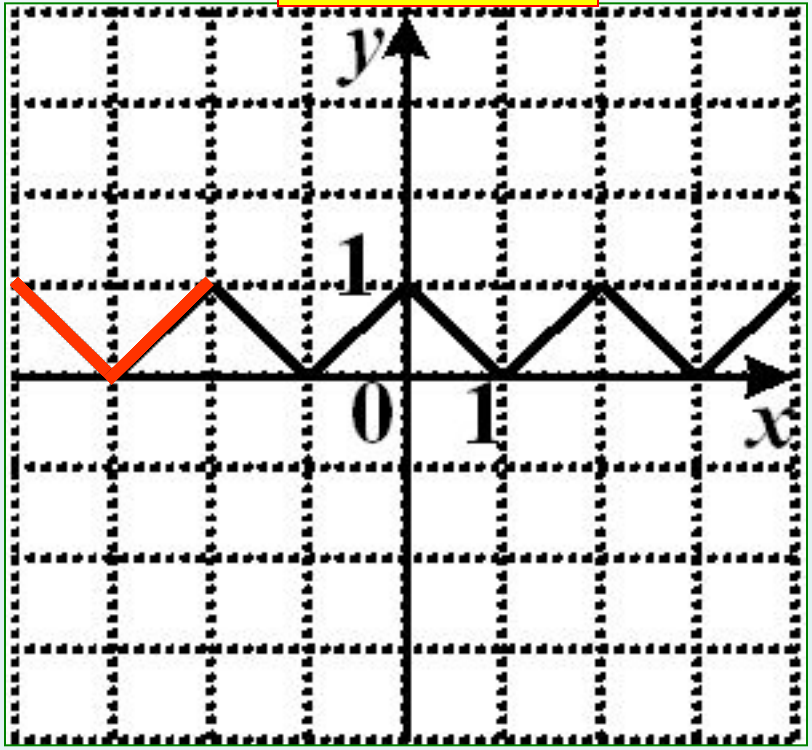
$f(x+T) = f(x+\pi) = \operatorname{tg} 2\cdot(x+\pi) = \operatorname{tg} 2x$

$f(x-T) = f(x-\pi) = \operatorname{tg} 2(x-\pi) = -\operatorname{tg} 2(\pi - x) = \operatorname{tg} 2x$

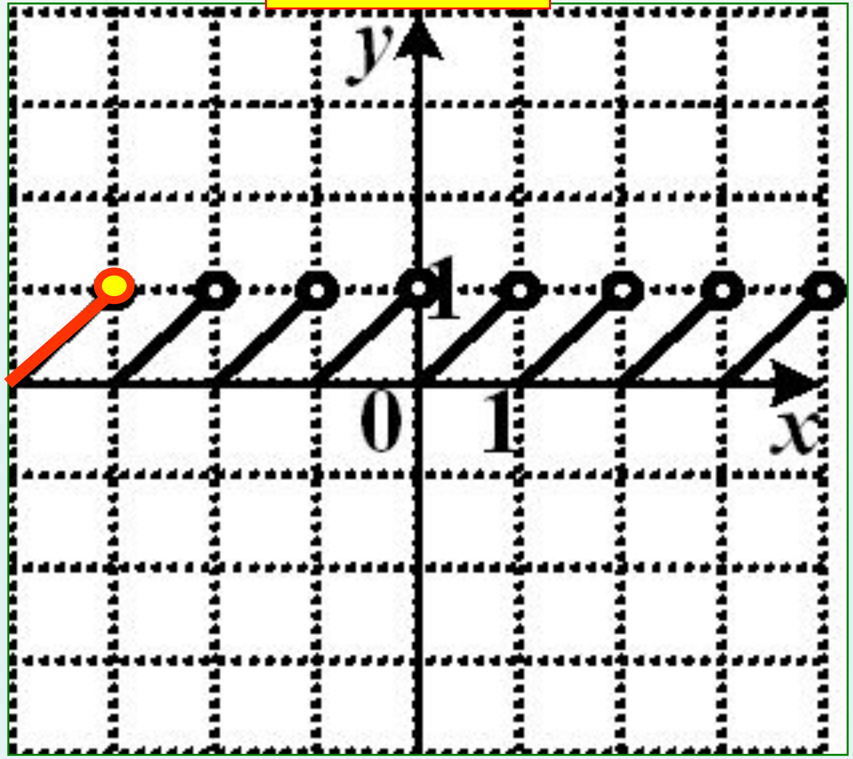
Периодические функции

График периодической функции состоит из повторяющихся одинаковых кусков, каждый из которых получается из другого параллельным переносом вправо или влево на T единиц.

T = 2



T = 1



Свойство 2.

Функция **$y = f(x)$** с $D(f)$ называется **чётной,** если:

1) $D(f)$ симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $\mathbf{f(-x) = f(x)}$

Пример №3.

Найти период функции:

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной,** если:

1) $D(f)$ симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$

Функция $y = f(x)$ с $D(f)$ называется **чётной,** если:

1) $D(f)$ симметична относительно нуля, т.е. если $x \in D(f)$, то и $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$

Домашнее задание:

№ 62; №63; №64