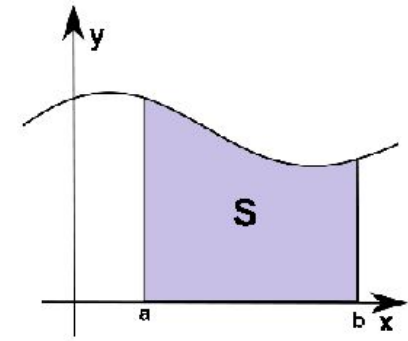


Определенный интеграл и его свойства

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Если $F(x) + C$ - первообразная функция для $f(x)$,
то приращение $F(b) - F(a)$ первообразных
функций при изменении аргумента x от $x = a$ до
 $x = b$ называется *определенным интегралом*



$$\int_a^b f(x) dx \quad , \text{ где } a \text{ и } b \text{ пределы$$

интегрирования

ОПРЕДЕЛЕН ИЕ:

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, $x \in [a; b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси Ox .

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

2. Для любого значения a справедливо равенство:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Для любых значений a, b и c верно равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов слагаемых

$$\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x)) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k\varphi(x) dx = k \int_a^b \varphi(x) dx$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА- ЛЕЙБНИЦА

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F - одна из первообразных функции f .

ПРИМЕР
Ы:

$$1. \int_3^5 dz =$$

$$2. \int_0^2 3x^2 dx =$$

$$3. \int_{-1}^4 (2x + 1) dx =$$

$$4. \int_0^{\pi/4} \cos x dx =$$

ОТВЕТ

ы:

$$1. \quad z \Big|_3^5 = 5 - 3 = 2$$

$$2. \quad 3 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8$$

$$3. \quad \int_{-1}^4 2x dx + \int_{-1}^4 dx = (x^2 + x) \Big|_{-1}^4 = \\ (4^2 + 4) - ((-1)^2 - 1) = 20 - 0 = 20$$

$$4. \quad \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ПРИМЕР

ы:

$$5. \int_1^2 (5x^4 + 2x - 8) dx =$$

$$6. \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx =$$

$$7. \int_0^1 e^{2x} dx =$$

$$8. \int_0^1 \frac{du}{u+1} =$$

ОТВЕТ

ы:

$$5. \quad 5 \int_1^2 x^4 dx + 2 \int_1^2 x dx - 8 \int_1^2 dx = \left(\frac{5x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} - 8x \right) \Big|_1^2 = 26$$

$$6. \quad \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \left(1^{\frac{4}{3}} - 0 \right) = \frac{3}{4}$$

$$7. \quad \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$8. \quad \int_0^1 \frac{d(u+1)}{u+1} = \ln(u+1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

ПРИМЕРЫ:

$$9. \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx =$$

$$10. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$11. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$$

ПРОВЕРЬ ОТВЕТЫ:

9. 1

10. $-\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$

11. $\frac{\pi}{6}$

12. $\frac{\pi}{3}$