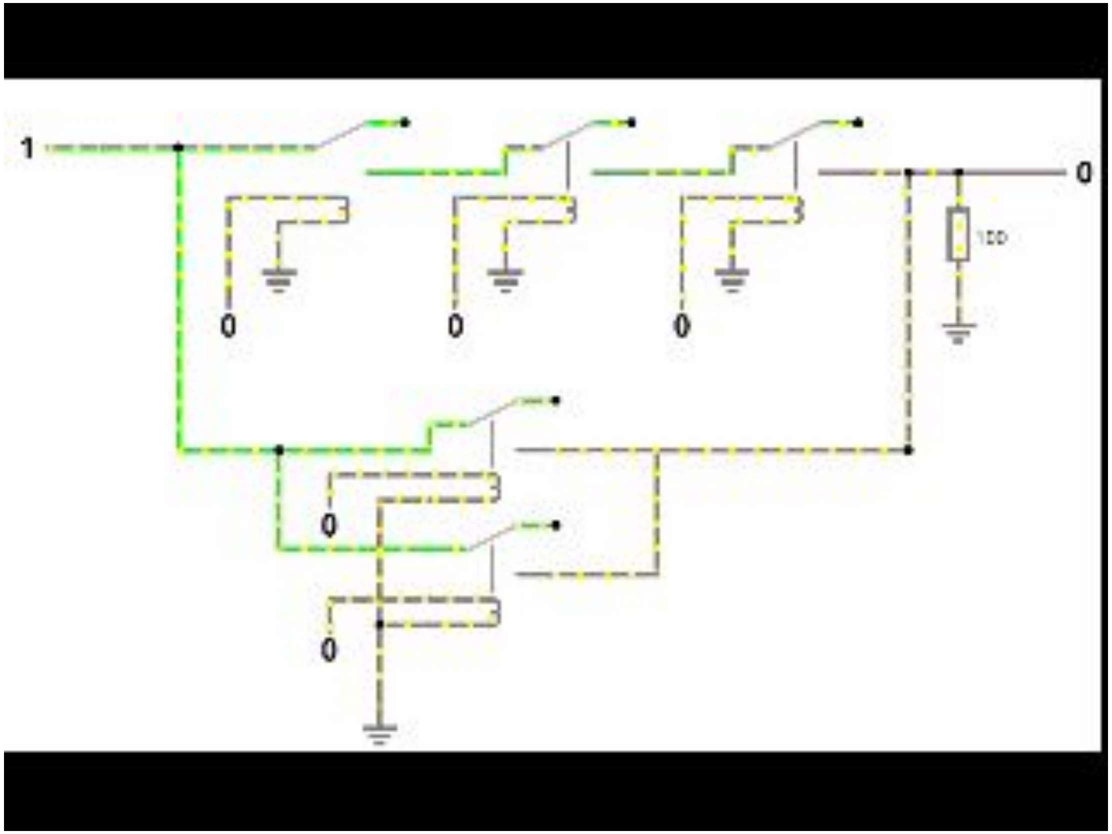
Переключательные схемы. Логические функции и тождества

ФИРТ кафедра ВТиЗИ

Рассматриваются электрические ПС, представляющие собой соединенные проводниками переключатели и источники тока.

Условимся обозначать символом 1 протекание тока в проводниках и символом 0 – отсутствие тока в проводниках.



Переключатель - электромагнитное реле с контактами и индукционной катушкой, состояние которой моделируется пропозициональной переменной X: X=1 - в катушке идет ток, и X=0 - в катушке тока нет.

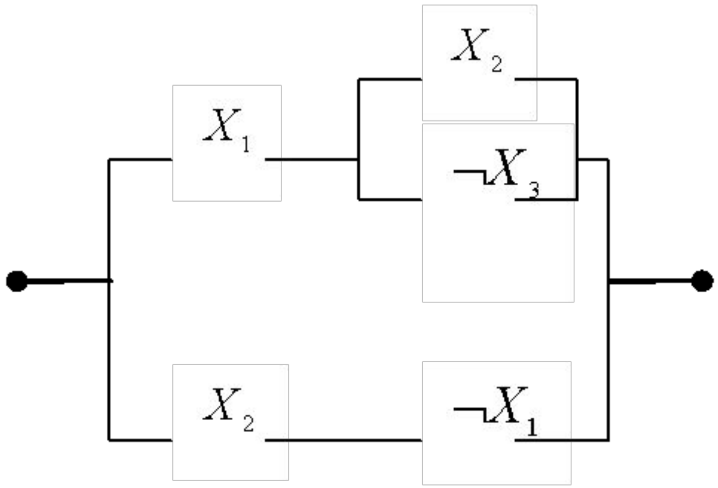
Контакты реле – замыкающие или размыкающие.

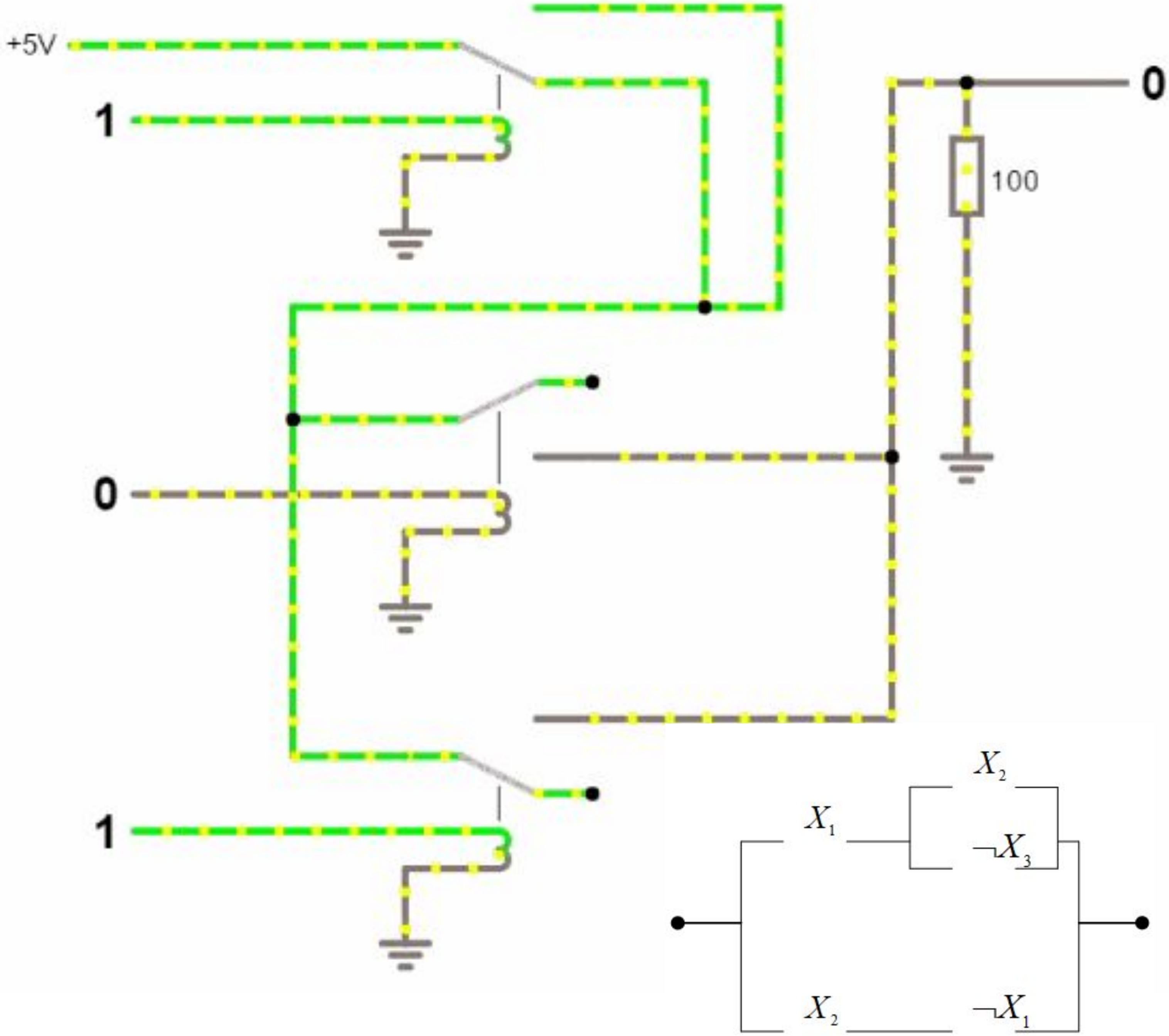
Через *замыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если X=1 - такой контакт моделируется пропозициональной переменной X.

Через *размыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если X=0 - такой контакт моделируется отрицанием пропозициональной переменной $\neg X$.

ФИРТ кафедра ВТиЗИ

Пример. Пусть в ПС на рис.1 переключатели P_1, P_5 имеют общую катушку реле с током X_1 и переключатели P_2, P_4 имеют общую катушку реле с током X_2, причем контакты P_1, P_2, P_4 – замыкающие и контакты P_3, P_5 – размыкающие. Тогда такая ПС с помощью булевых переменных X_1, X_2, X_3 изображается следующей диаграммой:





ФИРТ кафедра ВТиЗИ

Переключатели p,q могут быть соединены последовательно или параллельно.

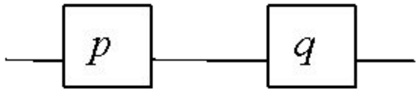


Рис.3

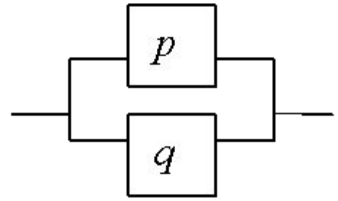


Рис.4

Через последовательно соединенные переключатели p,q ток проходит в том и только том случае, если моделирующие их формулы $\Phi = \Psi = 1$ - такое соединение моделируется формулой $\Phi \wedge \Psi$.

Через параллельно соединенные переключатели p,q ток не проходит в том и только том случае, если $\Phi = \Psi = 0$ - такое соединение моделируется формулой $\Phi \vee \Psi$.

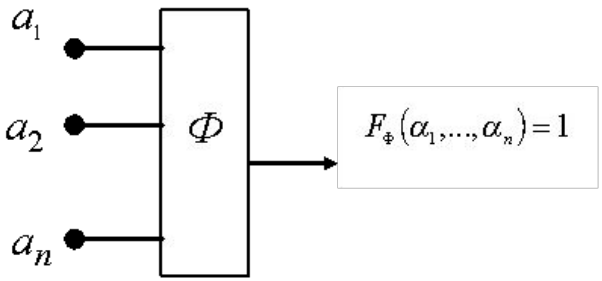
В результате любая электрическая ПС моделируется некоторой формулой Φ, которая принимает значение 1 в том и только том случае, если в ПС идет ток.

Соответствующая такой формуле Φ булева функция F_{Φ} называется *функцией проводимости ПС*, так как она показывает, при каких значениях булевых переменных (т.е. переключателей данной схемы) в ПС идет электрический ток.

С другой стороны, каждая формула $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$ моделирует ПС с функцией проводимости F_{Φ}: эта схема так конструируется из переключателей $X_1, \neg X_1, \ldots, X_n, \neg X_n$, что в ней при значениях $X_1 = \alpha_1, \ldots, X_n = \alpha_n$ проходит ток в том и только том случае, если $F_{\Phi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Переключательную схему, моделирующую формулу $\Phi=\Phi(X_1,\dots,X_n)$, можно представлять в виде устройства с n входами и одним выходом, которое преобразует входные булевы значения $X_1=\alpha_1,\dots,X_n=\alpha_n$ в выходное булево значение $F_\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1$.

Графически такое устройство изображается диаграммой:



Отрицанием высказывания x называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание x ложно. Отрицание обозначается $\bar{x}$ или $\neg x$ (читается: «не x»).

Логические операции можно задавать при помощи *таблиц истинности*, показывающих соответствие значений истинности высказываний. Для высказываний x и $\overline{x}$ эта таблица имеет вид:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y. Конъюнкция обозначается: $x \wedge y$, или x & y (читается: «x и y»). Таблица истинности для $x \wedge y$ имеет вид:

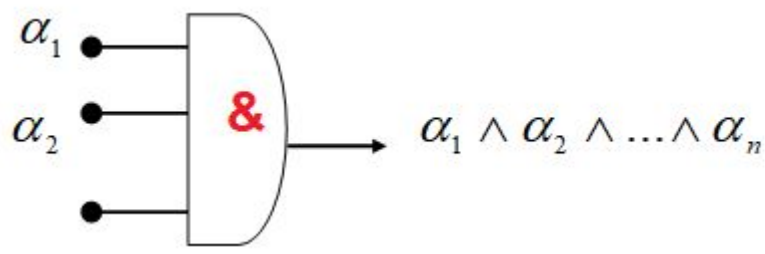
x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Отрицанием высказывания x называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание x ложно. Отрицание обозначается $\bar{x}$ или $\neg x$ (читается: «не x»).

Логические операции можно задавать при помощи *таблиц истинности*, показывающих соответствие значений истинности высказываний. Для высказываний x и $\overline{x}$ эта таблица имеет вид:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

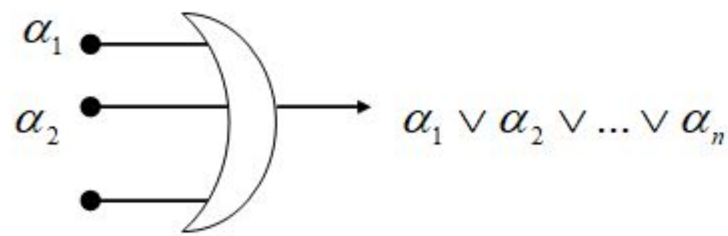
Конъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y. Конъюнкция обозначается: $x \wedge y$, или x & y (читается: «x и y»). Таблица истинности для $x \wedge y$ имеет вид:



x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y ложны. Дизъюнкция обозначается $x \vee y$ (или $x+y$) (читается: «x или y»). Таблица истинности для $x \vee y$ имеет вид:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Импликацией двух высказываний x и y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание x истинно, а y – ложно. Импликация обозначается: $x \to y$ (читается: «x влечет y» или «из x следует y»). Высказывание x называется *посылкой импликации*, а высказывание y – *следствием*. Таблица истинности для $x \to y$ имеет вид:

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией (эквивалентностью) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний x и y совпадают. Эквиваленция обозначается: $x \leftrightarrow y$, или $x \sim y$ (читается: «x эквивалентно y» или «x тогда и только тогда, когда y»). Таблица истинности для $x \leftrightarrow y$ имеет вид:

x	y	x ↔ y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Исключáющее «ИЛИ» *сложение по модулю два* (альтернативной дизъюнкцией, логúческим сложéнием, строгой дизъюнкцией) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y принимают разные значения. Дизъюнкция обозначается $x \oplus y$ (читается: «или x, или y»).

x	y	x ⊕ y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ФИРТ кафедра ВТиЗИ

Стрелка Пирса – это отрицание дизъюнкции.
Стрелка Пирса обозначается X ↓ Y. Читается «ни X, ни Y».
Введена в рассмотрение Чарльзом в 1880—1881 г.г.

x	y	x ↓ y
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Штрих Шеффера – это отрицание конъюнкции.
Введена в рассмотрение Генри Шеффером в 1913 г. (в отдельных источниках именуется как Пунктир Чулкова)
Штрих Шеффера обозначается x|y , задаётся следующей таблицей истинности:

x	y	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

ФИРТ кафедра ВТиЗИ

Отрицание
($\overline{x}$ или $\neg x$)

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Конъюнкция

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликация

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленция

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Исключающее «ИЛИ»

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Стрелка Пирса

x	y	$x \downarrow y$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Штрих Шеффера

x	y	$x \mid y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Коммутативные законы:

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$;
2. $x \vee y \equiv y \vee x$;

Ассоциативные законы:

1. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;
2. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;

Дистрибутивные законы:

1. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

Законы Де Моргана:

1. $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;
2. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Идемпотентные законы:

1. $x \wedge x \equiv x$;
2. $x \vee x \equiv x$;

Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

1. $x \wedge 0 \equiv 0$;
2. $x \vee 0 \equiv x$;
3. $x \wedge 1 \equiv x$;
4. $x \vee 1 \equiv 1$;

Законы операции «черта»:

1. $\bar{\bar{x}} \equiv x$;
2. $x \vee 0 \equiv x$;
3. $x \vee 1 \equiv 1$;
4. $\bar{x} \wedge x \equiv 0$;
5. $\bar{x} \vee x \equiv 1$;

Равносильные преобразования

$x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$;

$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;

$x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

С помощью таблиц истинности проверить, являются ли равносильными формулы $x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$ и $\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$.

<u>Решение.</u> Составим таблицы истинности для каждой из формул *A* и *B*.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

x	y	$\bar{x}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

С помощью таблиц истинности проверить, являются ли равносильными формулы $x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$ и $\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$.

Решение. Составим таблицы истинности для каждой из формул *A* и *B*.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

x	y	$\bar{x}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Ответ: данные формулы являются равносильными.

Упростить логическую формулу: $\overline{x} \wedge \overline{y} \rightarrow x \vee (x \wedge y)$.

Решение. Используем основные равносильности.

Равносильные преобразования

$x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$;

$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;

$x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

$\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Равносильные преобразования

$x \to y \equiv \bar{x} \vee y$;

$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;

$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$;

$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Упростить логическую формулу: $\bar{x} \wedge \bar{y} \to x \vee (x \wedge y)$.

Решение. Используем основные равносильности.

$$\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \big(x \vee (y \wedge x)\big) \equiv$$

$$\equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee x \equiv \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee x \equiv$$

$$\equiv x \vee y \vee x \equiv x \vee x \vee y \equiv x \vee y.$$

Ответ: $x \vee y$.

Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

$$x \wedge (y \mid z) \;\; и \;\; (x \wedge y)(x \wedge z)$$

Решение.

Составим таблицы истинности для каждого высказывания.

x	y	z	y|z	$x \wedge (y \mid z)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y)(x \wedge z)$

Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

$$x \wedge (y \mid z) \;\; и \;\; (x \wedge y)(x \wedge z)$$

Решение.

Составим таблицы истинности для каждого высказывания.

x	y	z	y|z	$x \wedge (y \mid z)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y)(x \wedge z)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0

Значения х и у в пятом и восьмом столбцах не совпадают.

Вывод: данные высказывания не являются эквивалентными

Практические задания

1. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \wedge \overline{A}\right)$
2. Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $\left(x \wedge y\right) \oplus \left(x \wedge z\right)$ и $x \wedge \left(y \oplus z\right)$
3. Решить булево уравнение: $\left(\overline{z} \oplus x\right) \vee \left(\overline{z} \,\middle|\, (y \vee \overline{x})\right) = x \wedge (y \oplus z)$
4. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow \left(A \downarrow B\right)$
5. Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $x \,|\, \left(y \wedge z\right)$ и $(x \,|\, y) \oplus \left(x \,|\, z\right)$
6. Решить булево уравнение: $\left(\overline{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\overline{z} \oplus \overline{x}\right) = x \wedge y$

7. Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $x|(y \to z)$ и $(x|y) \to (x|z)$

8. Решить булево уравнение: $(\bar{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} \vee \bar{x}) = x \oplus y$

9. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $(\bar{z} \vee y) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$

10. Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A \right)$ и $A \vee B$

11. Решить булево уравнение: $(\bar{z} \vee y) \wedge (\bar{z} \oplus \bar{x}) = x \Rightarrow y$

12. Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно: $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$

13. Являются ли эквивалентными следующие высказывания: $(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A})$ *и* $((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}) \Rightarrow A$

Контрольные вопросы:

1. Что понимают в математической логике под высказыванием?
2. Какие действия выполняются над высказываниями?
3. Что называют алгеброй Буля?
4. Законы алгебры Буля.