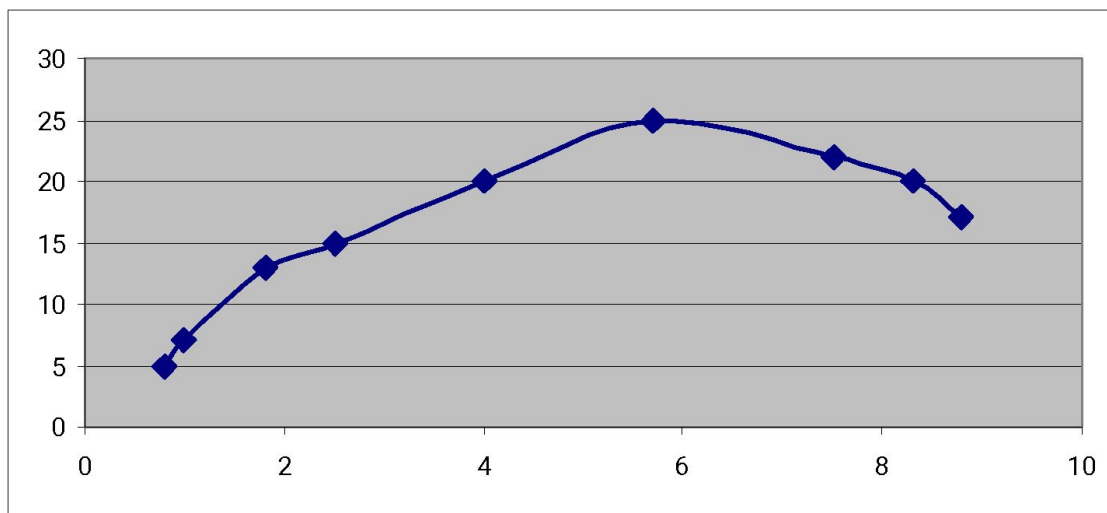


ПАРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



Анализируется прибыль предприятия Y (млн \$) в зависимости от расходов на рекламу X (млн \$).

Y	5	7	13	15	20	25	22	20	17
X	0,8	1,0	1,8	2,5	4,0	5,7	7,5	8,3	8,8



НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

1. Регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам

– полиномы различных степеней

$$y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_n \cdot x^n + \varepsilon$$

– равносторонняя гиперболола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$

– полулогарифмическая функция $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

2. Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам

– степенная (Лог-модель) $y = a \cdot x^b + \varepsilon$

– показательная $y = a \cdot b^x + \varepsilon$

– экспоненциальная $y = e^{a+b \cdot x} + \varepsilon$

Оценка параметров нелинейной регрессии

1. Функции, нелинейные по объясняющим переменным

$$\hat{y}_x = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^2 \quad \rightarrow \quad \hat{y}_x = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$$

$$\begin{cases} n \cdot a + b_1 \cdot \sum x_1 + b_2 \cdot \sum x_2 = \sum y \\ a \cdot \sum x_1 + b_1 \cdot \sum x_1^2 + b_2 \cdot \sum x_1 \cdot x_2 = \sum x_1 \cdot y \\ a \cdot \sum x_2 + b_1 \cdot \sum x_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot \sum x_2^2 = \sum x_2 \cdot y \end{cases}$$

Оценка параметров нелинейной регрессии

1. Функции, нелинейные по объясняющим переменным

$$\hat{y}_x = a + \frac{b}{x} \longrightarrow x_1 = \frac{1}{x} \longrightarrow \hat{y}_x = a + b \cdot x_1$$

$$\begin{cases} n \cdot a + b \cdot \sum \frac{1}{x} = \sum y \\ a \cdot \sum \frac{1}{x} + b \cdot \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{1}{x} \cdot y \end{cases}$$

Оценка параметров нелинейной регрессии

1. Функции, нелинейные относительно оцениваемых параметров

*нелинейные модели
внутренне линейные*

*нелинейные модели
внутренне нелинейные*

логарифмическая модель (степенная): $y = a \cdot x^b + \varepsilon$

показательная: $y = a \cdot b^x + \varepsilon$

экспоненциальная: $y = e^{a+b \cdot x} + \varepsilon$

ПРИМЕР

По статистическим данным, описывающим зависимость значения рентабельности производства синтетического каучука от индекса Лернера, построить логарифмическую модель парной регрессии

$$\hat{y} = a \cdot x^b$$

Индекс Лернера	0,14	0,33	0,21	0,14	0,22	0,25
Рентабельность, %	15,80	49,00	26,20	15,70	27,40	30,00

РЕШЕНИЕ

$$\hat{y} = a \cdot x^b$$

1. $\ln \hat{y} = \ln a + b \ln x$

2. $Y = \ln \hat{y}, X = \ln x, A = \ln a$
 1.244552

$$\hat{y} = 179.9383 \cdot x^{1.244552}$$

3. $Y = A + b \cdot X \quad Y = 5.192614 + 1.244552 \cdot X$

$$\hat{y} = e^{5.192614} \cdot x^{1.244552}$$

Линеаризующие преобразования

Модель	Преобразование	Обратная замена	
$\hat{y}_x = a \cdot x^b$	$Y = \ln y; X = \ln x$ $A = \ln a$	$a = e^A$	$b = b$
$\hat{y}_x = a \cdot b^x$	$Y = \ln y; B = \ln b$ $A = \ln a$	$a = e^A$	$b = e^B$

Исследование нелинейных регрессионных моделей

Индекс корреляции

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}} \quad 0 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Индекс детерминации

$$\rho_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{\text{объясн}}^2}{\sigma_y^2}$$

Исследование нелинейных регрессионных моделей.

Критерий Фишера

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}$$

Средняя относительная ошибка аппроксимации

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_{x_i}}{y_i} \right| \cdot 100\%$$

Исследование нелинейных регрессионных моделей.

Коэффициент эластичности $\Theta = f'(x) \cdot \frac{x}{y}$

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon \quad y' = a \cdot b \cdot x^{b-1}$$

$$\Theta = b$$

Средний коэффициент эластичности $\bar{\Theta} = f'(\bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

ПРИМЕР

$$y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon \quad X = \ln x$$

$$y = a + b \cdot \sqrt{x} + \varepsilon \quad X = \sqrt{x}$$

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon \quad Y = \ln y; \quad X = \ln x$$
$$A = \ln a$$

	x	X	y	$X \cdot y$				\hat{y}_x		A_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,2	0,182	0,9	0,164				0,499		
2	3,1	1,131	1,8	1,358				1,508		
...										
...										
Итого	71,6	15,32	18,7	41,918				18,720		
Среднее значение	8,95	1,914	2,34	5,24				-		
σ	-	0,846	0,935	-	-		-	-	-	-
σ^2	-	0,716	0,874	-	-		-	-	-	-

$$b = \frac{\text{cov}(X, y)}{\sigma_X^2} = \frac{5,24 - 1,914 \cdot 2,34}{0,716} = 1,063$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{X} = 2,34 - 1,063 \cdot 1,914 = 0,305$$

$$y_x = 0,305 + 1,063 \cdot \ln x$$

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,0711}{0,874}} = 0,958$$

$$\rho_{xy}^2 = 0,918 \quad \bar{A} = 14,51\%$$

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,918}{1 - 0,918} \cdot \frac{8 - 1 - 1}{1} = 67,17$$

$$F_{\text{табл}} = 5,99$$

$$k_1 = 1$$
$$k_2 = n - 2 = 6$$

$$\alpha = 0,05$$

$$F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$$

Модель	Индекс детерминации, $R^2 (r_{xy}^2, \rho_{xy}^2)$	Средняя ошибка аппроксимации, \bar{A} , %
Линейная модель, $\hat{y}_x = a + b \cdot x$	0,987	6,52
Полулогарифмическая модель, $\hat{y}_x = a + b \cdot \ln x$	0,918	14,51
Модель с квадратным корнем, $\hat{y}_x = a + b \cdot \sqrt{x}$	0,991	4,98
Степенная модель, $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	0,967	4,39