История комплексных чисел

от Кардано до Гамильтона

Галина Ивановна Синкевич
СПбГАСУ

В 1494 г. в своей книге «Сумма арифметики» Лука Пачоли написал, что решение кубических уравнений в общем виде столь же невозможно, как и квадратура круга.

$$x^3 + px = q$$

$$x^3 = px + q$$

$$x^3 + q = px$$

$$p, q > 0$$

1545 г. Формула решения кубического уравнения. Кардано и Тарталья (473 года назад)

Тарталья методом проб и ошибок приходит к тому, что корень уравнения $x^3 + qx = r$ должен иметь вид $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Возведём в куб: $x^3 = u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v$

Умножим $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

на $3\sqrt[3]{uv}$

получим $3\sqrt[3]{uv}x = 3\sqrt[3]{u^2 v} - 3\sqrt[3]{uv^2}$

сложим это равенство с $x^3 = u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v$

получим $x^3 + 3\sqrt[3]{uv}x = u - v$

сравним с исходным уравнением: $q = 3\sqrt[3]{uv}$ $r = u - v$

следовательно, $u^2 - ur - \left(\frac{q}{3}\right)^3 = 0$

откуда найдём *u* и выразим *x*:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3} + \frac{r}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3} - \frac{r}{2}}$$

Когда куб рядом с вещью $x^3 + qx = r$

Вместе равны каком-нибудь числу,

То найди два других числа, на него разнящихся,

Потом допусти и всегда держись

Этого правила, чтобы их произведение

Должно равняться кубу трети вещи.

Возьми от них стороны куба

И правильно вычти их.

Остаток даст тебе искомую вещь…

Куб рядом с вещью – это $x^3 + qx$

число – *r*; на него разнящихся: $u - v = r$

произведение, равное «кубу трети вещи»: $uv = \left(\frac{q}{3}\right)^3$

«правильно вычти их»: $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

остаток – это сам *x*.

Кардано понимал, что кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ может иметь три вещественных корня и их сумма равна -a .
В такого рода общих утверждениях у Кардано не было предшественников. Кардано сам нашёл решение полного кубического уравнения, заметив, говоря современным языком, что подстановка $x = y - \frac{a}{3}$ уничтожает член с x^2.

$$x^3 + px + q = 0$$

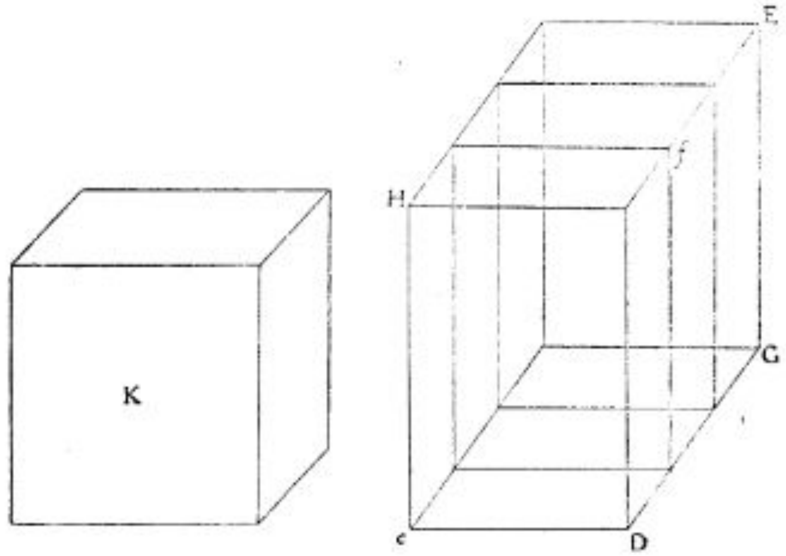
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

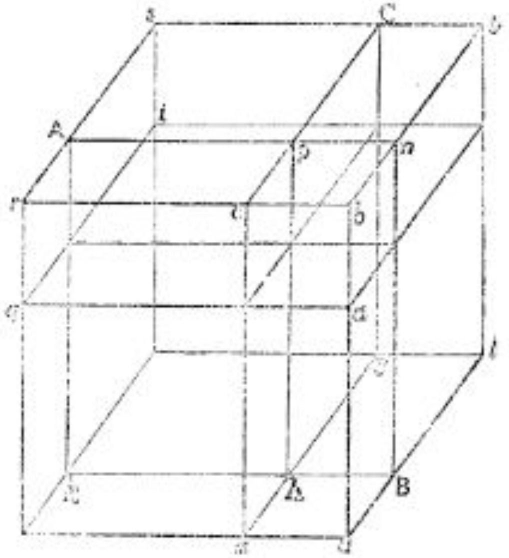
Геометрический образ Кардано:

Если куб со стороной $\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{v}+x$ разрезать плоскостями, параллельными граням, на куб со стороной $\sqrt[3]{v}$ и куб со стороной x, получается, кроме двух кубов, три прямоугольных параллелепипеда со сторонами $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[3]{v}$, x, и три – со сторонами $\sqrt[3]{v}$, x, x; соотношение между объёмами даёт $x^3+3x^2\sqrt[3]{v}+3x\sqrt[3]{v^2}+v=u$

Для перехода к $x^3+3\sqrt[3]{uv}x=u-v$ параллелепипеды разных типов попарно объединяются.

quanto è la . *r* . *c* . , et la . *c* . *b* . ciascuna da se, et sapendo, che tutta la superficie . *c* . *r* . *A* . è 2, bisogna trovare due nu-





meri, che moltiplicati l'uno via l'altro facciano 2., che dato, che la . *r* . *A* . sia 1^1 la . *r* . *c* . sarà 2/[illegible] che moltiplicato

Кардано, «Великое искусство», Глава XXXVII (De regula falsum ponendi – правило ложного положения, отрицательное неизвестное):

Правило ложного положения, отрицательное неизвестное

Второй вид ложного решения заключается в корне из отрицательного количества (per radicem *m*). Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем, 40, - как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется $m:15$; если взять от этого *R* и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут:

$5p:Rm:15$ и $5m:Rm:15$

De regula falsum ponendi

Secundum genus positionis falsæ, est per radicem m̃. Et dabo exemplum, si quis dicat, diuide 10. in duas partes, ex quarum vnius in reliquam ductu, producatur 30. aut 40. manifestum est quad casus seu quæstio est impossibilis, sic tamen operabimur, diuidemus 10. per æqualia, & fiet eius medietas 5. duc in se fit 25. auferes ex 25. ipsum producendum, vtpote 40. vt docui te, in capitulo operationum, in quarto libro, fiet residuum m̃. 15. cuius ℞. addita & detracta à 5. ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40. erunt igitur hæ, 5. p̃. ℞. m̃. 15. & 5. m̃. ℞. m̃. 15.

$$x(10-x)=40$$

$$x^2+40=10x$$

$$x=5\pm\sqrt{25-40}=5\pm\sqrt{-15}$$

Рафаэль Бомбелли. 1572 г. (446 лет назад)

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Пример Бомбелли. Уравнение $x^3 = 15x + 4$
имеет вещественный корень $x = 4$,
однако по формулам Кардано получаем: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-11}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-11}}$

Бомбелли обнаружил, что $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-11}} = 2 \pm \sqrt{-1}$

откуда сразу получается нужный вещественный корень.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-11}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-11}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Он подчеркнул, что в подобных (неприводимых) случаях комплексные корни всегда сопряжены, поэтому и получается вещественный корень.

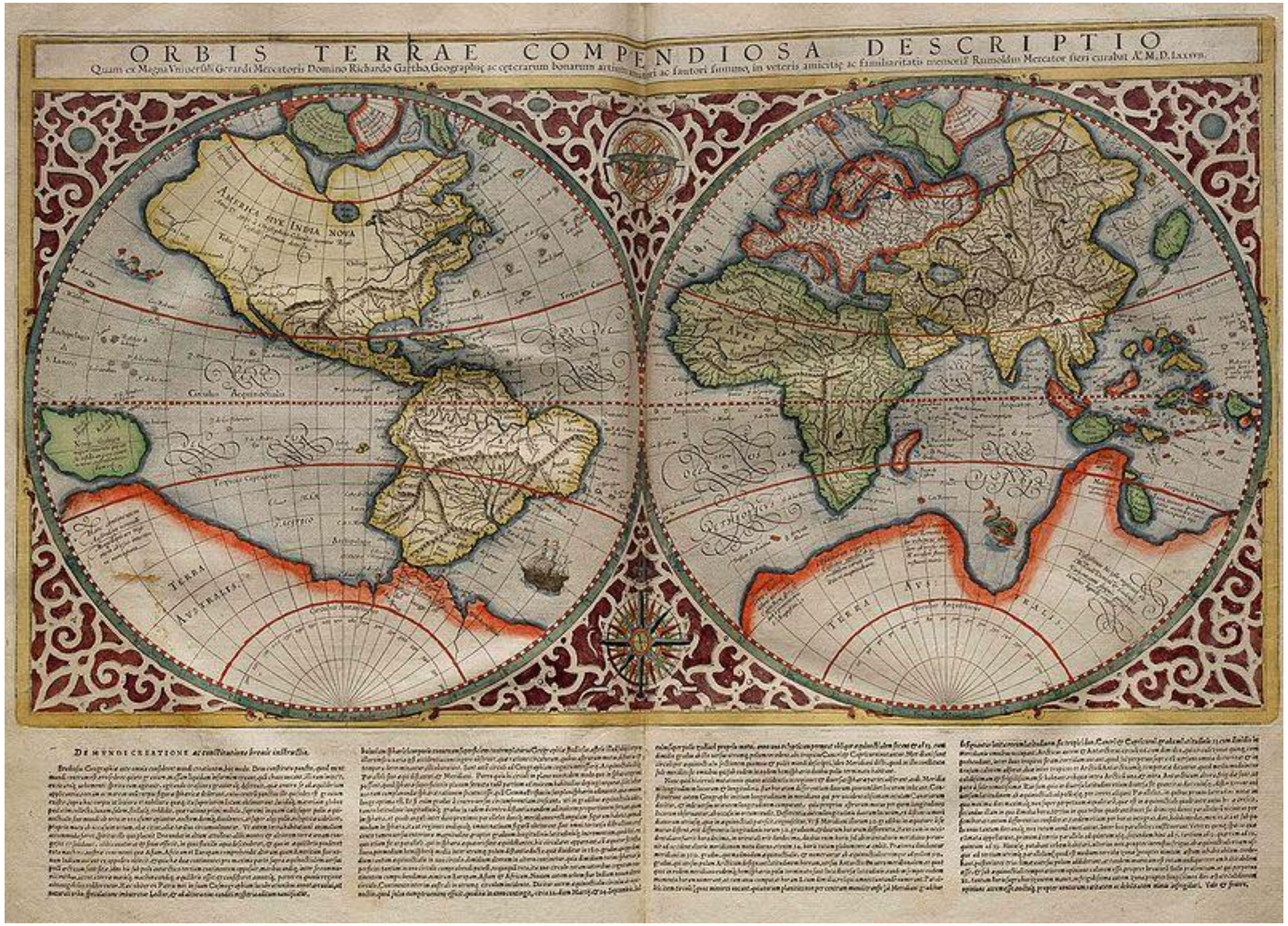
1594, Франсуа Виет (1540–1603)

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - \ldots + 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a$$

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

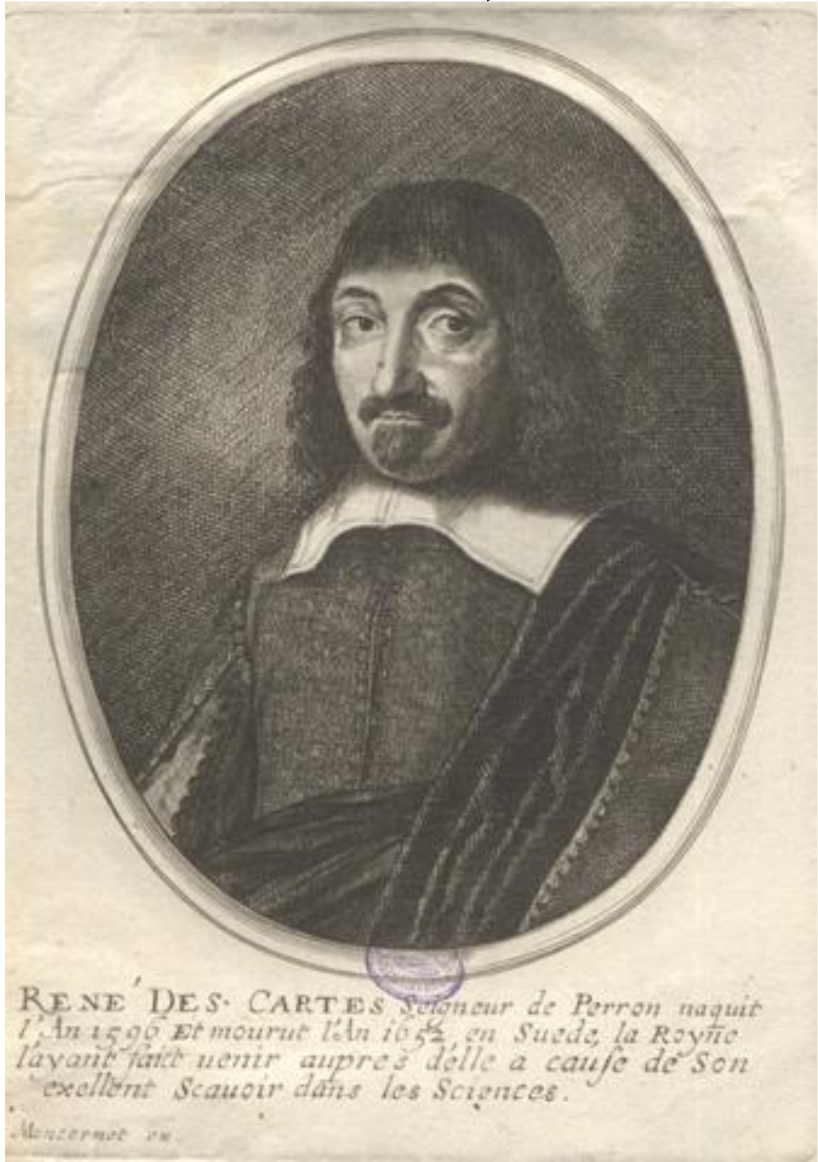
$$2\sin\frac{n \cdot 360^\circ + 12^\circ}{45}$$

1569 г. Герард Меркатор (1512-1594), фламандский картограф и географ.



1637, Рене Декарт (1596-1650)

В 1637 г. была издана «Геометрия» Декарта, в которой сочетаются методы геометрии и алгебры. Мнимые корни он называет воображаемыми (imaginariae). «Не существует ни одной величины, - указывал Декарт, - которая соответствует этим воображаемым корням».



1685, Джон Валлис (1616-1703)

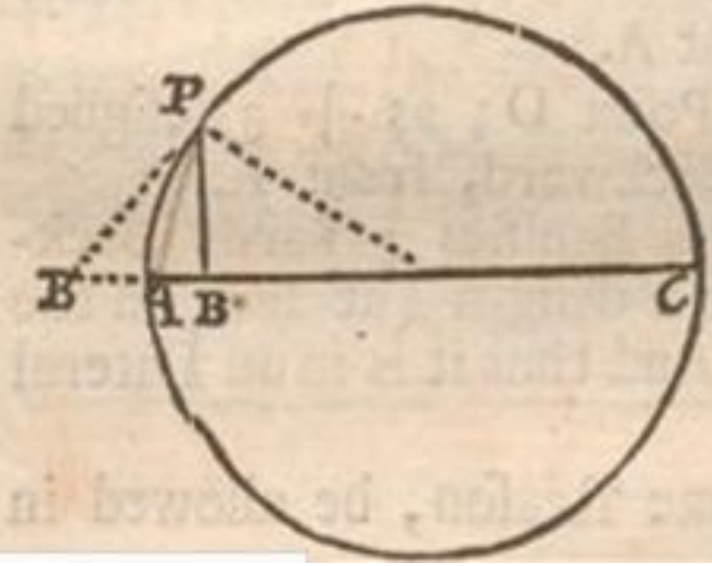
В 1685 г. в «Трактате об алгебре» Валлис предложил первую геометрическую интерпретацию мнимых чисел: мнимую величину $\sqrt{-bc}$ он рассматривает как среднюю пропорциональную между величинами $-b$ и c или b и $-c$.

CHAP. LXVII.

The ſame Exemplified in Geometry.

WHAT hath been already ſaid of $\sqrt{-bc}$ in Algebra, (as a Mean Proportional between a Poſitive and a Negative Quantity:) may be thus Exemplified in Geometry.

If (for inſtance,) Forward from A, I take $AB = +b$; and Forward from thence, $BC = +c$; (making $AC = +AB + BC = +b + c$, the Diameter of a Circle:) Then is the Sine, or Mean Proportional $BP = \sqrt{+bc}$.



But if Backward from A, I take $AB = -b$; and then Forward from that B, $BC = +c$; (making $AC = -AB + BC = -b + c$, the Diameter of the Circle:) Then is the Tangent or Mean Proportional $BP = \sqrt{-bc}$.

В XVI веке в связи с решением кубических и квадратных уравнений были введены выражения вида $a+b\sqrt{-1}$. Валлис полагал, что мнимые корни уравнений связаны с извлечением квадратных корней. Но всегда ли эта операция приводит к результату $a+b\sqrt{-1}$?

1702 г. Ошибка Лейбница (1646-1716)

В 1702 г. Лейбниц высказал мнение, что это не так и что существуют мнимости ещё и другого типа, ибо по недосмотру он не заметил разложения двучлена x^4+a^4 на множители $\left(x^2+\sqrt{2}ax+a^2\right)\left(x^2-\sqrt{2}ax+a^2\right)$;
а вместе с тем получил

$$x^4+a^4=\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

1702 г. Г. В. Лейбниц (1646-1716)

- Itaque elegans et mirabile effugium repetir in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus
- То, что мы называем мнимым корнем – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием.

[Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas //Acta eruditorum. 1702, May. P.210-219. – P.216. (Наглядное доказательство нового анализа для познания бесконечности по отношению к суммам и квадратурам)].

1707 г. Абрахам де Муавр (1667–1754)

В 1706/07 г. Муавр опубликовал формулу, выражаемую современным языком как

$$\cos x = \frac{1}{2}(\cos(nx) + i\sin(nx))^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos(nx) - i\sin(nx))^{\frac{1}{n}}$$

для положительных целых n.

Это было сделано в статье «Аналитическое решение некоторых уравнений третьей, пятой, седьмой, девятой и высших следующих до бесконечности степеней в конечном виде, аналогичное правилам Кардано для кубических уравнений».

В статье Муавр рассматривал два уравнения с конечным числом членов при нечётном *n*

$$ny+\frac{nn-1}{2\cdot 3}ny^3+\frac{nn-1}{2\cdot 3}\,\frac{nn-9}{4\cdot 5}ny^5+\frac{nn-1}{2\cdot 3}\,\frac{nn-9}{4\cdot 5}\,\frac{nn-25}{6\cdot 7}ny^7+\ldots=a \qquad (1)$$

$$ny+\frac{1-nn}{2\cdot 3}ny^3+\frac{1-nn}{2\cdot 3}\,\frac{9-nn}{4\cdot 5}ny^5+\frac{1-nn}{2\cdot 3}\,\frac{9-nn}{4\cdot 5}\,\frac{25-nn}{6\cdot 7}ny^7+\ldots=a \qquad (2)$$

с решениями для первого

$$y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}-a} \qquad (3)$$

и для второго уравнения

$$y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}} \qquad (4)$$

Для каждого из решений приводились эквивалентные формы. Статья содержала два числовых примера, и в одном из них был мимоходом сделан намёк на происхождение уравнения (2), которое представляет собой зависимость между синусом *y* дуги α и синусом *a* дуги *n*α. Если $y = \sin\phi$, $a = \sin n\phi$, можно выразить $\sin n\phi$ через $\sin\phi$.

Этот результат получил ещё Ньютон, сообщив его в письме Лейбницу от 13 июня 1676 г., а Муавр получил в статье 1698. Это соотношение было получено Муавром как частный случай. С помощью замены

$y = \sin\alpha \quad a = \sin n\alpha$

формулу (4) можно переписать в виде

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha + \sqrt{-1}\cos n\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\alpha - \sqrt{-1}\cos n\alpha} \qquad (4')$$

Это равенство равносильно формуле, которую мы сейчас называем формулой Муавра:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

.

В 1722 г. он предложил формулу, известную как формулу Муавра : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

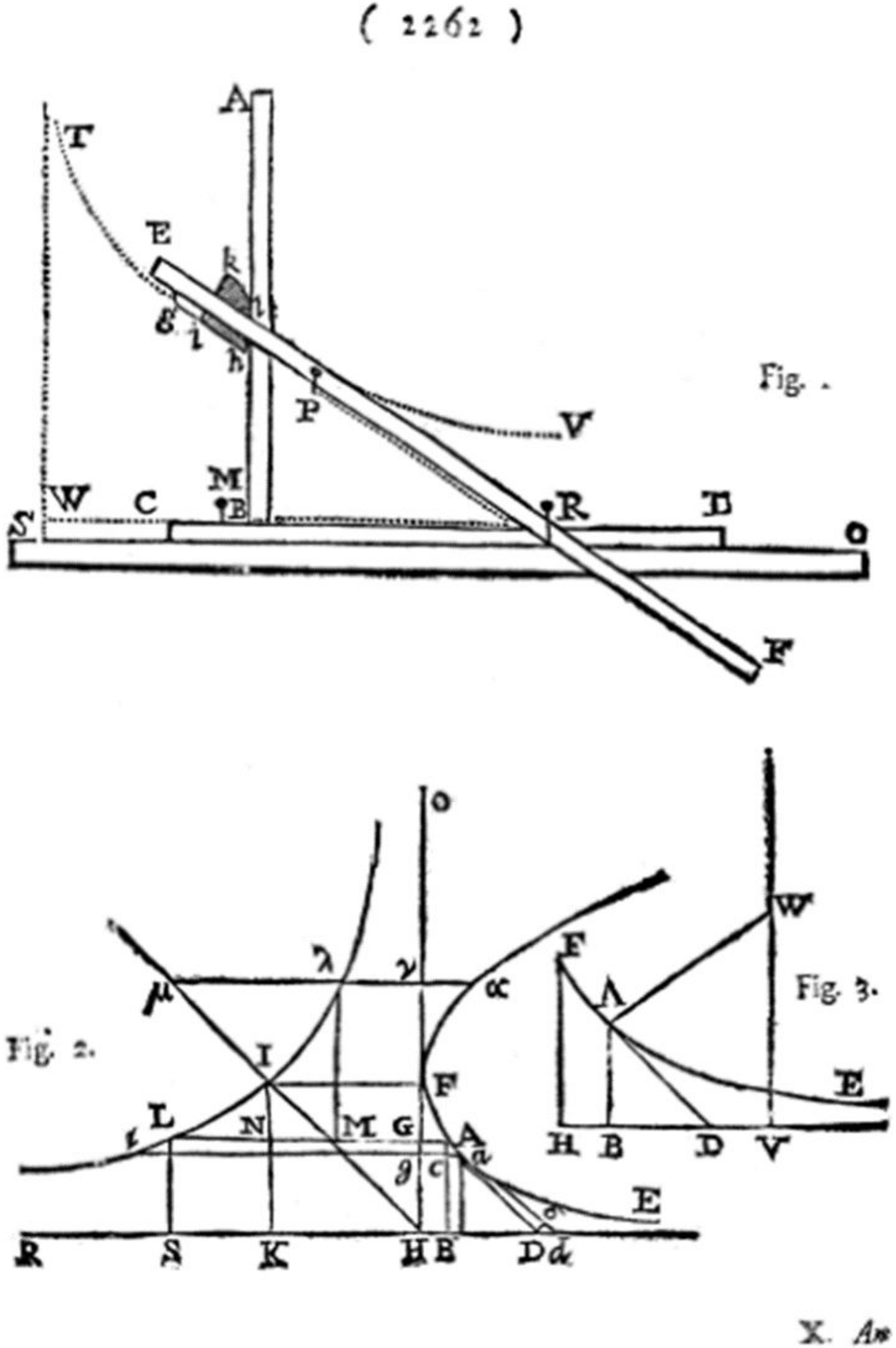
Муавр рассматривал задачу о делении на *n* равных частей угла или кругового сектора, а также задачу о делении на *n* равных частей сектора равносторонней гиперболы. Аналогия между уравнениями окружности и уравнения гиперболы привело его к идее мнимой подстановки.

PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS:

Aequationum Quarundam Potestatis Tertiae, Quintae, Septimae, Nonae, & Superiorum, ad Infinitum Usque Pergendo, in Terminis Finitis, ad Instar Regularum pro Cubicis Quae Vocantur Cardani, Resolutio Analytica

Ab. de Moivre

Phil. Trans. 1706-1707 **25**, 2368-2371, published 1 January 1706



К уравнению (1) Муавр пришёл, решая задачу о делении на n равных частей сектора равносторонней гиперболы, ограниченного двумя радиус-векторами, проведёнными из центра в вершину и ещё какую-либо точку кривой, и её дугой между этими двумя точками

1712 год. Спор о логарифме отрицательного и мнимого числа

$$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$$

$$\ln i=\ln\sqrt{-1}=\frac{1}{2}\ln(-1)$$

$$\ln(-1)$$

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\varphi+2k\pi i$$

XVIII век.

В «Dictionnaire Encyclopédique des Mathématiques» можно прочесть следующее:

Réel (*quantitè reéle*): количества, которые не содержат корней чётной степени из количеств отрицательных

Imaginaire: корни квадратные из отрицательных количеств. Называются так потому, что квадрат как положительного, так и отрицательного числа есть число положительное. Воображаемые количества являются противоположностью количеств реальных.

Л. Эйлер (1707-1783)

«Мнимым количеством называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например, $\sqrt{-1}$ или вообще $a+b\sqrt{-1}$, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль».

«Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через M, а другой – произведение также действительного количества N на $\sqrt{-1}$; таким образом, $\sqrt{-1}$ есть единственный источник всех мнимых выражений».

1768 г. Эйлер.
«Универсальная Арифметика»

что больше нежели ничево положительными; а все что меньше ничево отрицательными числами изъявляется, и такъ видимъ мы, что корни изъ отрицательныхъ чиселъ ни больше ни меньше нежели ничево, и самое ничево они также не будутъ, ибо 0 умноженной на 0 въ произведеніи даетъ 0, и слѣдовательно не отрицательное число.

Когда всѣ возможныя числа, какія только представить можно, суть больше и меньше 0 или самой 0; то изъ сего видно, что корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ, въ число возможныхъ чиселъ включены быть не могутъ, слѣдовательно суть числа *не возможныя*. Сіе обстоятельство ведетъ насъ къ познанію такихъ чиселъ, которыя по ихъ свойству суть не возможныя и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что ихъ въ умѣ только представить можно.

1768 г, ошибка Эйлера

148.

Когда $\sqrt{a}$ умноженной на $\sqrt{b}$ даетъ $\sqrt{ab}$; то $\sqrt{-2}$ умноженной на $\sqrt{-3}$ дастъ $\sqrt{6}$: равнымъ образомъ $\sqrt{-1}$ умноженной на $\sqrt{-4}$ дастъ $\sqrt{4}$, то есть 2; откуду видно, что два не возможные числа помноженные сами собою произвести могутъ возможное или дѣйствительное число. Но когда $\sqrt{-3}$ умноженъ будетъ на $\sqrt{+5}$, то получится $\sqrt{-15}$, или возможное число помноженное на не возможное, всегда не возможное производитъ.

В 1730-1740-х годах в Петербурге Эйлер разработал основы теории функций комплексного переменного. В своих работах Эйлер переходил от координат точки (x, y) к комплексному числу $p = x \pm \sqrt{-1}y$, представлял его в полярных координатах $p = s\left(\cos \omega \pm \sqrt{-1} \sin \omega\right)$.

В 1748 Эйлер доказал формулу Муавра для всех действительных n. Сейчас её доказывают как следствие из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

$$e^{i\pi} = -1$$

1749, Эйлер

LIB. I.

$$\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2};\ \text{atque } \sin. v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

In Capite autem præcedente vidimus esse $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$, denotante e basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}.\sin. v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}.\sin. v$.

139. Sit jam in iisdem formulis §. 130. n numerus infinite parvus, seu $n = \frac{1}{i}$, existente i numero infinite magno, erit $\cos. nz = \cos. \frac{z}{i} = 1$ & $\sin. nz = \sin. \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; Arcus enim evanescentis $\frac{z}{i}$ Sinus est ipsi æqualis, Cosinus vero $= 1$. His positis habebitur

$$1 = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)^{\frac{1}{i}} + (\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2}\ \&$$

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)^{\frac{1}{i}} - (\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Sumendis autem Logarithmis hyperbolicis supra (125) ostendimus esse $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$, seu $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}ly$, posito

posito y loco $1+x$. Nunc igitur, posito loco y, partim $\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z$ partim $\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z$, prodibit

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i}l(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z) + 1 + \frac{1}{i}l(\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)}{2} = 1,$$

ob Logarithmos evanescentes, ita ut hinc nil sequatur. Altera vero æquatio pro Sinu suppeditat:

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}l(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z) - \frac{1}{i}l(\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)}{2\sqrt{-1}}$$

ideoque $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\frac{\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z}{\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z}$, unde patet quemadmodum Logarithmi imaginarii ad Arcus circulares revocentur.

140. Cum sit $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \tan g. z$, Arcus z per suam Tangentem ita exprimetur ut sit $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\frac{1+\sqrt{-1}.\tan g. z}{1-\sqrt{-1}.\tan g. z}$. Supra vero (§. 123) vidimus esse $l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \&c.$. Posito ergo $x = \sqrt{-1}.\tan g. z$, fiet $z = \frac{\tan g. z}{1} - \frac{(\tan g. z)^3}{3} + \frac{(\tan g. z)^5}{5} - \frac{(\tan g. z)^7}{7} + \&c.$. Si ergo ponamus $\tan g. z = t$, ut sit z Arcus, cujus Tangens est t, quem ita indicabimus $A.\tan g. t$, ideoque erit $z = A\tan g. t$. Cognita ergo Tangente t erit Arcus respondens $z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \&c.$. Cum igitur, si Tangens t æquetur Radio 1, fiat Arcus $z =$ Arcui $45°$ seu $z = \frac{\pi}{4}$, erit $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$, quæ est Series a LEIBNITZIO primum producta, ad valorem Peripheriæ Circuli exprimendum.

141. Quo autem ex hujusmodi Serie longitudo Arcus Circuli

Жан Лерон Д'Аламбер (1717-1783)

В 1752 г. Даламбер рассматривал плоское движение идеальной жидкости. В статье «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» Даламбер определил скорость $f(x,y)=u(x,y)+v(x,y)\sqrt{-1}$, где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – проекции скорости частицы жидкости на оси координат. Они связаны уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

то есть $vdx+udy$ и $udv-vdy$

– полные дифференциалы.

Эйлер, 1755, принцип симметрии:

«Вся теория мнимых, которым анализ теперь обязан столькими успехами, опирается главным образом на следующее основание: если *Z* есть какая-либо функция от *z*, которая после подстановки $z = x + y\sqrt{-1}$ принимает такой вид: $M + N\sqrt{-1}$, то по подстановке $z = x - y\sqrt{-1}$ та же функция $M - N\sqrt{-1}$, где буквы *M* и *N* означают всегда действительные количества»

§. 1.

Vniuerſa Theoria Imaginariorum, vnde tot egregia incrementa nunc quidem in Analyſin ſunt illata, hoc potiſſimum nititur fundamento: quod ſi Z fuerit functio quaecunque ipſius z, eaque poſito $z = x + y\sqrt{-1}$ abeat in hanc formam: $M + N\sqrt{-1}$, tum eadem functio Z, poſito $z = x - y\sqrt{-1}$, euadat $= M - N\sqrt{-1}$; vbi quidem litterae M & N ſemper denotant quantitates reales. Hinc ſi proponatur iſta formula differentialis: $Z\,\partial z$, cuius integrale ſit $\int Z\,\partial z = V$, in eaque ponatur $z = x + y\sqrt{-1}$, vnde prodeat $Z = M + N\sqrt{-1}$, ipſum integrale erit huius formae: $V = P + Q\sqrt{-1}$. Cum enim ſit

proprietates, quae inter quantitates M, N, P et Q intercedunt. Primo enim cum ſit $P = \int(M\,\partial x - N\,\partial y)$, quoniam haec formula ſemper integrationem admittit, erit per criterium huiusmodi formularum generale $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$. Eodem autem modo, quia habemus $Q = \int(N\,\partial x + M\,\partial y)$, ob integrabilitatem huius formulae erit $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$. Ecce ergo per talem ſubſtitutionem ſemper inueniuntur eiusmodi duae functionos M et N binarum variabilium x et y, his inſignibus proprietatibus praeditae, vt ſit tam $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ quam $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$.

241 год назад Эйлер ввёл символ *i* мнимой единицы в докладе, сделанном в Академии наук в 1777 г., опубл. 1794:

2. 3.

ſemper per logarithmos et arcus circulares integrari poſſe, id quod a caſibus ſimplicioribus inchoando in ſequentibus problematibus oſtendere conſtitui.

Problema I.

§. 2. *Propoſita formula differentiali* $\frac{\partial \Phi \cos. \Phi}{\sqrt[n]{\cos. n \Phi}}$, *eius integrale per logarithmos et arcus circulares inueſtigare.*

Solutio.

Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet iſtud praeſtandi, niſi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in poſterum deſignabo, ita vt ſit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$. Iam ante omnia in numeratore noſtrae formulae loco $\cos. \Phi$ has duas partes ſubſtituamus

$$\tfrac{1}{2}(\cos. \Phi + i \sin. \Phi) + \tfrac{1}{2}(\cos. \Phi - i \sin. \Phi),$$

atque ipſam formulam propoſitam per duas huiusmodi partes repraeſentemus, quae ſint

$$\partial p = \frac{\partial \Phi (\cos. \Phi + i \sin. \Phi)}{\sqrt[n]{\cos. n \Phi}} \text{ et } \partial q = \frac{\partial \Phi (\cos. \Phi - i \sin. \Phi)}{\sqrt[n]{\cos. n \Phi}},$$

ita vt ipſa formula noſtra propoſita ſit $\tfrac{1}{2}\partial p + \tfrac{1}{2}\partial q$, ideoque eius integrale $\frac{p+q}{2}$.

Рассмотрим и исследуем подынтегральное выражение $\frac{\partial\Phi\cos\Phi}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, интеграл от логарифма дуг окружностей. Решение. Для этого мне представляется доступным ещё один способ, который, однако, требует мнимой единицы $\sqrt{-1}$, которую в дальнейшем мы будем обозначать буквой *i*, так что $ii=-1$, или, что то же, $\frac{1}{i}=-i$. Прежде всего, заметим, что значение нашей формулы – это $\cos.\Phi$ – можно заменить двумя частями $\partial p=\frac{\partial\Phi(\cos.\Phi+i\sin.\Phi)}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$

и $\partial q=\frac{\partial\Phi(\cos.\Phi-i\sin.\Phi)}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, и тогда наша формула может быть представлена как $\frac{1}{2}\partial p+\frac{1}{2}\partial q$, и тогда интеграл выразится как $\frac{p+q}{2}$.

(Эйлер Л. О формах дифференциалов углов, особенно с иррациональностями, которые интегрируются с помощью логарифмов и круговых дуг. Магистр естественных наук Академии представил 5 мая 1777 года. С. 183-194 // Эйлер Л. Интегральное исчисление. Том 4. Санкт-Петербург: Типография Императорской академии наук. 1794. – С. 184).

1768, Эйлер
о необходимости мнимых чисел

151.

Наконецъ еще сомнѣніе разрѣшить надлежитъ, которое состоитъ въ томъ, когда такія числа суть невозможны, то кажется что они совсѣмъ не нужны, и ученіе

ученіе сіе за самую малость почесть можно. Не смотря на сіе оно въ самомъ дѣлѣ весьма нужно, ибо очень часто случаются такія вопросы, о которыхъ скоро узнать не льзя возможные ли они или не возможные? а когда рѣшеніе ихъ приведетъ насъ на такія числа невозможныя, то сіе значить будетъ, что и самой вопросъ не возможенъ. Для изъясненія сего примѣромъ разсмотримъ слѣдующей вопросъ: данное число 12 раздѣлить на двѣ такія части, которыхъ бы произведеніе было 40? Сей вопросъ когда по предписаннымъ въ слѣдующихъ правиламъ рѣшить будемъ, то найдемъ для двухъ искомыхъ частей $6+\sqrt{-4}$, и $6-\sqrt{-4}$, которыя слѣдовательно суть не возможныя: и такъ изъ сего видно, что вопроса сего рѣшить не можно.

Введя долготу t, широту u и декартовы координаты на плоскости x и y, Эйлер получил общие условия конформности в виде $dx = pdu + rdt\cos u$, $dy = rdu - pdt\cos u$, откуда $dx + idy = (p + ir)(du - idt\cos u)$, или, полагая $s = \mathrm{tg}\left(45° + \frac{u}{2}\right)$ и $z = \ln s - it$, получим $dx + idy = (p + ir)\cos u dz$. В результате получается отображение $z = \ln s - it = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) - u$. В картографии это называется проекцией Меркатора. При этой проекции сетка параллелей и меридианов изображается двумя семействами взаимно перпендикулярных прямых.

1799 г., Каспар Вессель (1745-1818)

«Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» был подан в Датскую Академию в 1797 г., опубликован на датском языке в 1799, но стал известен европейским математикам лишь в 1897 г. в переводе на французский.

§5

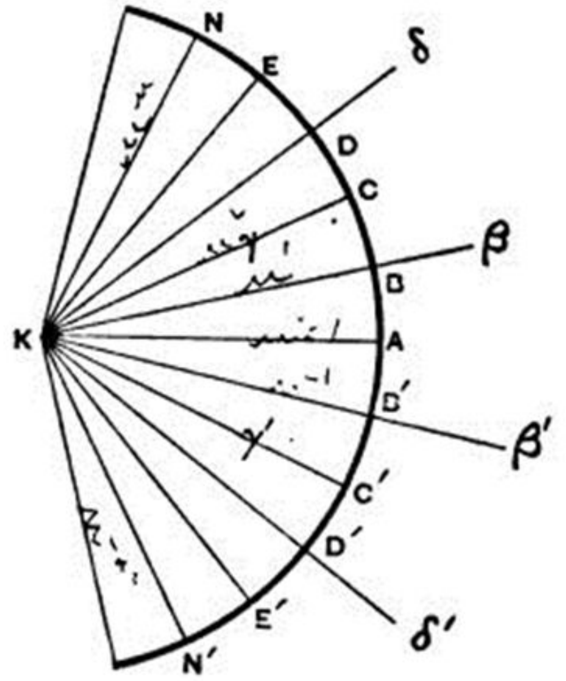
Let $+1$ designate the positive rectilinear unit and $+\epsilon$ a certain other unit perpendicular to the positive unit and having the same origin; then the direction angle of $+1$ will be equal to 0°, that of -1 to 180°, that of $+\epsilon$ to 90°, and that of $-\epsilon$ to $-90°$ or 270°. By the rule that the direction angle of the product shall equal the sum of the angles of the factors, we have: $(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(-1)(-1) = +1$; $(+1)(+\epsilon) = +\epsilon$; $(+1)(-\epsilon) = -\epsilon$; $(-1)(+\epsilon) = -\epsilon$; $(-1)(-\epsilon) = +\epsilon$; $(+\epsilon)(+\epsilon) = -1$; $(+\epsilon)(-\epsilon) = +1$; $(-\epsilon)(-\epsilon) = -1$.

From this it is seen that ϵ is equal to $\sqrt{-1}$; and the divergence of the product is determined such that not any of the common rules of operation are contravened.

Вессель показал, что арифметика комплексных чисел так же истинна, как и арифметика положительных (абсолютных) чисел. Суммой двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ Вессель называет диагональ параллелограмма, построенного на сторонах направленных отрезков, соответствующих слагаемым, т.е. параллельное смещение плоскости вдоль $a+bi$. Умножение двух комплексных чисел $(a+bi)(c+di)=(a+bi)\rho e^{i\varphi}$, где $\rho e^{i\varphi}=c+di$ отражает вращение плоскости около точки *O* на угол φ с удлинением всех размеров в отношении $1:\rho$.

1806, 1813/14. Ж. Р. Арган (1768-1822). Геометрическое истолкование комплексной плоскости

Fig. 8.



§ 1. If AB, BC, ... , EN (Fig. 8) are equal arcs, n in number, and we make $\overline{KB}=u$, we shall have $\overline{KC}=u^2$, $\overline{KD}=u^3$, ... , $\overline{KN}=u^n$.

1821 А. Коши (1789-1857).
Analyse algébrique

vais énoncer.

2.^e THÉORÈME. *Pour multiplier l'une par l'autre deux expressions réduites*

$$\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta, \quad \cos.\theta' + \sqrt{-1}\sin.\theta',$$

il suffit d'ajouter les arcs θ *et* θ' *qui leur correspondent.*

DÉMONSTRATION. On a, en effet,

$$(5)\begin{cases} (\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)(\cos.\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta') \\ = \cos.(\theta + \theta') + \sqrt{-1}\sin.(\theta + \theta'). \end{cases}$$

COROLLAIRE. Si dans la formule précédente on fait $\theta' = -\theta$, on trouvera, comme on devait s'y attendre,

$$(6) \qquad (\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta) = 1.$$

3.^e THÉORÈME. *Pour multiplier les unes par les autres plusieurs expressions réduites*

Analyse algébrique

trouvera

$$x = (\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)(\cos.\theta' - \sqrt{-1}\sin.\theta')$$
$$= (\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)[\cos.(-\theta') + \sqrt{-1}\sin.(-\theta')]$$
$$= \cos.(\theta - \theta') + \sqrt{-1}\sin.(\theta - \theta').$$

On aura donc en définitive

$$(8) \qquad \frac{\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta}{\cos.\theta' + \sqrt{-1}\sin.\theta'} = \cos.(\theta - \theta') + \sqrt{-1}\sin.(\theta - \theta').$$

Corollaire. Si dans l'équation (8) on fait $\theta = 0$, elle donnera

$$(9) \qquad \frac{1}{\cos.\theta' + \sqrt{-1}\sin.\theta'} = \cos.\theta' - \sqrt{-1}\sin.\theta'.$$

5.e Théorème. *Pour élever l'expression imaginaire*

$$\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta$$

à la puissance du degré m (m désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier dans cette expression l'arc θ par le nombre m.

Démonstration. En effet, les arcs θ, θ', θ''... pouvant être quelconques dans la formule (7), si on les suppose tous égaux à l'arc θ et en nombre m,

Corollaire. Si dans l'équation (10) on fait successivement $\theta = z$, $\theta = -z$, on obtiendra les deux suivantes :

$$(11) \begin{cases} (\cos.z + \sqrt{-1}\sin.z)^m = \cos.mz + \sqrt{-1}\sin.mz, \\ (\cos.z - \sqrt{-1}\sin.z)^m = \cos.mz - \sqrt{-1}\sin.mz. \end{cases}$$

Le premier membre de chacune de ces dernières, étant toujours un produit de m facteurs égaux, pourra être développé par la multiplication immédiate de ces facteurs, ou, ce qui revient au même, par la formule de Newton. Si, après avoir effectué le développement dont il s'agit, on égale de part et d'autre dans chaque équation, 1.° les parties réelles, 2.° les coefficiens de $\sqrt{-1}$, on en conclura

$$(12) \begin{cases} \cos.mz = \cos.^m z - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos.^{m-2}z\sin.^2 z \\ \quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos.^{m-4}z\sin.^4 z - \&c..., \\ \sin.mz = \frac{m}{1}\cos.^{m-1}z\sin.z \end{cases}$$

1826-1829. Коши. Теория вычетов

Название вычет (résidu - остаток) объясняется, по-видимому, тем, что Коши пришёл к этому понятию, отыскивая разность между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общее начало и конец, между которыми заключаются полюсы функции. Самый термин «вычет» встречается впервые в статье «Exercices de Mathématiques", Vol.1, 1826, Sur un nouveau genre de calcul. Analogue de de calcul infinitesimal. P. 11-24. Вот каким образом Коши вводит здесь это понятие: «Если, после того, как найдены значения *x*, обращающие $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1+\varepsilon)$ по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением $\frac{1}{\varepsilon}$ на конечный коэффициент, который мы назовём вычетом функции $f(x)$, относящемуся к частному значению x_1 переменной *x*».

1831 г. Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Гаусс пользовался плоскостью комплексного переменного в своей диссертации (1799) и в совершенно явной форме – в «Теории биквадратичных вычетов» (1831).

$$2 = (1+i)(1-i)$$

$$5 = (1+2i)(1-2i)$$

$$13 = (3+2i)(3-2i)$$

$$17 = (1+4i)(1-4i)$$

Гаусс: Если бы, исходя из представлений, даваемых многообразием двух измерений (которые с большой ясностью проявляются при пространственных соображениях), называть положительные величины прямыми, отрицательные – обратными, а мнимые – к ним перпендикулярными величинами, то мы имели бы простоту вместо путаницы, ясность вместо туманности.

1844 и 1862 гг., Г. Грассман (1809-1877)

«Учение о протяжениях»

Под произведением двух отрезков a, b мы понимает площадь образованного ими параллелограмма, имея в виду как величину, так и его положение, то есть мы полагаем $ab = cd$ только в том случае, если параллелограмм, образованный отрезками *a* и *b*, не только равен по величине параллелограмму, образованному из отрезков *c* и *d*, но и лежит в параллельной с последними плоскости и имеет одно и то же направление. Если мы изменим местами факторы произведения *ab*, то смысл параллелограмма изменяется на обратный.

Пикок Джордж, (1791-1858). Закон непрерывности эквивалентных форм

“§132. Law of the permanents of equivalent forms stated: Whatever form is algebraically equivalent to another, when expressed in general symbols, must be true, whatever those symbols denote”. [Peacock G. A treatise on algebra. London. 1830. 726 p., P. 104].

Законы операций алгебры должны оставаться неизменными, что бы ни означали символы, над которыми совершается операция.

1843 г. У. Р. Гамильтон (1805-1865). Создание теории кватернионов

And how the One of Time,
of Space the Three

Might in the Chain of
Symbol girdled be?

Как можно охватить символами одно измерение времени и три измерения пространства?

Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (англ. William Rowan Hamilton; 1805–1865) – королевский астроном Ирландии, математик, механик-теоретик, физик-теоретик. С 1835 Гамильтон рассматривал алгебру ни как искусство, ни как язык, ни как науку о количестве, но скорее как науку о порядке в определённых рядах. Примером такого процесса является для него идеальное время, освобождённое от всех связей причинности и воздействий, так как оно по Канту является чистой интуитивной формой нашего внутреннего восприятия и лучше поэтому приспособлено, чем пространство, то есть форма нашего внешнего восприятия; во всяком случае, понятия «прошедшее», «настоящее» и «будущее» возникают в нашем сознании скорее, чем понятия «вперёд» и «назад» в пространстве; поэтому алгебра у него – это наука чистого времени. «Если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на родственную интуицию времени».

В 1835 году Гамильтон опубликовал работу «Теория алгебраических пар», в которой дал новое построение теории комплексных чисел. Это была следующая форма $(z=(a,b))$ комплексных чисел после алгебраической $(z=a+bi)$, тригонометрической $(z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi))$ и показательной $(z=re^{i\varphi})$. Гамильтон стал рассматривать комплексное число $x+iy$ как алгебраическую пару (x,y) действительных чисел, то есть устранил геометрический элемент и свел комплексные числа к чистой алгебре, что позволило перейти к новому уровню геометрического обобщения – поворот и растяжение на плоскости. Это дало возможность формализовать методы матфизики в задачах потока жидкости или тепла, гравитации, звуке, оптике. Но эти задачи решались в двумерном пространстве.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

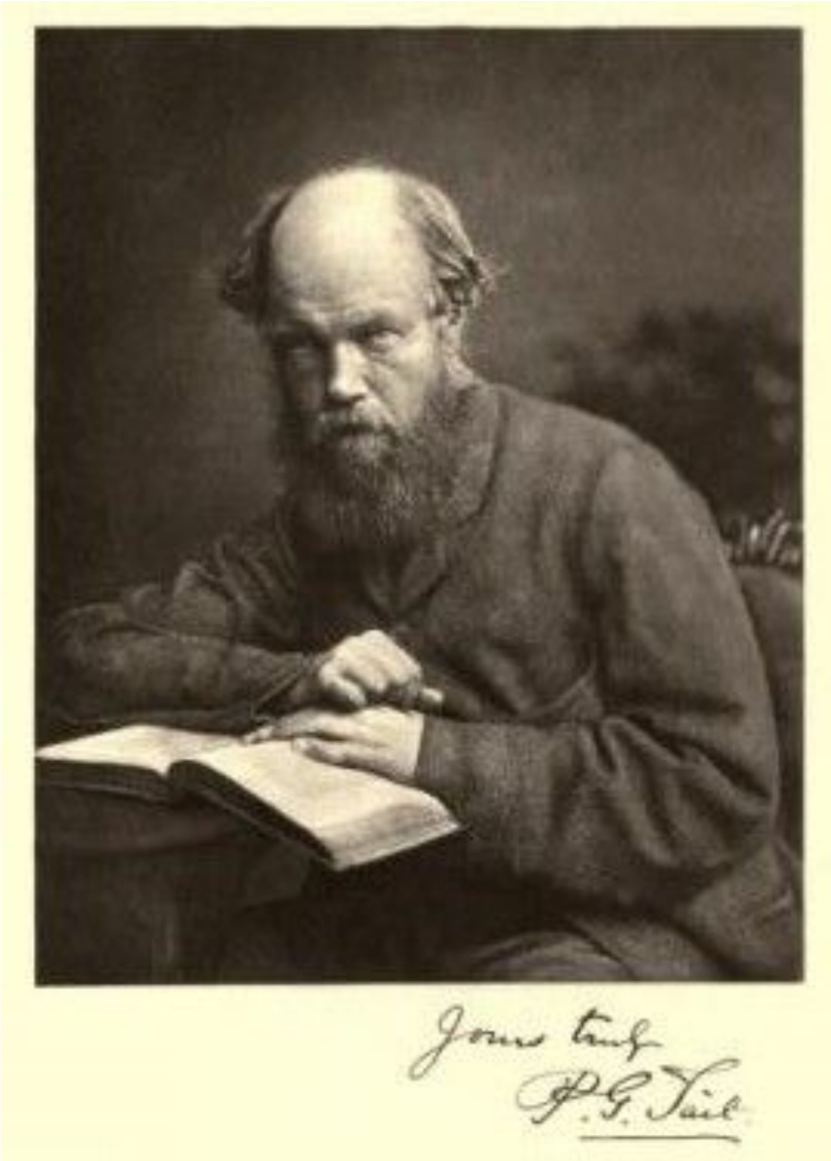

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan
in a flash of genius
quaternion multiplication

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Питер Гатри Тэт, 1831-1901

- Тэт написал около 70 статей о кватернионах и две книги. По просьбе Гамильтона Тэт задерживал выход в свет своей книги “An elementary treatise on quaternions” (1867), чтобы прежде появились «Элементы кватернионов» Гамильтона. В книге Тэта более упорядоченное построение, более строгий язык, чем у Гамильтона; нет многих «лишних» понятий, «не прижившихся» в математике, нет слов «компланарность», «коллинеарность» (у Тета были параллельные векторы).

- Векторы он обозначает и одной буквой (латинской или греческой), и через AB; употребляет запись $AB = -BA$, которой не было у Гамильтона. Обозначение направленного отрезка через AB впервые использовал в 1828 г. Мёбиус. Книга Тэта – звено между работами Гамильтона и Максвелла.



Оператор «набла»

В математической статье термин «набла» впервые встречается у Тэта (1890).

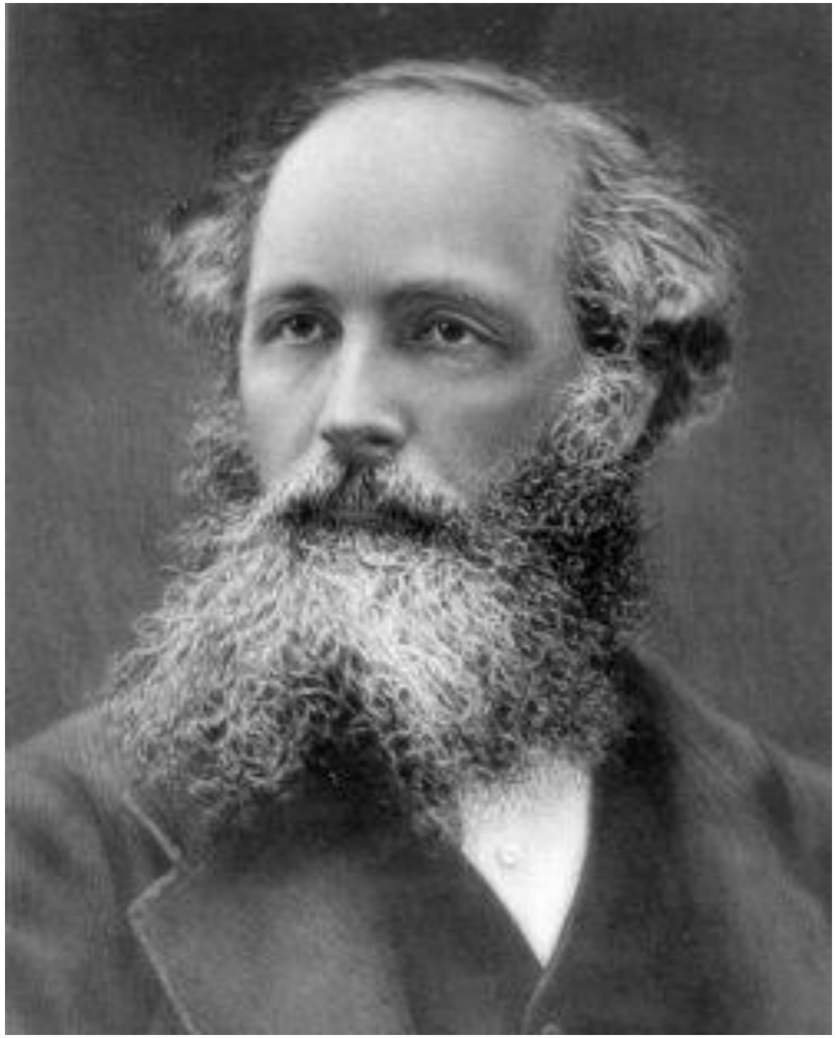
$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$-\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

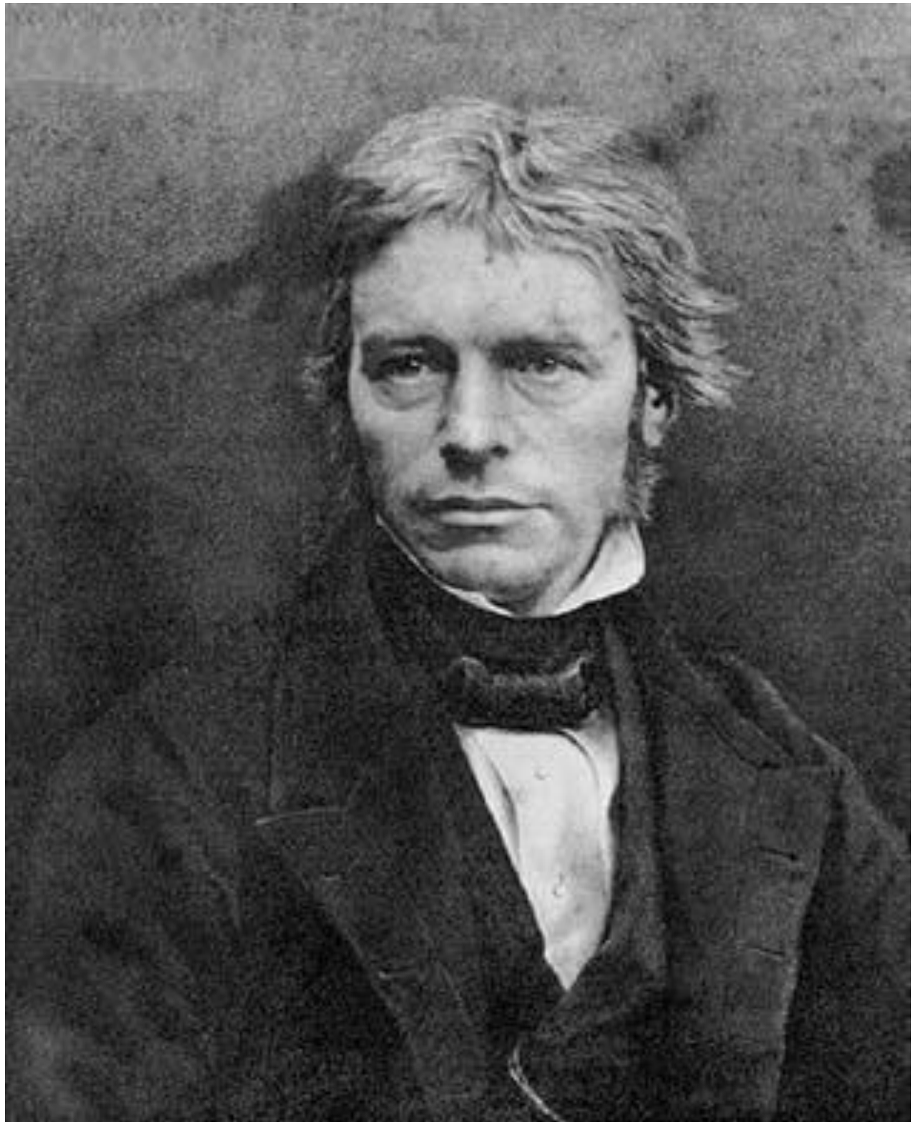
Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879)

Максвелл:

«Изобретение исчисления кватернионов есть шаг вперёд в познании величин, связанных с пространством, который по своей важности можно сравнить только с изобретением пространственных координат Декартом».



Майкл Фарадей (1791-1867)



Из теории кватернионов Максвелл тщательно отобрал самое необходимое, оно перенесено без изменений и только изложено в координатной форме. Так как при перемножении $\nabla\sigma$ получается выражение $-\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)+i\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right)+j\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right)+k\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)$, то естественным образом возникают $\mathrm{rot}\sigma$ и не $\mathrm{div}\ \sigma$, а обратная по знаку величина. Поэтому Максвелл и вводит в качестве характеристики векторного поля конвергенцию в точке (convergence – сходимость). Со временем, с заменой квадрата мнимой величины $i^2=-1$ скалярным произведением $(i,i)=1$ всё чаще стало употребляться понятие дивергенции (divergence – расходимость), пока наконец, это понятие и обозначение не вытеснили $\mathrm{conv}\ F$. Термин «дивергенция» и соответствующее обозначение предложил в 1878 г. английский математик Уильям Клиффорд (1845–1879).

Почти такова же история градиента. Максвелл назвал вектор

$$-\left(i\frac{d\Psi}{dx}+j\frac{d\Psi}{dy}+k\frac{d\Psi}{dz}\right)$$

скатом или склоном функции ψ, используя слово «склон» (slope), чтобы указать направление (и величину) наиболее быстрого убывания ψ, а для функции двух переменных – направление самого крутого склона поверхности. Термин gradient образован от латинского gradior – «идти вперёд». Термин вошёл с употребление в метеорологии, затем Максвелл заменил им свой the slope of ψ. [Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. Cambridge, 1891, с. 15], potential function in that direction. In electrical and magnetic investigations the potential is defined so that the resultant force in any direction is measured by the *decrease* of the potential in that direction. This method of using the expression makes it correspond in sign with potential energy, which always decreases when the bodies are moved in the direction of the forces acting on them.

17.] The geometrical nature of the relation between the potential and the vector thus derived from it receives great light from Hamilton's discovery of the form of the operator by which the vector is derived from the potential.

The resolved part of the vector in any direction is, as we have seen, the first derivative of the potential with respect to a co-ordinate drawn in that direction, the sign being reversed.

Now if i, j, k are three unit vectors at right angles to each other, and if X, Y, Z are the components of the vector $\mathfrak{F}$ resolved parallel to these vectors, then

$$\mathfrak{F} = iX + jY + kZ; \tag{1}$$

and by what we have said above, if Ψ is the potential,

$$\mathfrak{F} = -\left(i\frac{d\Psi}{dx} + j\frac{d\Psi}{dy} + k\frac{d\Psi}{dz}\right). \tag{2}$$

If we now write ∇ for the operator,

$$i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}, \tag{3}$$

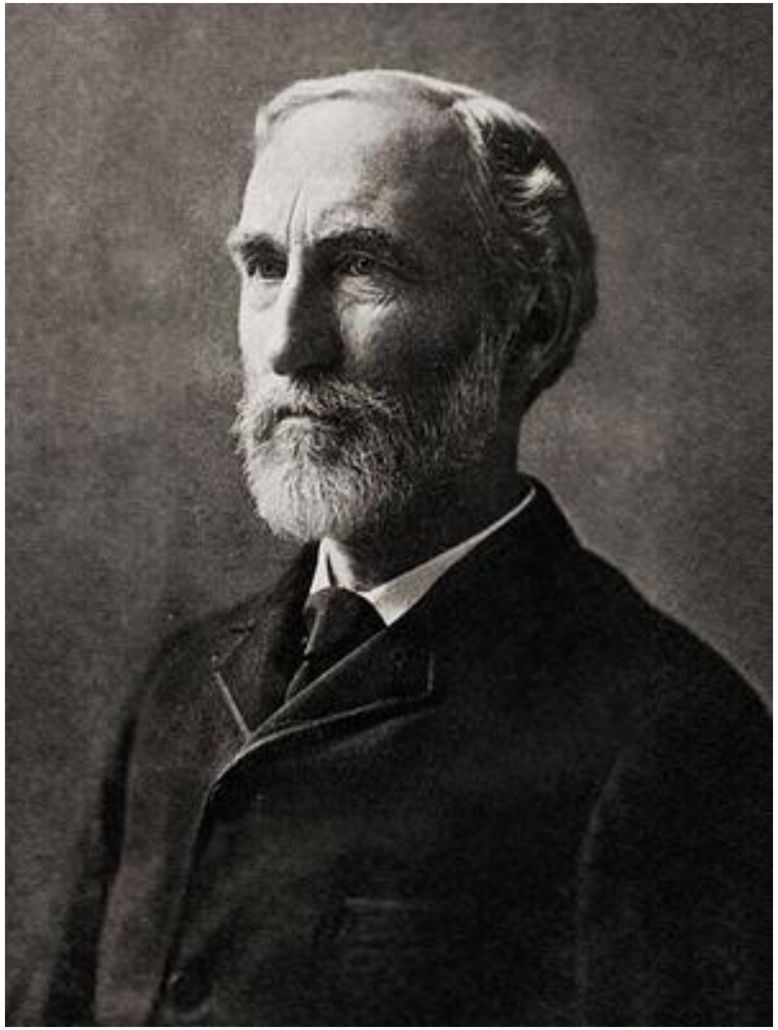
$$\mathfrak{F} = -\nabla\Psi. \tag{4}$$

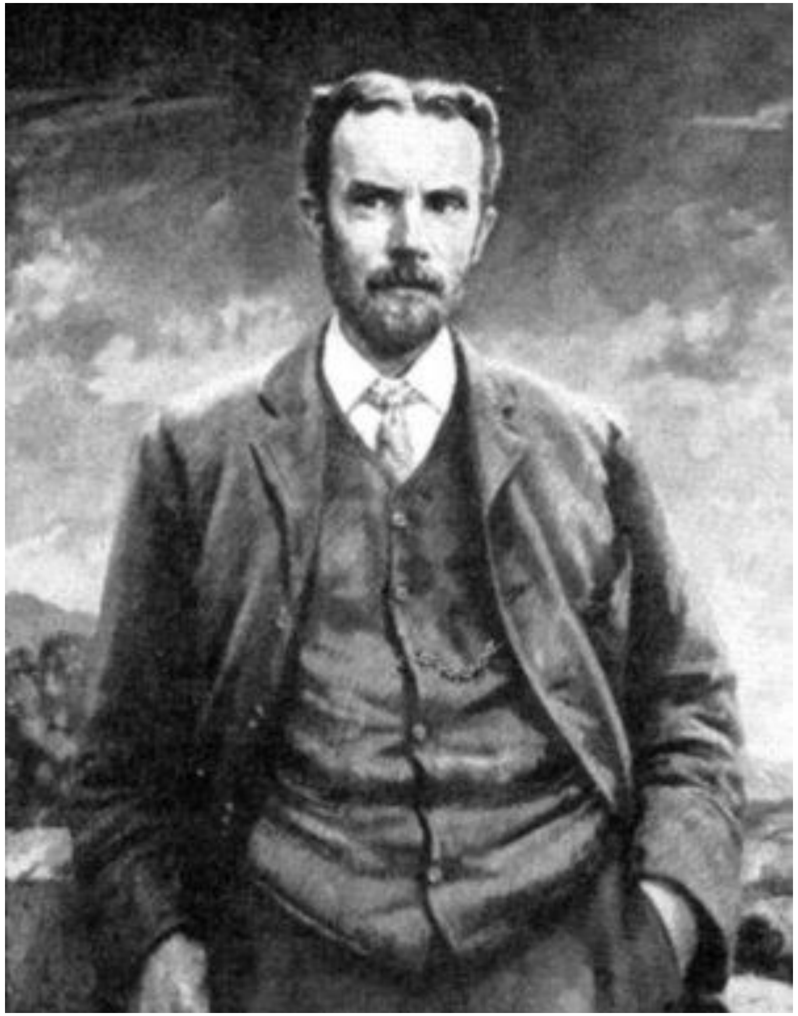
The symbol of operation ∇ may be interpreted as directing us to measure, in each of three rectangular directions, the rate of increase of Ψ, and then, considering the quantities thus found as vectors, to compound them into one. This is what we are directed to do by the expression (3). But we may also consider it as directing us first to find out in what direction Ψ increases fastest, and then to lay off in that direction a vector representing this rate of increase.

M. Lamé, in his *Traité des Fonctions Inverses*, uses the term Differential Parameter to express the magnitude of this greatest rate of increase, but neither the term itself, nor the mode in which Lamé uses it, indicates that the quantity referred to has direction as well as magnitude. On those rare occasions in which I shall have to refer to this relation as a purely geometrical one, I shall call the vector $\mathfrak{F}$ the Slope of the scalar function Ψ, using the word Slope

Следующий этап в создании векторного исчисления

Уиллард Гиббс (1839-1903) и Оливер Хевисайд (1850-1925)



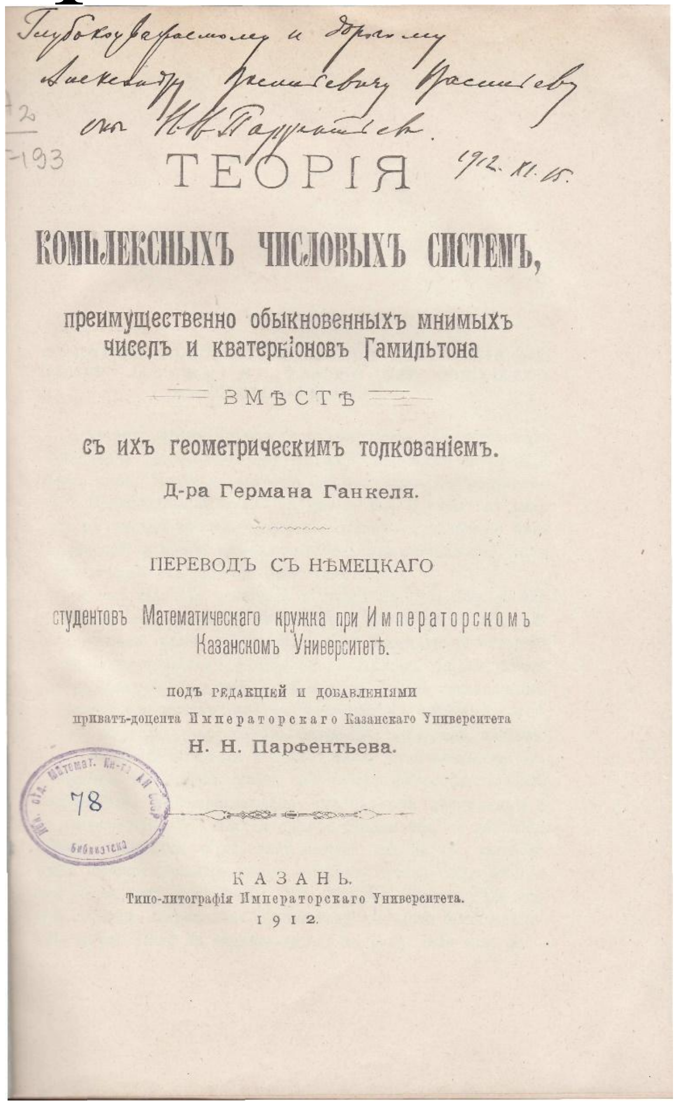


Векторы Гиббс продолжает обозначать греческими буквами, он сохранил гамильтоновы *i*, *j*, *k*, которые теперь они стали единичными векторами, и только с $i^2 = i \cdot i = 1$. Гиббс *определяет* разные виды произведения векторов. Скалярное произведение при этом называется direct-product или dot-product, соответственно оно обозначается $A \cdot B$ и равно $xx' + yy' + zz'$. Векторное произведение названо skew product или cross-product и выражено определителем

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Изложение векторного исчисления Гиббса стало классическим. (Gibbs J.W. Vector Analysis. New Haven, 1925).

1867. Герман Ганкель (1839-1873). Теория комплексных числовых систем



Глубокоуважаемому и дорогому
Александру Васильевичу Васильеву
от Н. В. Парфентьева.
1912. XI. 15.

ТЕОРІЯ

КОМПЛЕКСНЫХЪ ЧИСЛОВЫХЪ СИСТЕМЪ,

преимущественно обыкновенныхъ мнимыхъ
чиселъ и кватерніоновъ Гамильтона

ВМѢСТѢ

съ ихъ геометрическимъ толкованіемъ.

Д-ра Германа Ганкеля.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО

студентовъ Математическаго кружка при Императорскомъ
Казанскомъ Университетѣ.

подъ редакціей и добавленіями
приватъ-доцента Императорскаго Казанскаго Университета
Н. Н. Парфентьева.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1912.

Ганкель

Принцип перманентности формальных законов

Если две части логической формы, выраженные общими знаками универсальной арифметики, равны между собой, то они должны оставаться равными и тогда, когда знаки, их выражающие, перестают обозначать обыкновенные величины, и вследствие этого и сами операции получают уже некоторый другой, но определённый смысл.

1926 г., Макс Борн (1882-1970)

side of the question. In the first place it is clear that the dualism, wave-corpuscle, and the indeterminateness essentially involved therein, compel us to abandon any attempt to set up a *deterministic theory*. The *law of causality*, according to which the course of events in an isolated system is completely determined by the state of the system at time $t = 0$, loses its validity, at any rate in the sense of classical physics. In reply to the question whether a law of causation still holds good in the new theory, two standpoints are possible. Either we may look upon processes from the pictorial side, holding fast to the wave-corpuscle picture—in this case the law of causality certainly ceases to hold; or, as is done in the further development of the theory, we describe the instantaneous state of the system by a (complex) quantity ψ, which satisfies a differential equation, and therefore changes with the time in a way which is completely determined by its form at time $t = 0$, so that its behaviour is rigorously causal. Since, however, physical significance is confined to the quantity $|\psi|^2$ (the square of the amplitude), and to other similarly constructed quadratic expressions (matrix elements), which only partially define ψ, it follows that, even when the physically determinable quantities are completely known at time $t = 0$, the initial value of the ψ-function is necessarily not completely definable. This view of the matter is equivalent to the assertion that events happen indeed in a strictly causal way, but that we do not know the initial state exactly. In this sense the law of causality is therefore empty; physics is in the nature of the case indeterminate, and therefore the affair of statistics.

В заключение нам предстоит еще рассмотреть *смысл волновой функции* самой по себе; до сих пор она фигурировала в качестве, так сказать, побочного продукта при нахождении собственных значений. Но для колебательного процесса знание амплитуды по крайней мере так же важно, как и знание собственной частоты. Следует ожидать, что и в волновой механике должна приобрести большое физическое значение волновая функция ψ или, вернее, квадрат ее модуля, так как само по себе мгновенное значение осциллирующей функции, разумеется, не

может играть роли ввиду высокой частоты осцилляций. Квадрат модуля берется по той причине, что сама волновая функция (из-за мнимого коэффициента перед производной по времени в дифференциальном уравнении) комплексна, в то время как величины, допускающие физическую интерпретацию, конечно, должны быть вещественными.

Мы уже упоминали об интерпретации волновой функции, данной Борном (гл. IV, § 7). Пусть собственная функция ψ_E соответствует некоторому состоянию; тогда

$$|\psi_E|^2\, dv$$

есть вероятность, что электрон (рассматриваемый как частица) находится в элементе объема dv.

Подробнее об этом можно прочитать

1. Gerolamo Cardano. Artis magnae, sive de regulis algebraicis. Nuremberg, 1545. http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf
2. Niccolò Tartaglia. Quesiti et inventioni diverse, dialogo con interlocutori principali Francesco Maria della Rovere e Gabriele Tadino e argomenti diversi: aritmetica, geometria, algebra, statica, topografia, artiglieria, fortificazioni, tattica. 1546.
3. Bortolotti, E. La storia della matematica nella Università di Bologna by Ettore Bortolotti. Bologna, N. Zanichelli, 1947.
4. Гутер Р., Полунов Ю. Джироламо Кардано. М.: Знание, 1980. – 192 с.
5. С.Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках (издание третье, расширенное). М.: МЦНМО, НМУ, 2001. – 448 с.

6. Bombelli R. L'Algebra opera. Divisa in tre libri. Bologna: Nella stamperia do Guovanni Rossi. 1572
7. Декарт Р. Геометрия / Перевод, примечания и статья А.П. Юшкевича. Москва-Ленинград: ГОНТИ. 1938 г. 296 с. – с. 85
8. Wallis J. A treatise of algebra, both historical and practical. London : printed by John Playford, 1685. 374+17+176+17 p. Раздельная пагинация. С. 266-268
9. Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas //Acta eruditorum. 1702, May. P.210-219. – P.216. (Наглядное доказательство нового анализа для познания бесконечности по отношению к суммам и квадратурам)].
10. Moivre Ab. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicus quae vocantur Cardani resolution analvtica // Philos. Trans., 1706/1707, p. 2368-2371.
11. Moivre Ab. De Sectione Anguli//Philisophical Transactions, 1722, 374, vol. 32, p. 228-230.

12. Euler L. Cap.VIII. De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis // Introductio in analysin infinitorum. – 1748. Vol. 1. – P. 104. Русский перевод: Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. 1. М.-Л. 1936.
Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis // Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae10 (1792) 1797, pp. 3-19. , Раздельная пагинация, Математика, с. 3. Reprinted in Opera Omnia. Series I vol. 19, pp. 268-286. Available online at EulerArchive.org
13. Euler L. De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrale licet. M.S. Academiae exbibit. Die 5 Maii 1777. P. 183-194// Euler L. Institutiones calculi integralis. Vol. 4. Petropoli: Impensis Academiae Imperialis Scientarum. 1794. - P. 184. (Эйлер Л. О формах дифференциалов углов, особенно с иррациональностями, которые интегрируются с помощью логарифмов и круговых дуг. Магистр естественных наук Академии представил 5 мая 1777 года. С. 183-194 // Эйлер Л. Интегральное исчисление. Том 4. Санкт-Петербург: Типография Императорской академии наук. 1794. – С. 184).

15. Эйлер, Л. Универсальная арифметика г. Леонгарда Эйлера. Переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцовым и Иваном Юдиным. Том 1, содержащий в себе все образы алгебраического вычисления. - СПб. : Имп. АН, 1768.
16. Wessel C. On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons // Smith D.E. A source book in Mathematics. Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. 701p. – P. 55-66.
17. Argand R. (1806). Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2e édition, Gauthier Villars, Paris (1874) BNF c.1-60.
18. Argand J.R. Imaginary quantities; their geometrical interpretation. 1881. New York: D. Van Nostrand. 154 p.
19. Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique. Analyse Algébrique. Paris: Éditions Jacques Gabay. 1821. 602 p.
20. Гаусс К.Ф. Теория биквадратических вычетов, сочинение второе // Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. Перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. М.: Изд-во АН СССР. 1959 г., с. 694–754.

14. Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis // Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae10 (1792) 1797, pp. 3-19. , Раздельная пагинация, Математика, с. 3.
21. Grassman H. Der Ausdehnungslehre von 1844 oder Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig: Verlag von Otto Wigand. 1878. 347 s.
22. Hamilton W.R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time//Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 17, part 1 (1837), pp. 293–422.
23. Гамильтон У.Р. Избранные труды / Под ред. Л. С. Полака. Москва: Наука. 1994. 560 с.
24. Peacock G. A treatise on algebra. London. 1830. 726 p.
25. Gibbs J.W., Wilson E.B. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, by E. B. Wilson. 1901. New York: New York, C. Scribner's Sons. 470 p.

26. Ганкель Г. Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием Д-ра Германа Ганкеля. Перевод с немецкого студентов математического кружка при Императорском Казанском университете. Под редакцией и с добавлениями профессора Императорского Казанского университета Н.Н. Парфентьева. Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1912. 16+245 с.
27. Александрова Н.В. Формирование основных понятий векторного исчисления. Историко-математические исследования. М.: Наука.1982, 26, с. 205-235.
28. Арнольд. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. Москва: Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 2002. 40 с.
29. Born M. Atomic Physics / Transl. J. Dougall. London-Glasgow: Blackie & Son Ltd. 8-th edition. 1969. 495 P.
30. Борн М. Квантовая механика процессов столкновений // УФН. Т. 122. Вып. 4. 1977. С. 632-651.

30. Борн М. Квантовая механика процессов столкновений // УФН. Т. 122. Вып. 4. 1977. С. 632-651.
31. Шпеньков Г.П. Физический смысл мнимой единицы i. http://shpenkov.janmax.com/ImaginUnitRus.pdf
32. Синкевич Г.И. История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII-XIX вв. СПб: Издательство СПбГАСУ. 2016 г. 312 с.
33. Синкевич Г.И. История геометрических представлений комплексных чисел// История науки и техники, 2017 г. №4. С. 15-30.

Благодарю за внимание