Информатика

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

10 класс

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

Ключевые слова

- законы алгебры логики
- коммутативные законы
- ассоциативные законы
- дистрибутивные законы
- закон противоречия
- закон идемпотентности
- закон двойного отрицания
- законы де Моргана
- законы поглощения

Основные законы алгебры логики

Законы алгебры логики (свойства логических операций) позволяют упростить процесс анализа истинности логического выражения с большим количеством переменных и операций.

Закон двойного отрицания

A		
0	1	0
1	0	1

A		
0	1	1
1	0	1

A		
0	1	0
1	0	0

Основные законы алгебры логики

Все законы могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Законы де Моргана

Доказательство закона де Моргана

A	B					
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Докажите второй закон самостоятельно.

Основные законы алгебры логики

Переместительные законы	A ∨ B = B ∨ A	A & B = B & A
(дистрибутивный) закон (I)	C)	

Упростить выражения: A ∨ A & B;   A & (A ∨ B)

A ∨ A & B = A &1 ∨ A & B = A & (1 ∨ B) = A & 1 = A

Закон поглощения (I)	A ∨ (A & B) = A

A & (A ∨ B) = A & A ∨ A & B = A ∨ A & B = A

Закон поглощения (II)	A & (A ∨ B) = A

Основные законы алгебры логики

Доказательство распределительного (дистрибутивного) закона

A	B	C		A & (B ∨ C)	A & B	A & C	(A & B) ∨ (A & C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Основные законы алгебры логики

Распределительный (дистрибутивный) закон (II)	A ∨ (B & C) = (A ∨ B) & (A ∨ C)

(A ∨ B) & (A ∨ C)

↓

(A ∨ B) & A ∨ (A ∨ B) & C

↓

A & (A ∨ B) ∨ C & (A ∨ B)

↓

A ∨ C & (A ∨ B)

↓

A ∨ A & C ∨ C & B

↓

A ∨ B & C

Доказательство

A & (B ∨ C) = (A & B) ∨ (A & C)

Переместительный
A & B = B & A

Поглощения
A & (A ∨ B)=A

Распределительный
A & (B ∨ C) = (A & B) ∨ (A & C)

Поглощения
A ∨ A & B = A

Основные законы алгебры логики

№ 1. На числовой прямой даны отрезки B = [5; 10], C = [3; 20] и D = [15; 25]. Найти целое число – длину отрезка A, чтобы предикат

$$((x \in D) \to (x \in C)) \to ((x \in A) \to (x \notin A) \ \& \ (x \in B))$$

становился истинным высказыванием при любых значениях x.

Заменим предикаты вида $x \in M$ на M (высказывание обозначенное соответствующей буквой множества) и выполним преобразования:

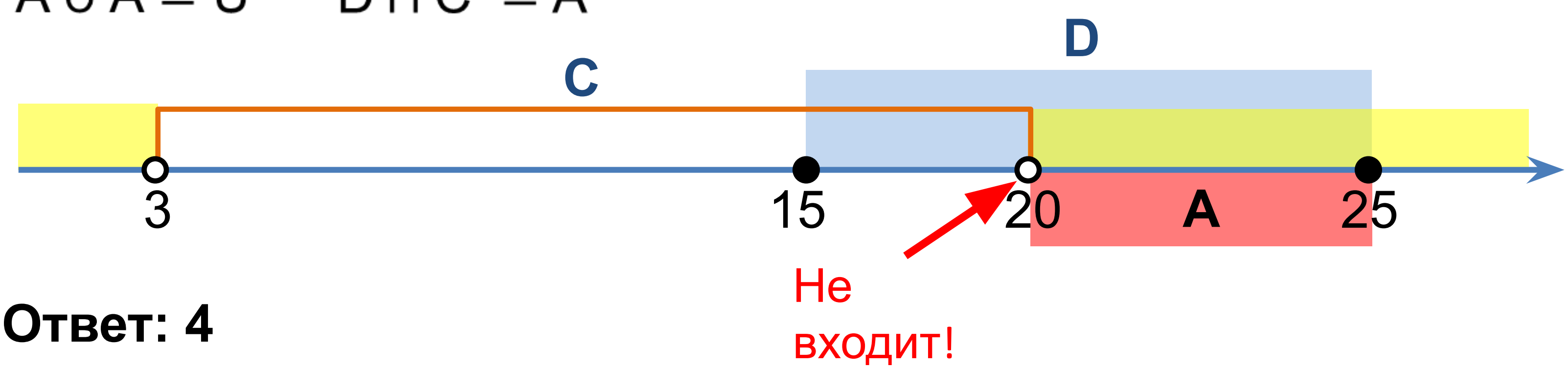
$$(D \to C) \to (A \to \overline{A} \ \& \ B) = \overline{\overline{D} \lor C} \lor (\overline{A} \lor \overline{A} \ \& \ B) = (\overline{\overline{D}} \ \& \ \overline{C}) \lor \overline{A} = (D \ \& \ \overline{C}) \lor \overline{A}$$

Законы алгебры логики выполняются для операций объединения, пересечения и дополнения множеств.

Какие законы использовали?

$D \cap \overline{C} \cup \overline{A} = U$ Ответ не зависит от отрезка B

$A \cup \overline{A} = U$ $\quad D \cap \overline{C} = A$



Ответ: 4

Основные законы алгебры логики

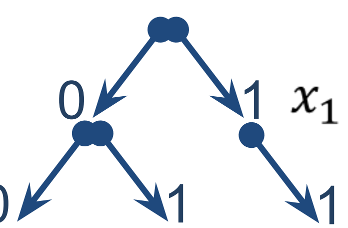
№ 2. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2)\ \&\ (x_1 \to x_3)\ \&\ (x_1 \to x_4)\ \&\ (x_1 \to x_5) = 1 \\ (y_1\ \&\ y_2) \vee (y_1\ \&\ y_3) \vee (y_1\ \&\ y_4) \vee (y_1\ \&\ y_5) = 1 \end{cases}$$

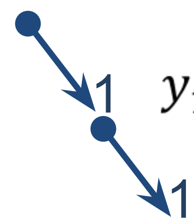
$$\begin{cases} \overline{x_1} \vee x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5 = 1 \\ y_1\ \&\ (y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5) = 1 \end{cases}$$

Замена импликации и применение распределительных законов к обоим уравнениям.

Количество решений первого уравнения не влияет на количество решений второго уравнения.



$x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5$



$y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5$

$1 \cdot 15 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 17$

$1 \cdot 15 = 15$

$x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5 = 0$ в 15 случаях

$x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5 = 1$ в единственном случае

$17 \cdot 15 = 255$

$y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5 = 1$ в 15 случаях.

Ответ: 255

Логические функции

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Сколько разных функций от двух переменных?

0000

0001

Запишите в общем виде количество различных функций от N переменных.

Для n = 2 существует 16 различных логических функций.

Логические функции

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$F(A,B)=0$

$F(A,B)=A \,\&\, B$

$F(A,B)=\overline{A \rightarrow B}$

$F(A,B)=A$

$F(A,B)=\overline{B \rightarrow A}$

$F(A,B)=B$

?

?

$F(A,B)=A \mid B=\overline{A \,\&\, B}$

штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ)

$F(A,B)=A \downarrow B=\overline{A \vee B}$

стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ)

Составление логического выражения

Функция от любого количества переменных может быть выражена через функции двух переменных. Любую функцию можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{A} \& \bar{B} \& C$
0	1	0	1	$\bar{A} \& B \& \bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A \& \bar{B} \& C$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

При построении функции можно ориентироваться как на 0, так и на 1 в последнем столбце.

F=1, если во 2-ой, **ИЛИ** в 3-ей, **ИЛИ** в 6-ой строке стоят 1.

Запишем выражение в строке так, чтобы была описана только эта строка.

$F = \bar{A} \& \bar{B} \& C \vee \bar{A} \& B \& \bar{C} \vee A \& \bar{B} \& C$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

II способ

Используя законы логики, можно записать функцию через другие операции.

Составление логического выражения

Функция от любого количества переменных может быть выражена через функции двух переменных.

Любую функцию можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

A	B	C	F	
0	0	0	1	
0	0	1	0	$A \vee B \vee \overline{C}$
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\overline{A} \vee B \vee C$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

F=0, если во 2-ой **ИЛИ** в 5-ой строке стоят 0.

Запишем выражение в строке так, чтобы была описана только эта строка:

$$F = (A \vee B \vee \overline{C}) \,\&\, (\overline{A} \vee B \vee C)$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Запись функции в таком виде можно было получить описывая функцию **НЕ** F, а затем применяя законы де Моргана.

Самое главное

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики. Аналогичные законы имеют место и в алгебре множеств.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

Для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.

Вопросы и задания

1. Для функции F(A, B, C, D, E, K) построили таблицу истинности. Оказалось, что функция тождественна выражению $(A \lor C) \& E$. Сколько единиц и сколько нулей в столбце значений функции?

Решение

- Выражение зависит от трех переменных A
- $(A \lor C) \& E = 1$. Конъюнкция равна 1, если $E = 1$ и $A \lor C = 1$, т.е. существует три различных набора переменных A, C и E при которых выполняется равенство $(A \lor C) \& E = 1$.
- Так как выражение не зависит от значений переменных B, D, K, то к каждой тройке значений A, C и E можно взять 8 (2^3) троек B, D, K. В столбце F(A, B, C, D, E, K) таблицы истинности функции: $3 \cdot 8 = 24$ единицы.
- Строк в таблице $2^6=64$; $64 – 24 = 40$ – количество нулей.

2. Упростите логическую формулу:

$$\left(A \lor B \& \overline{C}\right) \& (A \& B \& C \lor A \& B) = A \& B$$

Ответ

Вопросы и задания

3. Операция $A \oplus B$ соответствует словесному описанию «только одно из двух выражений истинно». Проверьте соответствует ли выражение $A \oplus B \oplus C$ утверждению «только одно из трех утверждений истинно»?

Решение

$A \oplus B = A \,\&\, \overline{B} \vee \overline{A} \,\&\, B$

После применения этой формулы и логических преобразований получим:

$$A \oplus B \oplus C = \underbrace{\boxed{\overline{A} \,\&\, \overline{B} \,\&\, C \vee A \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C} \vee \overline{A} \,\&\, B \,\&\, \overline{C}}}_{\text{Только одно истинно}} \vee \underbrace{\boxed{A \,\&\, B \,\&\, C}}_{\text{Все истинны}}$$

4. Проверьте обладает ли операция импликации ассоциативностью?

Решение

$$(A \to B) \to C \neq A \to (B \to C)$$

$$(A \,\&\, \overline{B}) \vee C \neq \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$$