

Если основанием логарифма служит число  $e$ , то говорят, что задан **натуральный логарифм**. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение  **$\ln$**  (l – логарифм, n – натуральный).

$$\ln x = \log_e x$$

$$\log_e 2 = \ln 2$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

$$\ln 1 = 0;$$

$$e^{\ln x} = x;$$

$$\ln e = 1;$$

$$\ln e^r = r;$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

В курсе математического анализа доказано, что для любого значения  $x > 0$  справедлива формула дифференцирования

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

### Пример 4:

Вычислить значение производной функции  $y = \ln(3x + 5)$  в точке  $x = -1$ .

Решение:

$$y' = (\ln(3x + 5))' = 3 \cdot \frac{1}{3x + 5} = \frac{3}{3x + 5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3 \cdot (-1) + 5} = 1,5.$$

Ответ: 1,5

## Дифференцирование функции

$$y = a^x$$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например:  $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$ ;  $(4^{x+5})' = 4^{x+5} \cdot \ln 4$ .

$$(5^{-3x})' = -3 \cdot 5^{-3x} \cdot \ln 5.$$

## Дифференцирование функции

$$y = \log_a x$$

$$y' = (\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\ln(x^3 + 2x^4)$$

$$\frac{3x^2 + 8x^3}{x^3 + 2x^4} = \frac{3 + 8x}{x + 2x^2}$$

$$\log_4 \sin x$$

$$\frac{\cos x}{\sin x \ln 4} = \frac{\operatorname{ctgx}}{\ln 4}$$

$$\log_2(x^2 + 1)$$

$$\frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 2}$$

$$\lg \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x} \ln 10} = \frac{1}{2x \ln 10}$$

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Найти производную: а)  $(\log_2 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 2}$  ;

$$\text{б) } (\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln a} =$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

### 3. Производная логарифмической функции

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\forall x > 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a x + \Delta x - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

→ Частный случай

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

