Лекция №14

Определение. Ядром линейного преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ называется множество всех $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{V}$, для которых $\boldsymbol{\varphi(x) = 0}$ (обозначать будем $\boldsymbol{Ker\ \varphi}$).

$$\boldsymbol{Ker\ \varphi = \{x \epsilon V | \varphi(x) = 0\}}.$$

Образом линейного преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ называется множество всех элементов $\boldsymbol{y \epsilon V}$, представленных в виде $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$ (обозначать будем $\boldsymbol{Im\ \varphi}$).

$$\boldsymbol{Im\ \varphi = \{y \epsilon V | \exists x \epsilon V, \varphi(x) = y\}}.$$

Пример 2. Пусть матрица линейного преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $\boldsymbol{l_1, l_2}$ имеет вид $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Найти $\boldsymbol{Im\ \varphi}$ и $\boldsymbol{Ker\ \varphi}$.

Теорема 2. Для всякого линейного преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ $\boldsymbol{Im\ \varphi}$ и $\boldsymbol{Ker\ \varphi}$ являются линейными подпространствами $\boldsymbol{V}$.

Теорема 1. Для всякого линейного преобразования φ линейного пространства V

$$\dim(Im\,\varphi) + \dim(Ker\,\varphi) = \dim V\,.$$

Пример 1. V – пространство многочленов степени $\leq \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\varphi}$ - дифференцирование.

Найти: $\boldsymbol{Im\,\varphi}$ и $\boldsymbol{Ker\,\varphi}$.

Операции над линейными операторами

- ***Определение.*** Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – линейные операторы, действующие из $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$.

Суммой этих операторов называется оператор, определенный равенством:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}).$$

Произведением линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на число $\boldsymbol{\lambda}$ называется оператор определяемый равенством:

$$(\boldsymbol{\lambda A})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}).$$

Теорема 2. Множество всех линейных операторов, действующих из $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$, является линейным пространством.

__Теорема 3.__ Если $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ – линейные преобразования пространства $\boldsymbol{V}$ с матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, в базисе $\{\boldsymbol{l_i}\}$, то:

1) линейное преобразование $\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}$ имеет матрицу $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ в этом базисе;
2) линейное преобразование $\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ имеет матрицу $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ в этом базисе;
3) линейное преобразование $\boldsymbol{I}$ имеет матрицу $\boldsymbol{E}$ в любом базисе.

Теорема 4. Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ – линейные преобразование $\boldsymbol{V}$. Тогда равносильны утверждения:

1) $\boldsymbol{Im\,\varphi = V}$*;*

2) $\boldsymbol{Ker\,\varphi = 0}$;

3) $\boldsymbol{\varphi}$ *–* взаимное однозначное отображение «на»;

4) существует $\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ и $\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ - линейное;

5) в любом базисе $\boldsymbol{\varphi}$ имеет невырожденную матрицу;

6) в некотором базисе матрица преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ невырожденная.

Характеристический многочлен линейного оператора

▪ Пусть $\boldsymbol{V}$ – **n**-мерное линейное пространство, $\boldsymbol{\varphi}$ – линейный оператор и $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

<u>Определение.</u> Определителем линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ (обозначаем $\mathbf{det}\,\boldsymbol{\varphi}$) называется определитель матрицы линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ в некотором базисе, т.е.

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица линейного оператора в некотором базисе.

Отметим, что это корректное определение.

Если оператор $\boldsymbol{\varphi}$ имеет матрицу A в базисе $\{\boldsymbol{e_i}\}$ и матрицу $\boldsymbol{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{e_i'}\}$, то $\boldsymbol{B = C^{-1}AC}$, где $\boldsymbol{C}$ матрица перехода от базиса $\{\boldsymbol{e_i}\}$ к базису $\{\boldsymbol{e_i'}\}$.

Тогда $\mathbf{det}\,\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{B} = |C^{-1}||A||C| = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{det\ A}$

Пусть $\boldsymbol{I}$ – тождественное преобразование.

<u>Определение.</u> Многочлен относительно $\boldsymbol{\lambda}$ $\mathbf{det}(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$ называется характеристическим многоченом оператора $\boldsymbol{\varphi}$.

Уравнение $\mathbf{det}(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0}$ называется характеристическим уравнением линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$.

Собственные значения и собственные вектора

- Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ – линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}: \boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

<u>***Определение.***</u> Число $\boldsymbol{\lambda}$ называется собственным значением оператора $\boldsymbol{\varphi}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

При этом вектор $\boldsymbol{x}$ называется собственным вектором оператора $\boldsymbol{\varphi}$, отвечающим собственному числу $\boldsymbol{\lambda}$.

Теорема 5. Число $\boldsymbol{\lambda}$ является собственным значением оператора $\boldsymbol{\varphi}$, если и только если $\boldsymbol{\lambda}$ – корень характеристического многочлена оператора $\boldsymbol{\varphi}$.

Пример. Пусть матрица линейного оператора имеет вид $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Найти собственные числа и собственные вектора.

Теорема 6. Матрица $\boldsymbol{A}$ линейного оператора в базисе $\{\boldsymbol{e_i}\}$ диагональна, если и только если базисные вектора $\boldsymbol{e_1} \dots \boldsymbol{e_n}$ являются собственными векторами оператора $\boldsymbol{\varphi}$.

Теорема 7. Пусть собственные значения $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k}$ - линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ различны. Тогда отвечающие им собственные вектора $\boldsymbol{u_1, u_2, \dots, u_p}$ - линейно независимые.

Следствие. Если характеристический многочлен линейного оператора $\boldsymbol{\varphi, \varphi: V \to V}$, имеет $\boldsymbol{n}$ различных корней и $\boldsymbol{\dim V = n}$, то в некотором базисе матрица линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ имеет диагональный вид.

Пример. Для матрицы $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$ найдите базис из собственных векторов. Определите вид матрицы линейного оператора в этом базисе.