

**Математика уступает свои крепости
лишь сильным и смелым.**

А.П. Конфорович



**Результат учения равен
произведению
способности
на старательность.
Если старательность
равна нулю,
То и все произведение
равно нулю.
А способности есть у
каждого!**

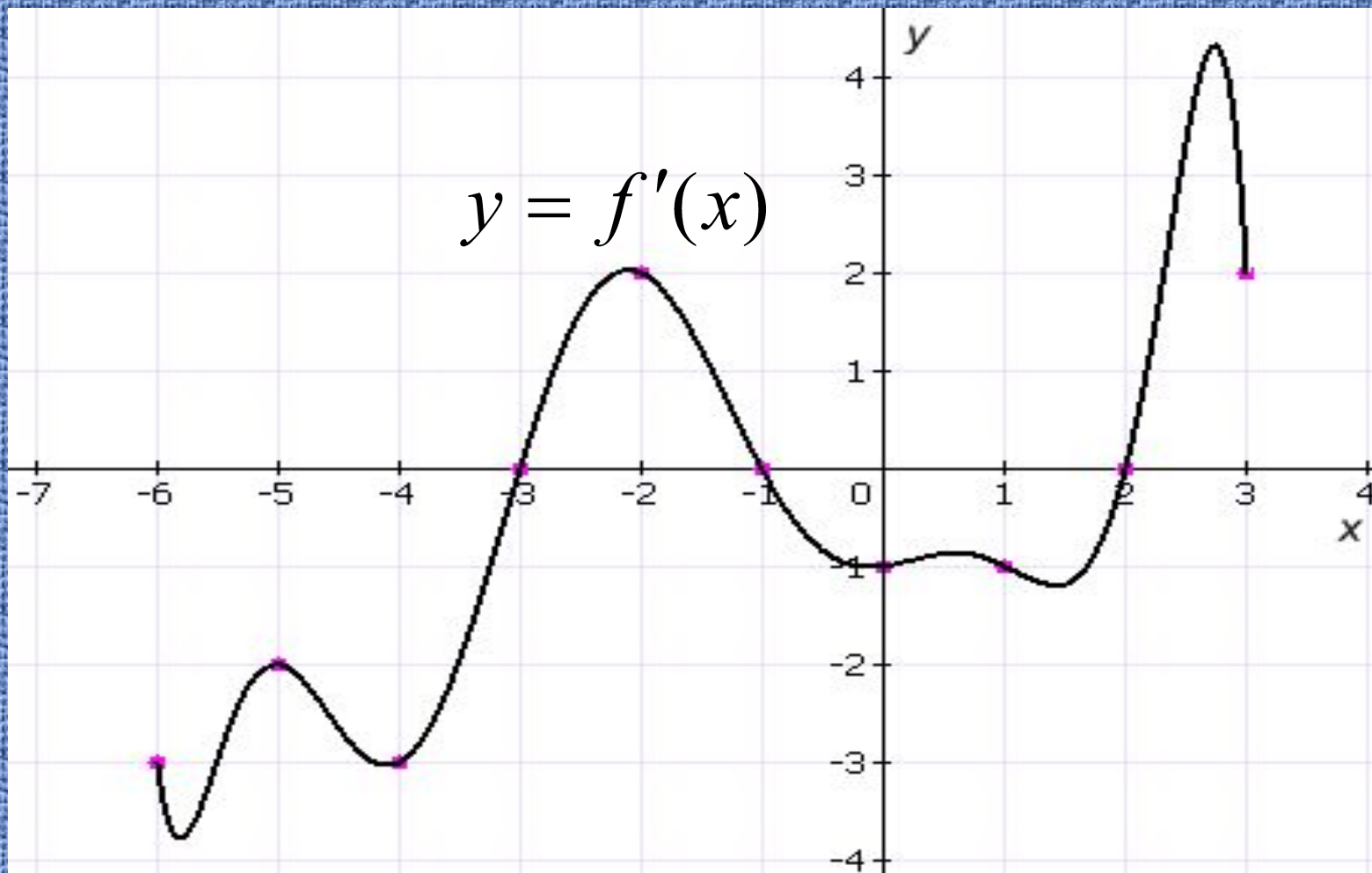
The background features a white surface decorated with three balloons (green, blue, and purple) and yellow streamers. The text is centered and rendered in a bold, blue font with a yellow outline.

Тема урока:

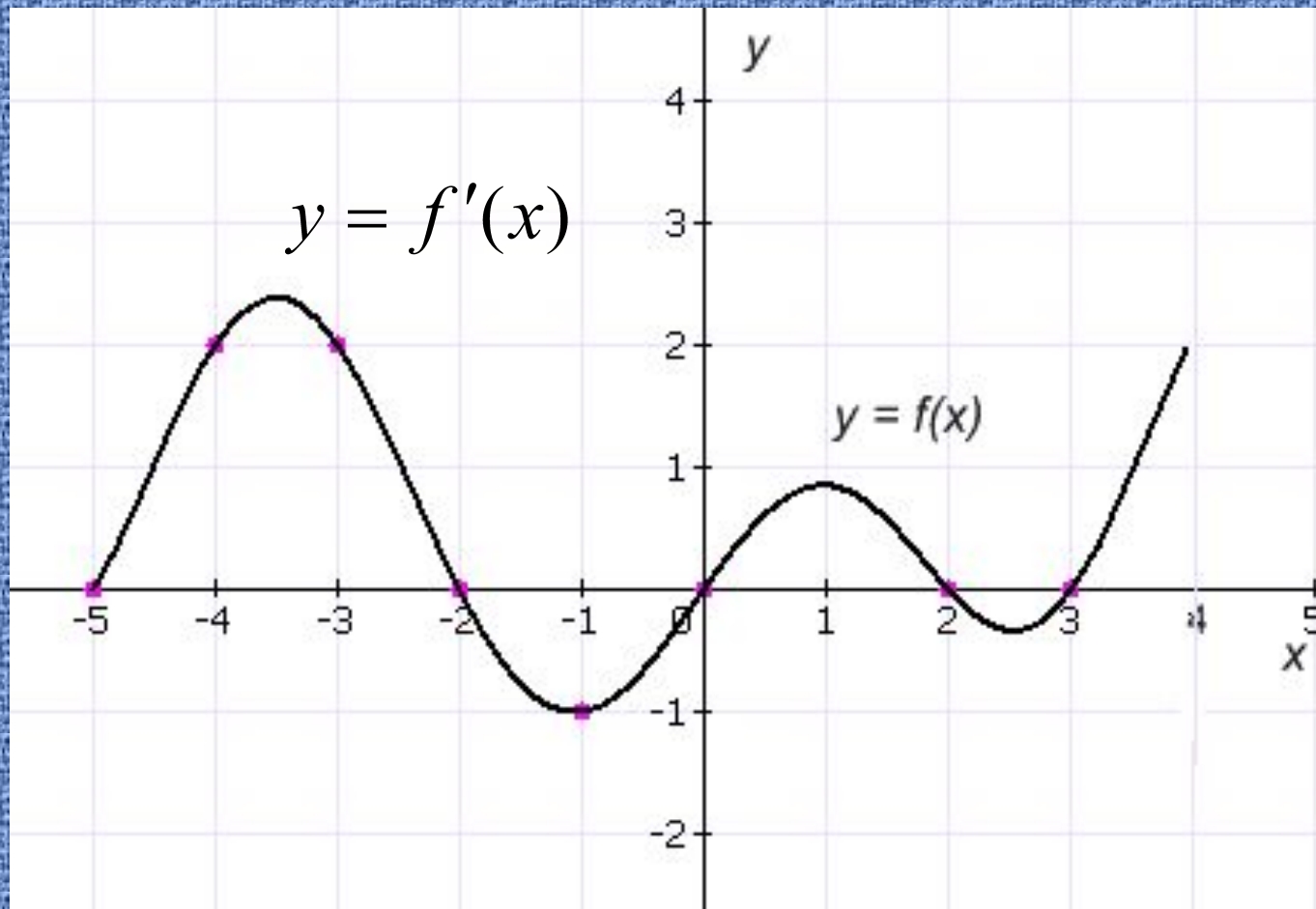
Наибольшее и наименьшее

значения функции

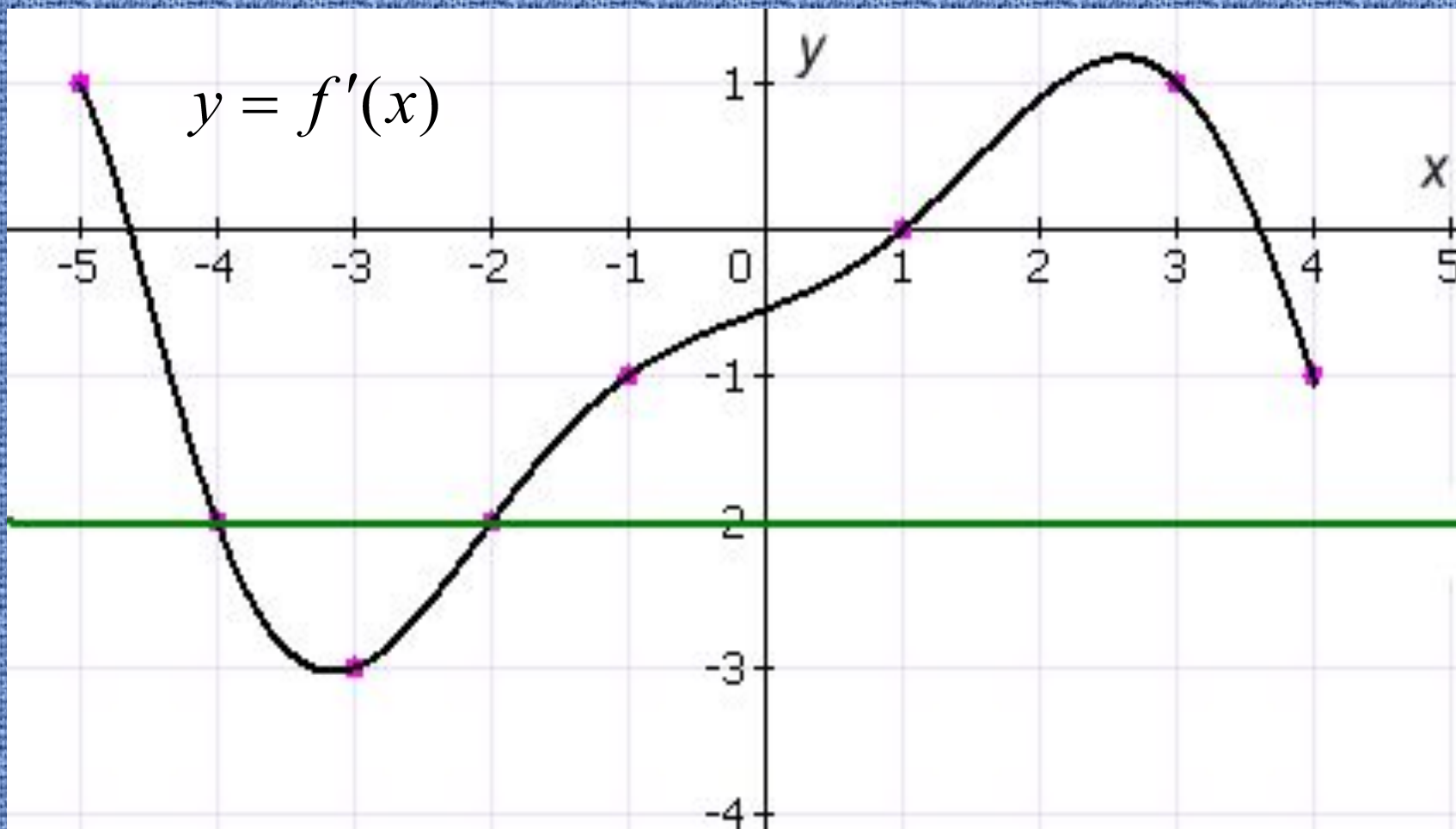
на отрезке



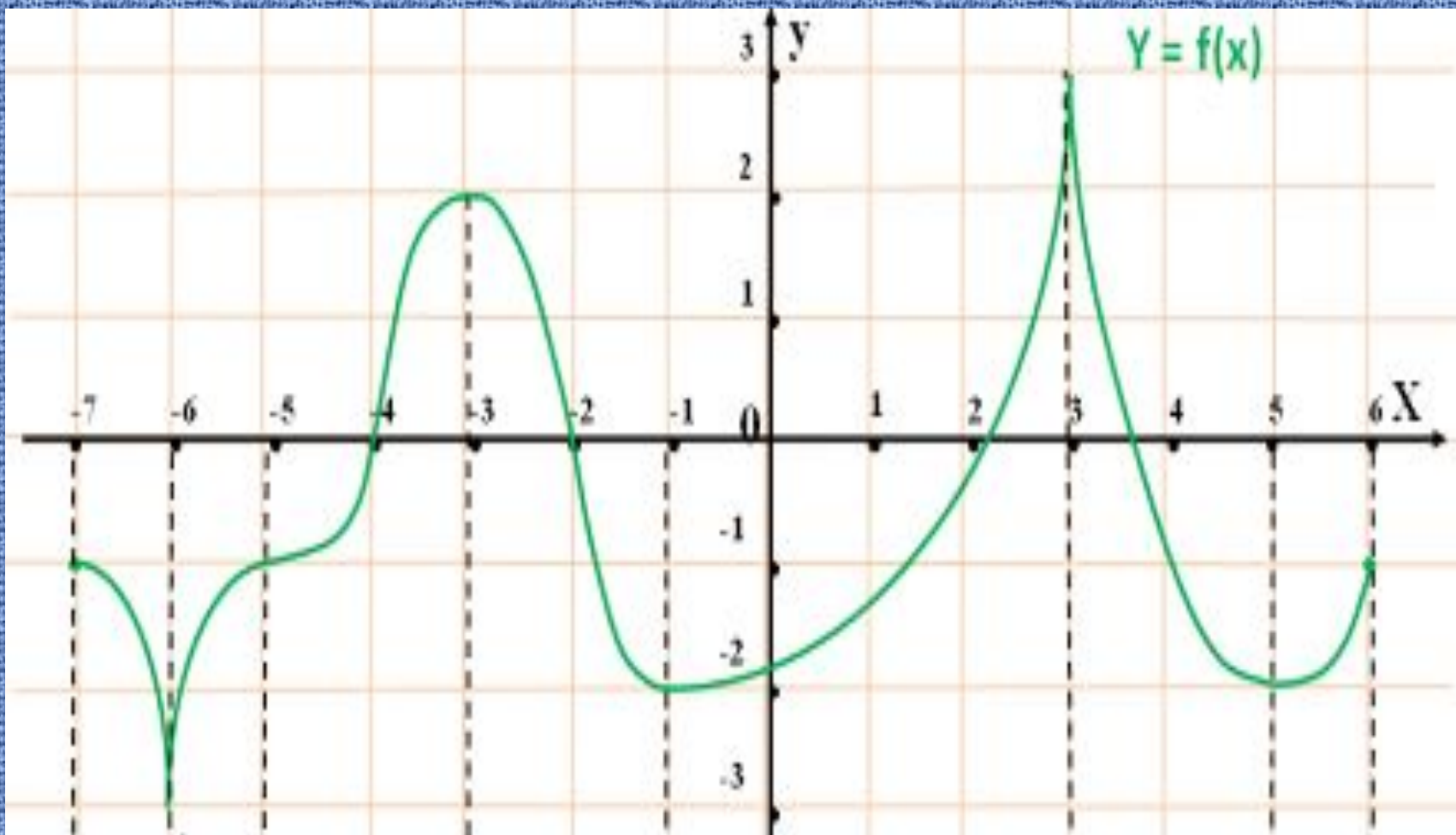
**Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-6; 3]$.
График её производной изображен на рисунке.
Определите промежутки возрастания и убывания
функции $f(x)$.**



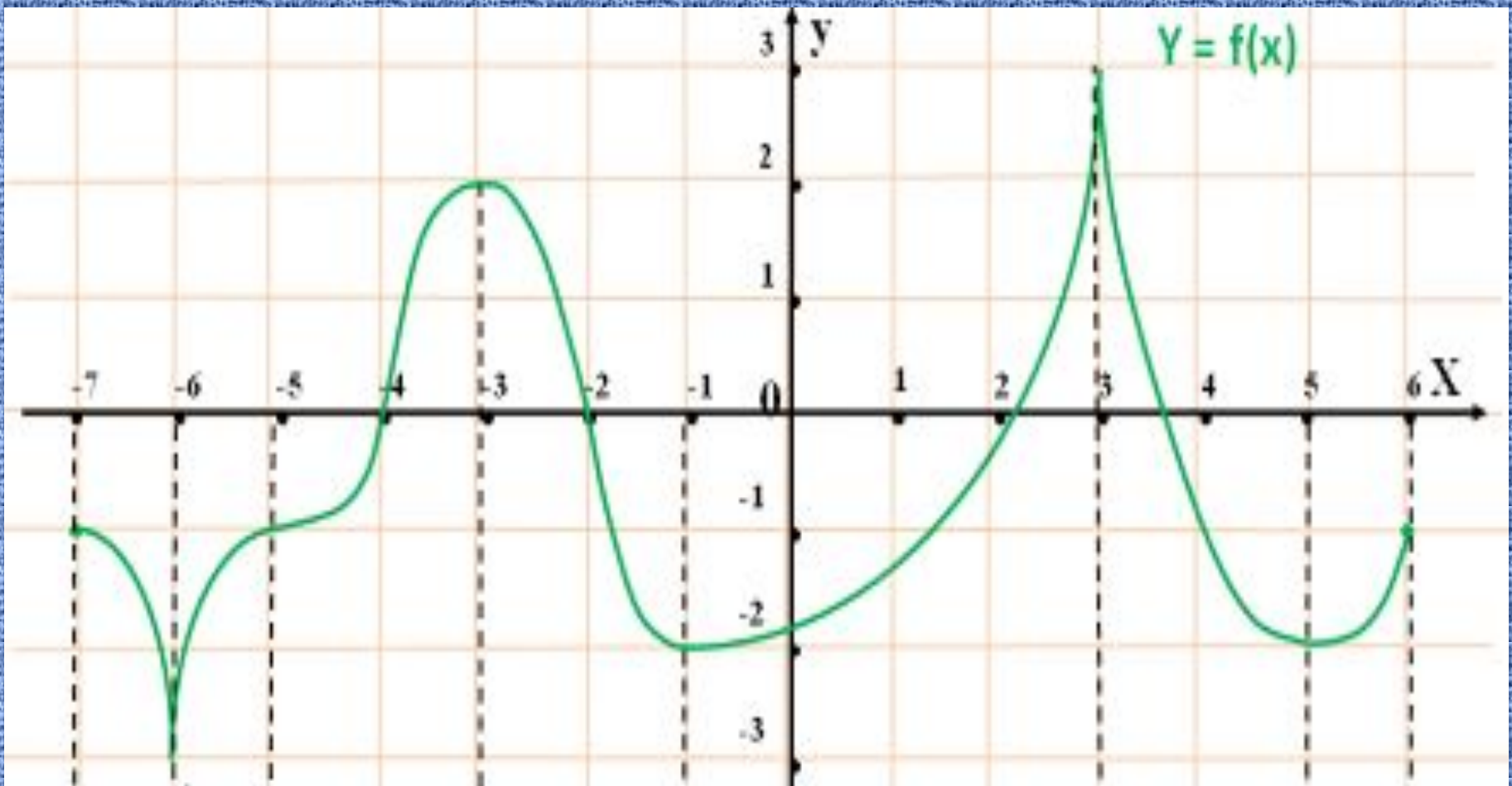
Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5;4]$. График её производной изображен на рисунке. **Определите точки максимума и минимума функции $f(x)$.**



Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5; 4]$. График её производной изображен на рисунке. Определите **сколько существует точек на графике функции $f(x)$, касательные в которых параллельны прямой $y = 5 - 2x$.**



Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-7; 6]$. Её график изображен на рисунке. Найдите точки минимума функции. **Определите точки в которых её производная равна 0.**

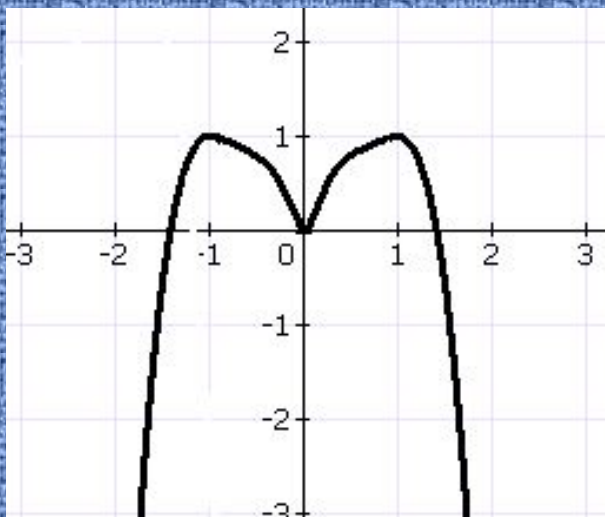


Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-7; 6]$. Её график изображен на рисунке. Найдите точки максимума функции. **Определите точки в которых производная этой функции не существует.**

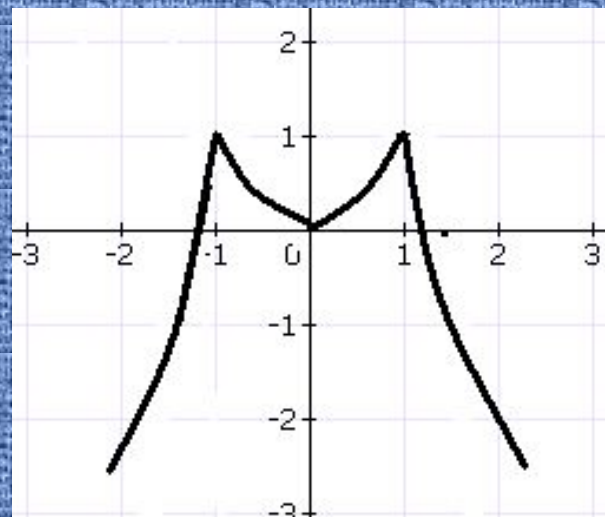
На каком рисунке изображен график функции

$$y = 2x^2 - x^4$$

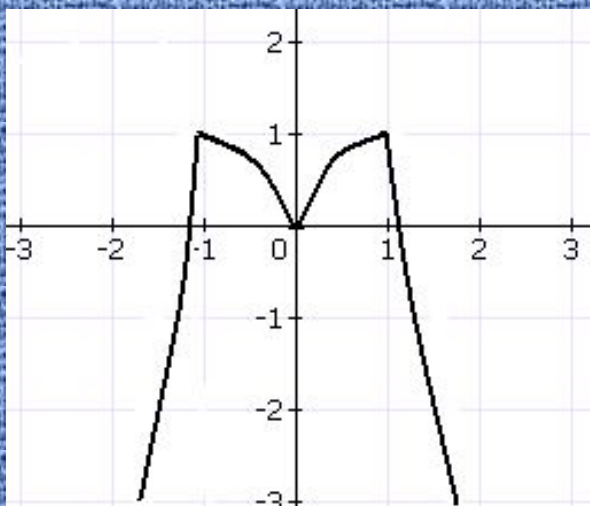
1



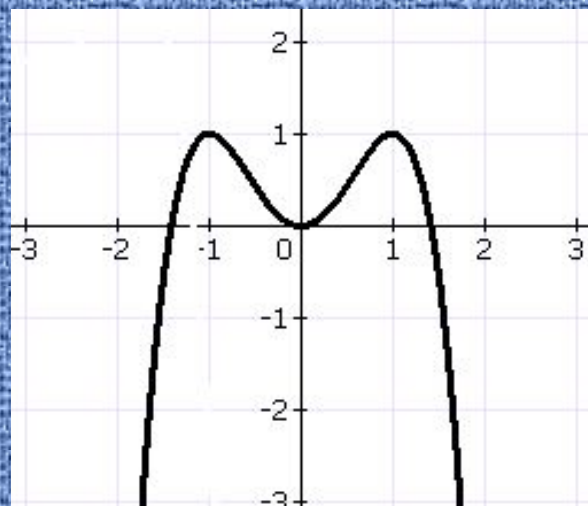
3



2



4

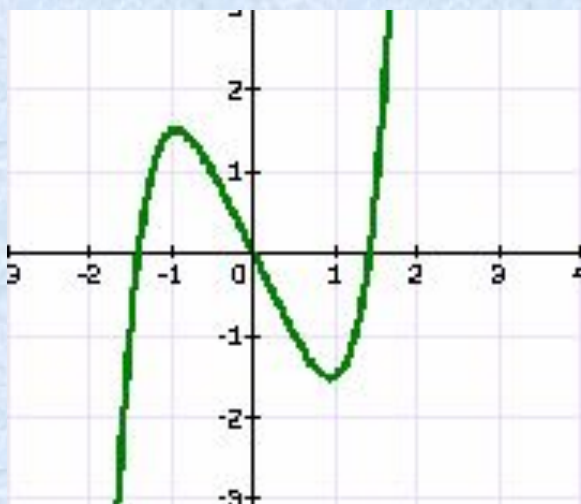


Тест: Исследование функции по графику.

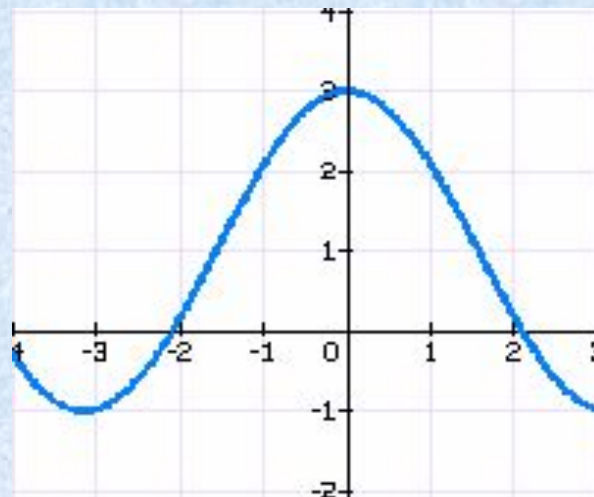
- Тест состоит из 5 вопросов.
- К каждому вопросу предложено 4 ответа, один из них верный.
- **Желаю удачи!**

1. Для какой функции на интервале
1 вар.: $[1; 2]$ производная отрицательна?
2 вар.: $[-1; 0]$ производная отрицательна?

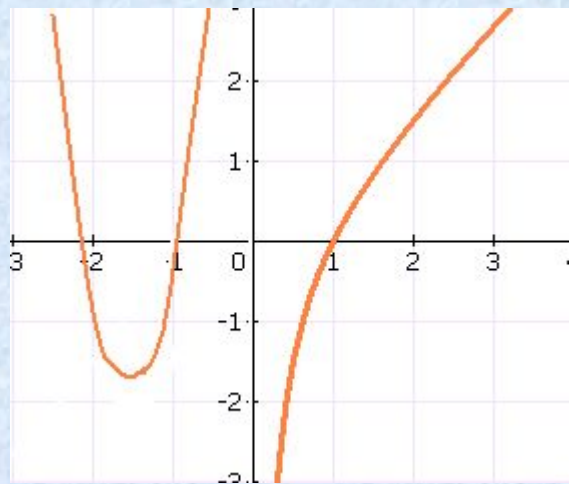
1



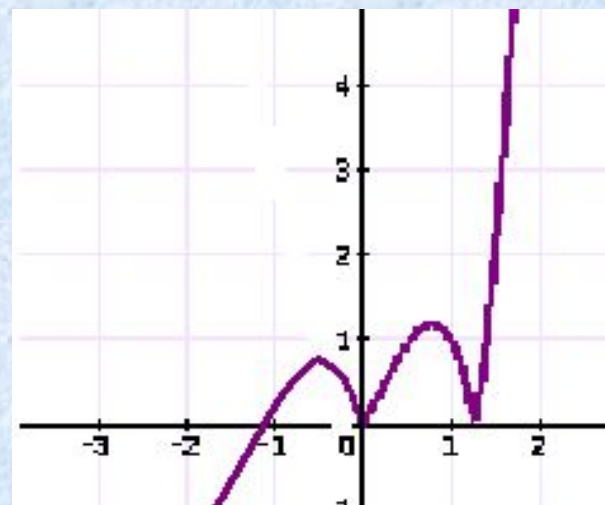
3



2



4

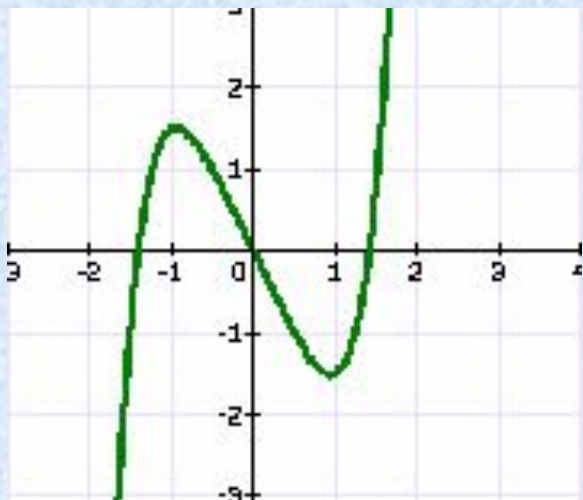


На каком рисунке график функции имеет точку

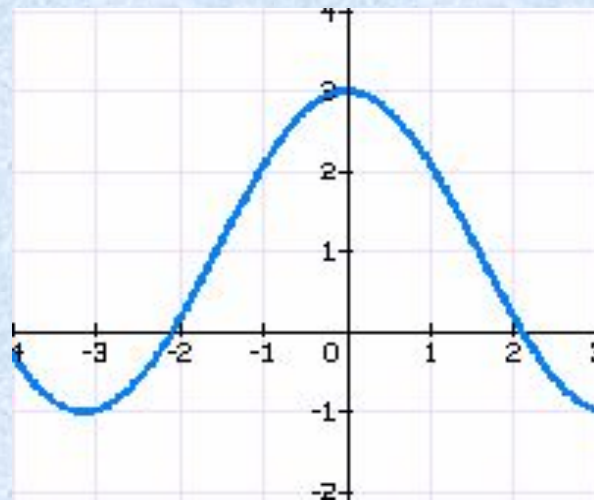
1 вар.: максимума при $x = -1$?

2 вар.: минимума при $x = 0$?

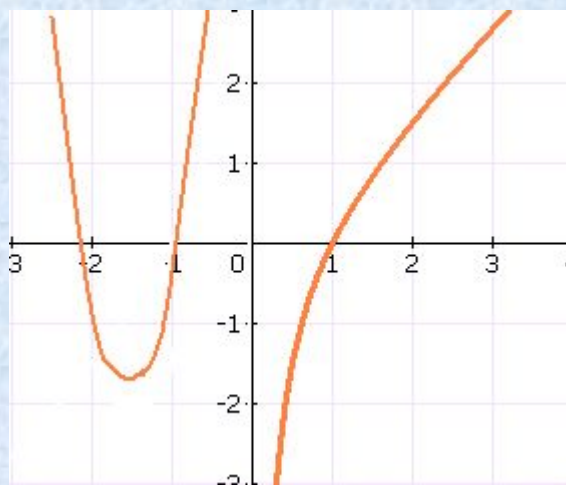
1



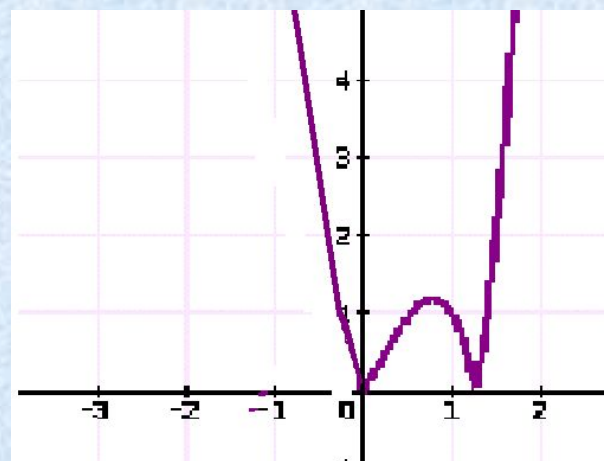
3



2



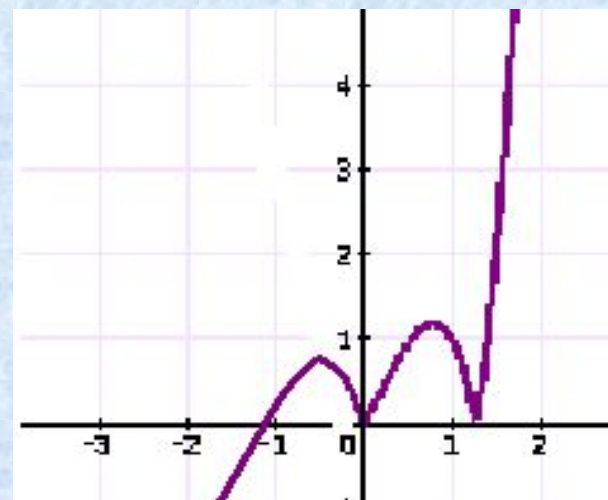
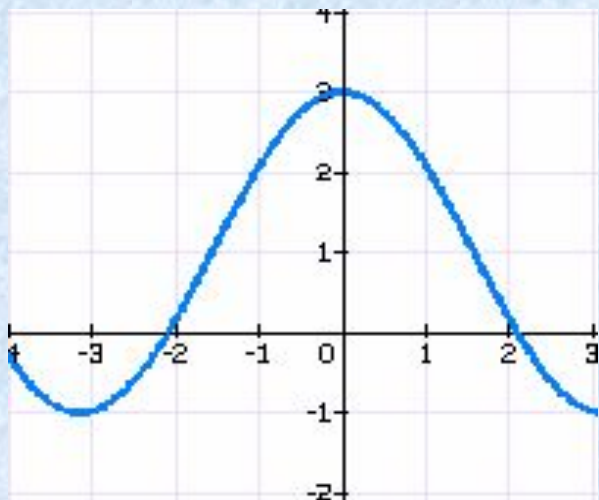
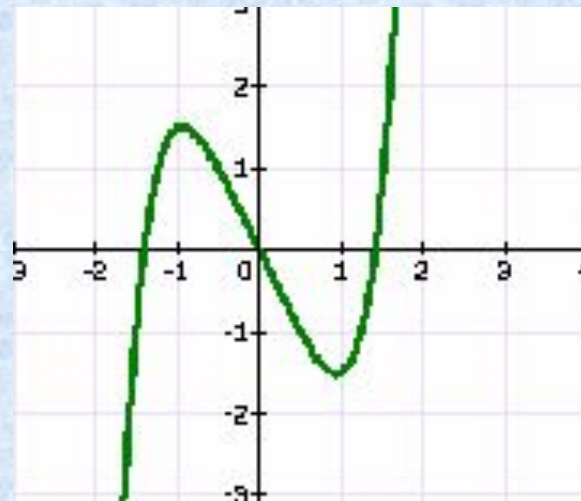
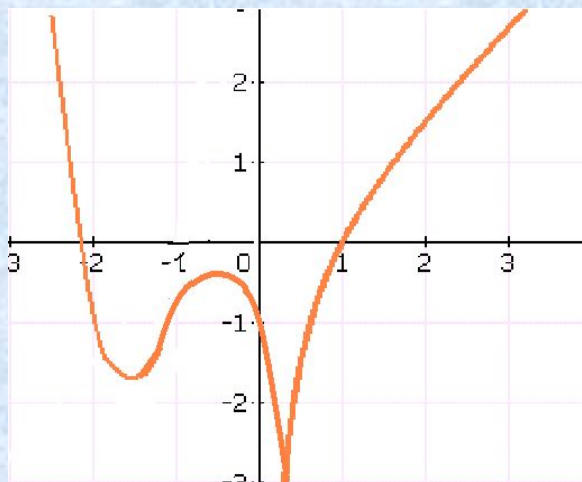
4



На каком рисунке график функции имеет ровно две критические точки на интервале

1 вар.: $[-2;2]$?

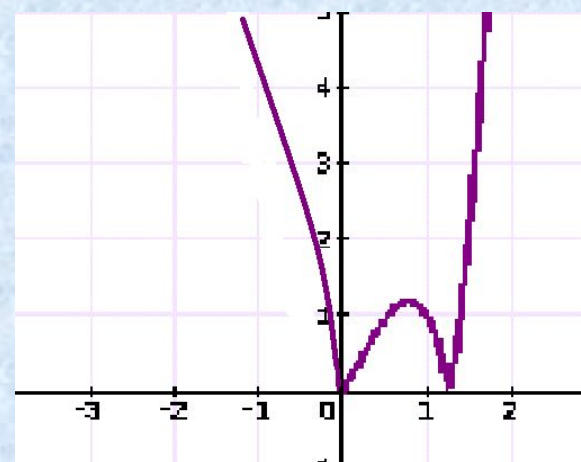
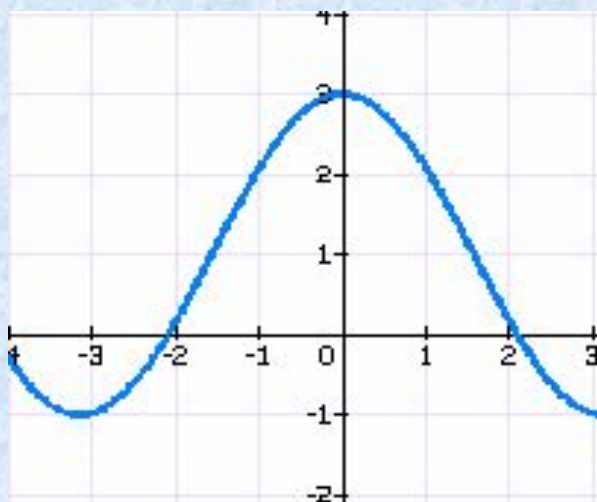
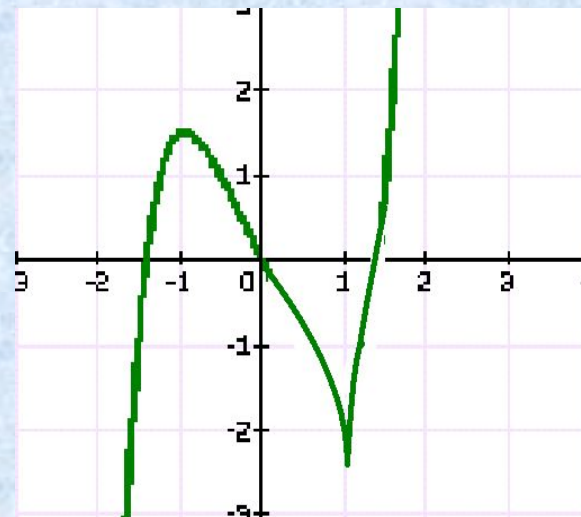
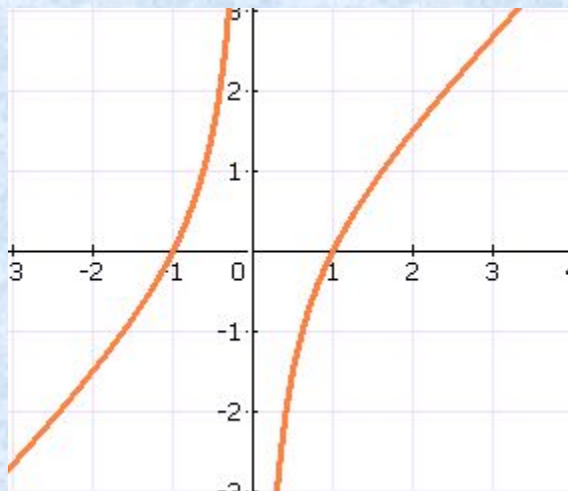
2 вар.: $[-2;0]$?



Какая функция определена, а её производная нет при:

1 вар.: $x = 0$;

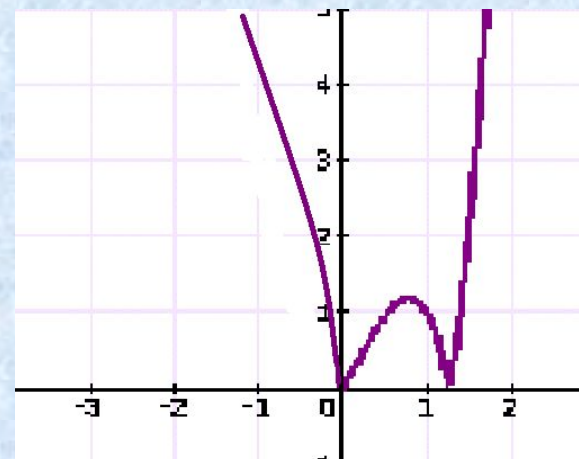
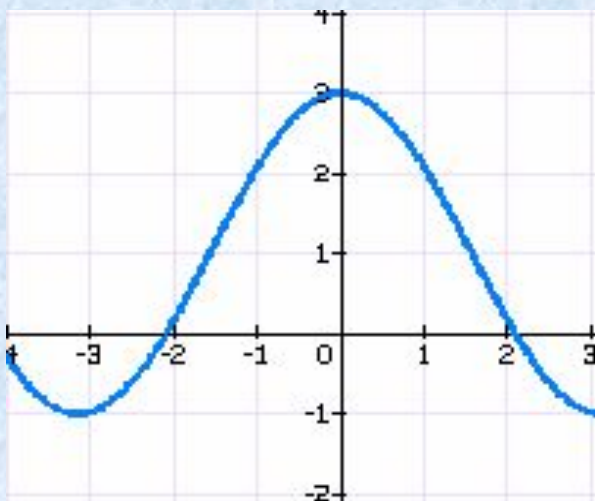
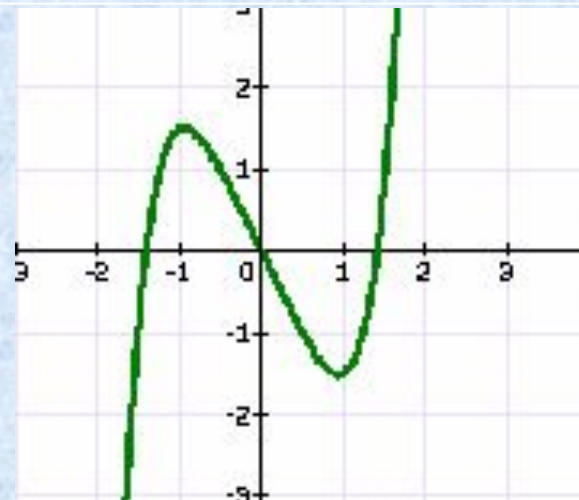
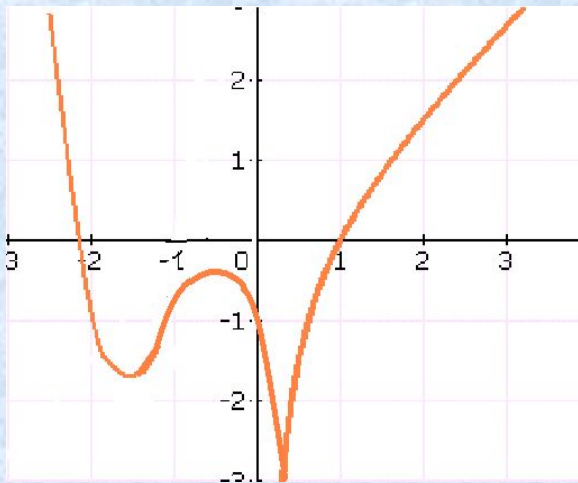
2 вар.: $x = 1$.



На каком рисунке производная функции равна нулю в точке:

1 вар.: $x = 0$?

2 вар.: $x = 1$?





**Чебышев Пафнутий
Львович (1821-1894),
знаменитый русский
математик, основатель
Петербуржской
математической школы**

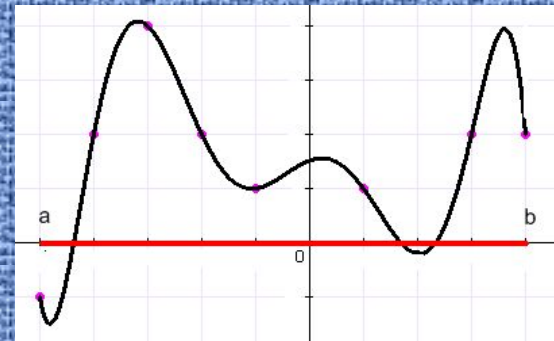
“...Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды”.

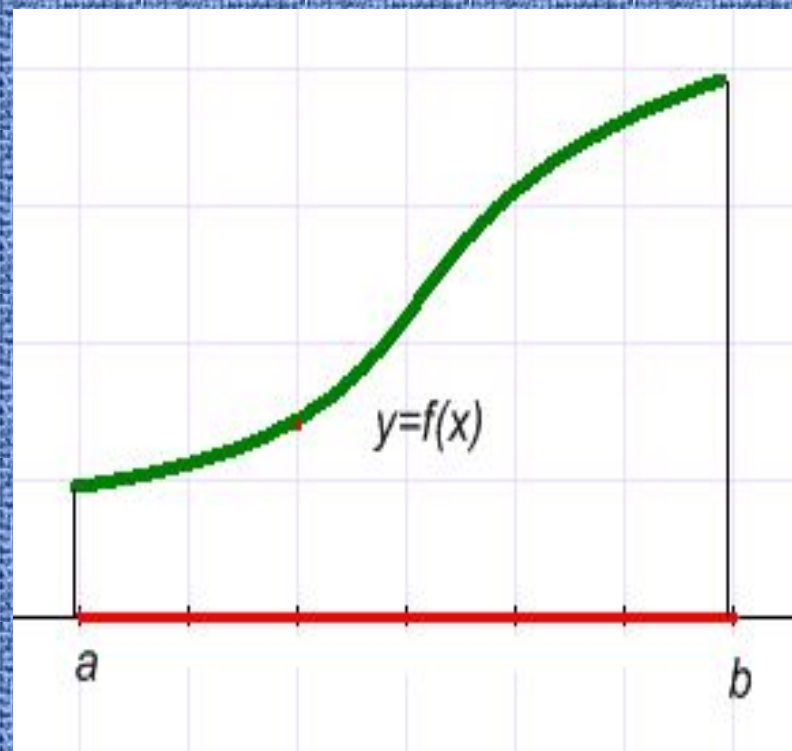
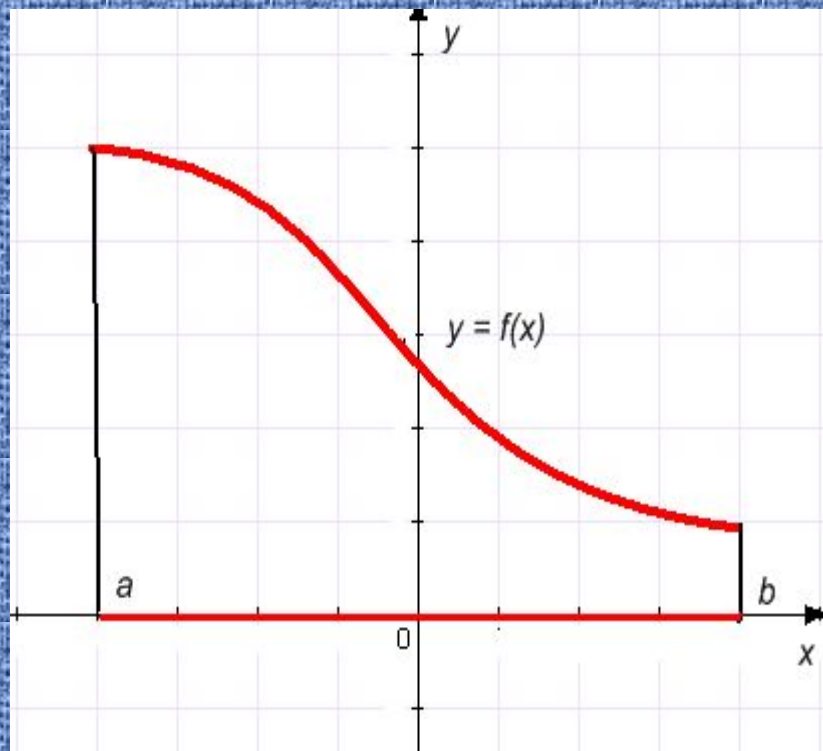
Теорема Вейерштрасса



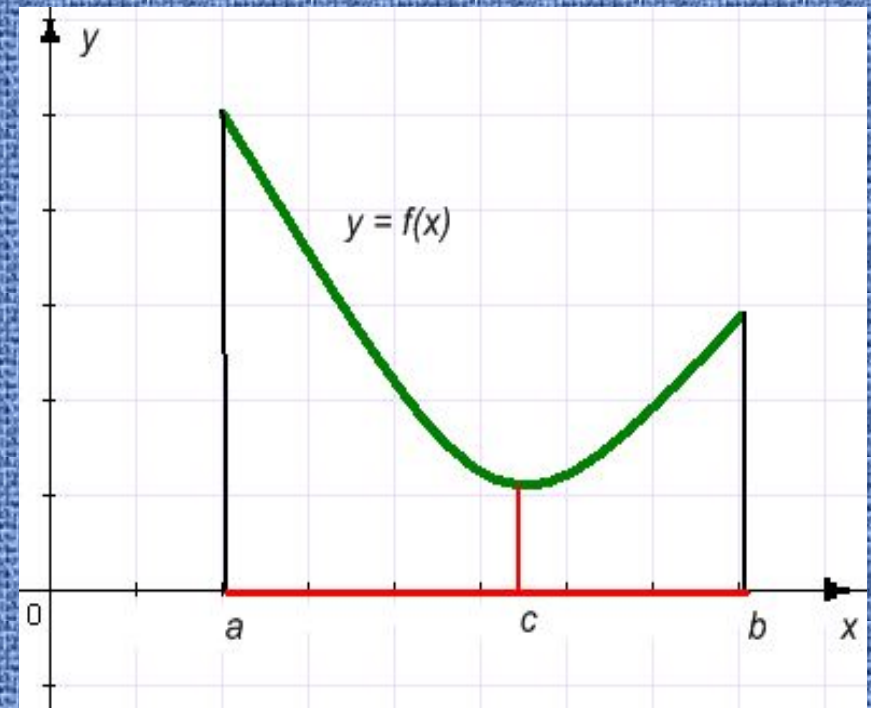
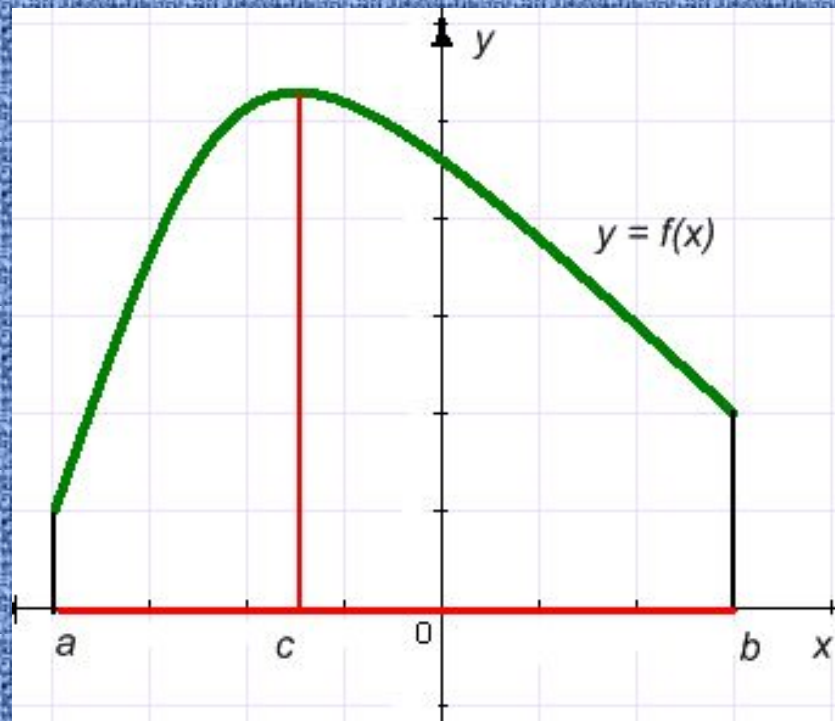
Вейерштрасс Карл
Теодор Вильгельм
(1815-1897 гг.) -
немецкий математик

Непрерывная на
отрезке $[a;b]$
функция f
принимает на
этом отрезке
наибольшее и
наименьшее
значения.



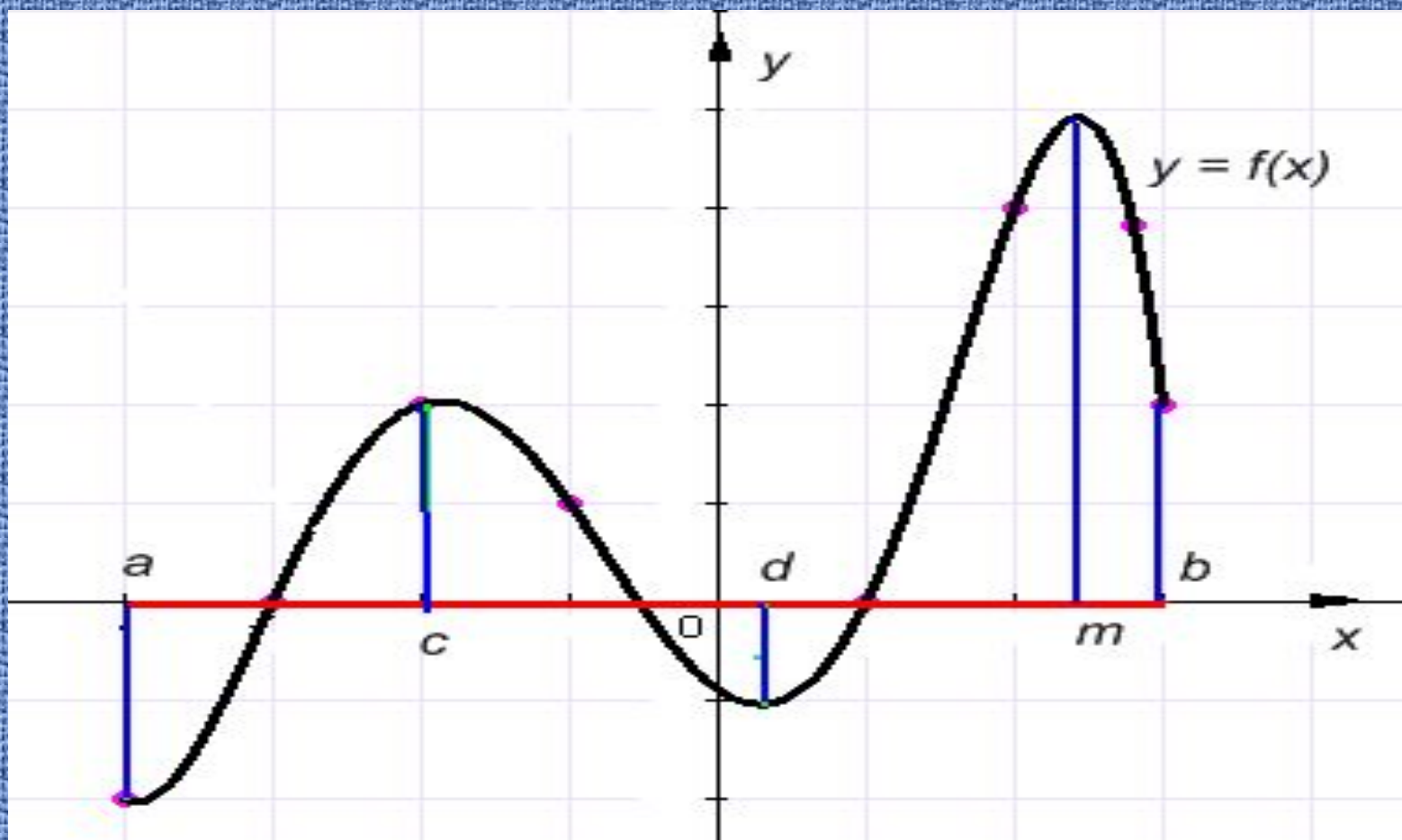


Если функция $f(x)$ **возрастает (убывает) на $[a;b]$, то **наибольшего** или **наименьшего** значения она достигает на **концах этого отрезка**.**



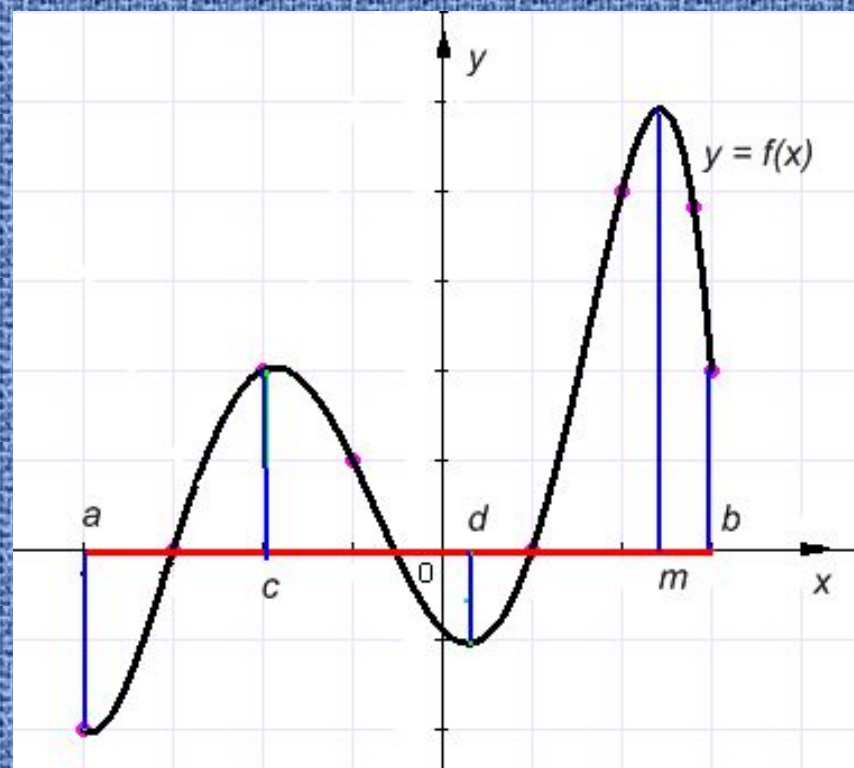
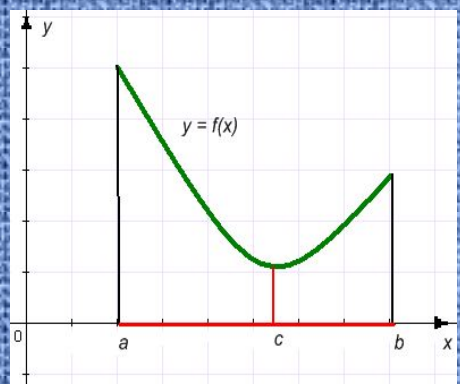
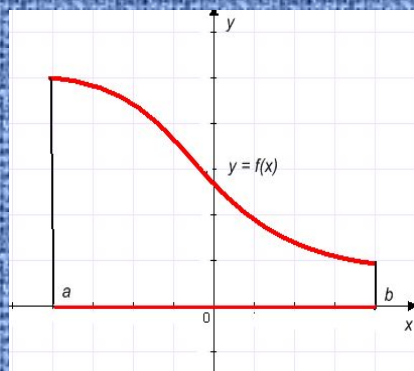
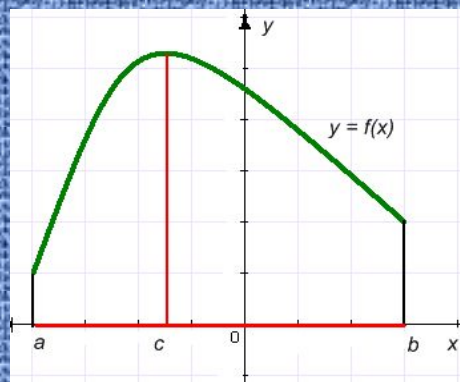
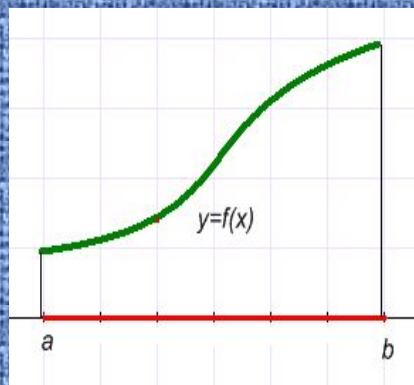
Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет лишь одну критическую точку и она является **точкой максимума** (**минимума**), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение

$$f_{\max} = f_{\text{наиб.}} \quad f_{\min} = f_{\text{наим.}}$$



Наибольшего (наименьшего) значения непрерывная на $[a; b]$ функция достигает либо на **концах отрезка**, либо в **критических точках**, лежащих на этом отрезке.

Проанализируйте все рассмотренные случаи. В каких точках функция достигает **наибольшего** (**наименьшего**) значений?



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на $[a;b]$

1. Найти **критические точки** функции на интервале $(a; b)$;
2. **Вычислить значения функции** в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$,
3. Среди всех вычисленных значений функции **выбрать наибольшее и наименьшее**

Наибольшее значение

$$\max_{[a;b]} f(x)$$

Наименьшее значение

$$\min_{[a;b]} f(x)$$

Задача:

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 2 \text{ на отрезке } [-2; 2].$$

Решение.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, значит функция непрерывна на рассматриваемом отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x) = x^2 + 2x - 3$
 $f'(x) = 0$, если $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x = -3$ или $x = 1$.
 $x = -3$ не лежит на рассматриваемом отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = -\frac{8}{3} + 4 + 6 - 2 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

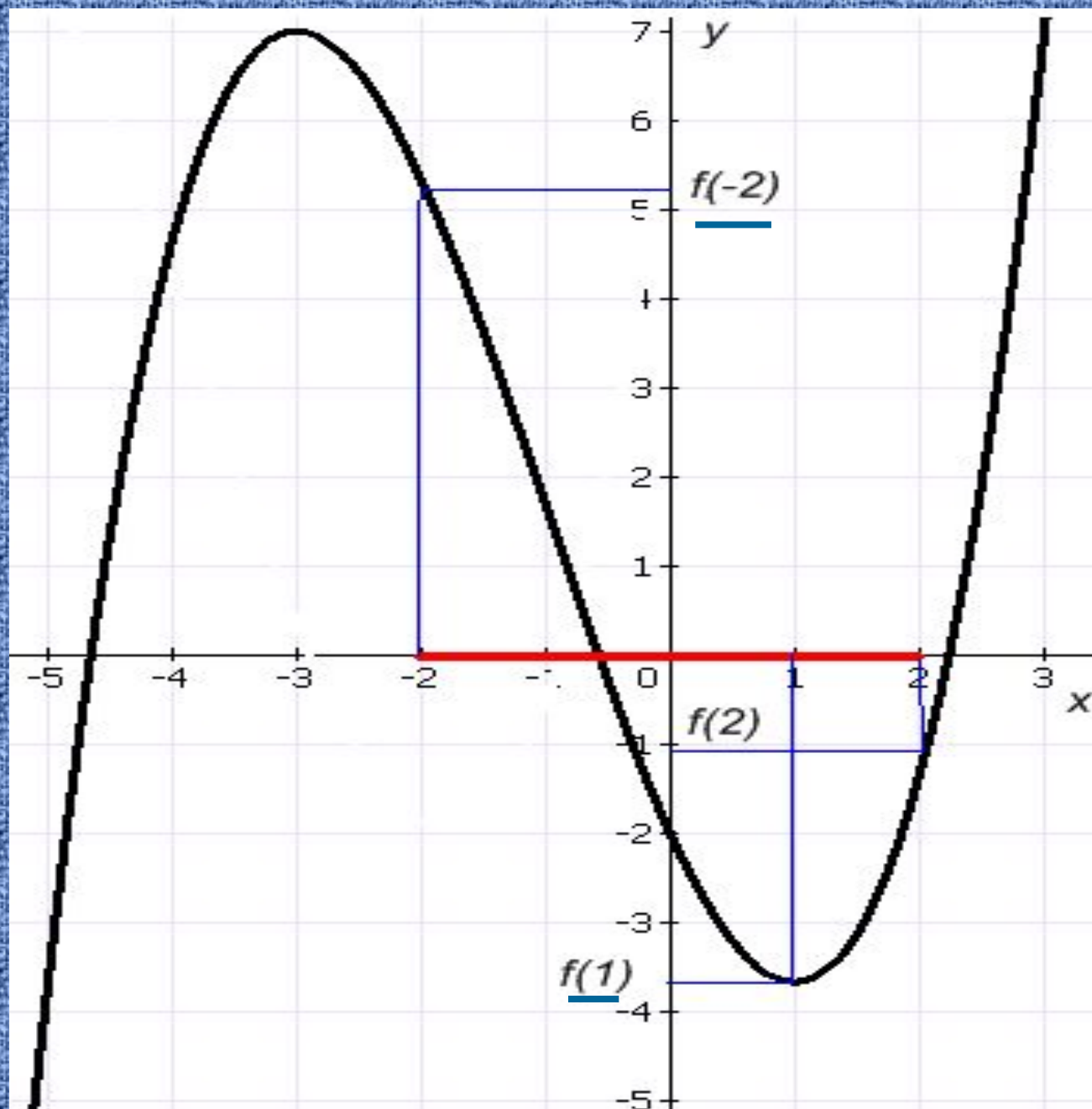
$$f(1) = \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 4 = -3\frac{2}{3};$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 2\frac{2}{3} - 4 = -1\frac{1}{3}$$

4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -3\frac{2}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке $[-2; 2]$.



Решение:

1. $D(f) = R$,

2. Найдем критические точки

функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, $f'(x) = 0$, если
 $3x^2 - 6x + 3 = 0$. Отсюда, $x = 1$.

3. Найдем значения функции на концах отрезка
и в критической точке, лежащей на этом
отрезке :

$$f(-2) = -8 - 12 - 6 + 2 = -24$$

$$f(1) = 1 - 3 + 3 + 2 = 3$$

$$f(2) = 8 - 12 + 6 + 2 = 4$$

4. Выберем из полученных значений

наибольшее и наименьшее: $\max_{[-2;2]} f(x) = f(2) = 4$;

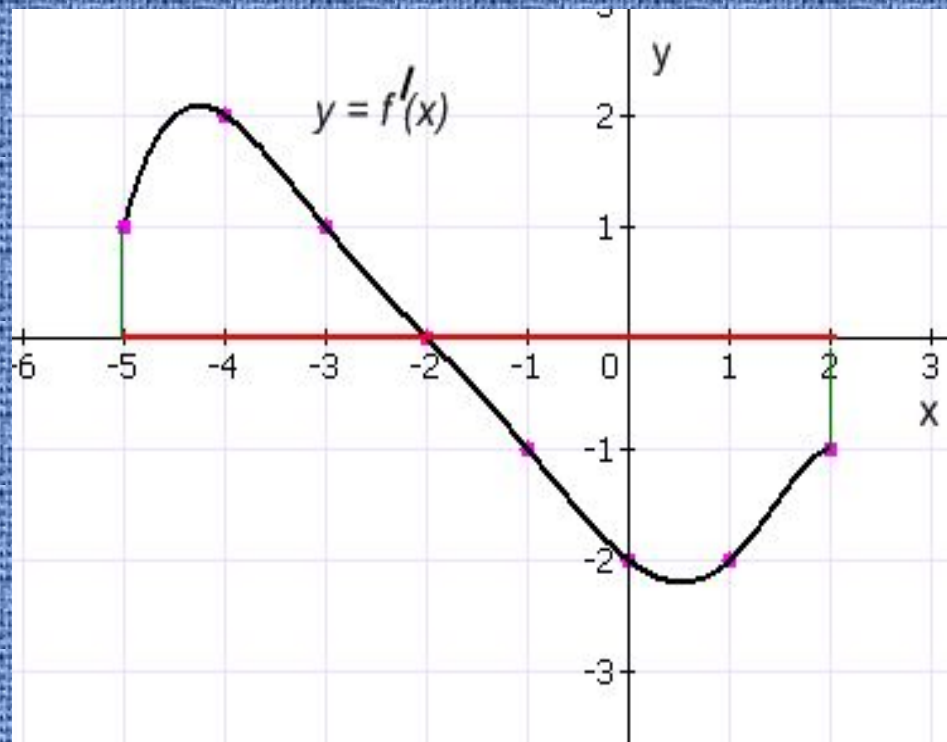
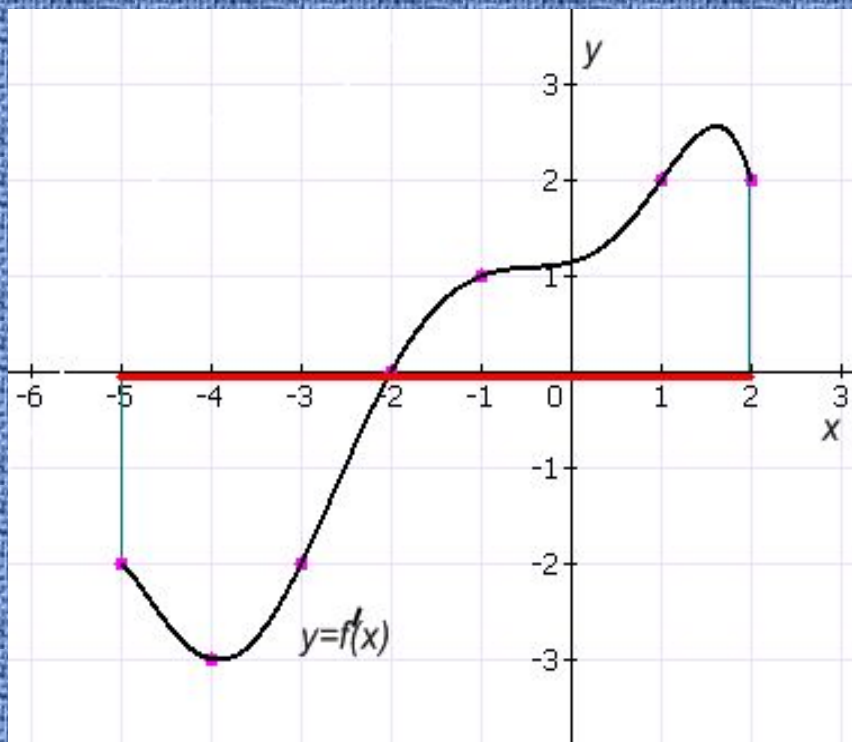
$$\min_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = -24$$



optimum -

«**НАИЛУЧШИЙ**»

На рисунке изображен график производной функции. Можно ли по этому графику найти в какой точке функция достигает **наибольшего (наименьшего)** значений? **Ответ обоснуйте.**



ЕГЭ 2008г, С1

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} - 2x^3 - 12x^2 + \left| \sqrt{9 - x^2} - 4 \right|.$$

Самостоятельная работа

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

I в. $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$ на отрезке $[-1; 4]$.

II в. $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.