
Исчисление высказываний

Лемма.

Справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая аксиома ИВ является тавтологией;
- 2) результат применения правила вывода MP к любым тавтологиям $\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi$ дает тавтологию Ψ ;
- 3) всякая теорема ИВ является тавтологией, т.е. выполняется $Th(ИВ) \subset T_{AB}$.

Теорема полноты ИВ.

Всякая тавтология является теоремой ИВ,
т.е. выполняется $T_{AB} \subset Th(ИВ)$ и, следовательно,
 $T_{AB} = Th(ИВ)$.

Следствия теоремы полноты ИВ.

Теорема о непротиворечивости ИВ.

В исчислении высказываний невозможно доказать никакую формулу Φ вместе с ее отрицанием $\neg\Phi$.

Теорема о разрешимости ИВ.

Существует универсальная эффективная процедура (алгоритм), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИВ.

Исчисление предикатов

Множество аксиом $Ax(ИП)$ исчисления предикатов описывается пятью *схемами аксиом* – тремя определенными в предыдущем разделе схемами $(A_1)–(A_3)$, в которых Φ, Ψ, Φ_i ($i = 1, 2, 3$) являются произвольными формулами исчисления предикатов, и двумя новыми схемами:

$$(A_4) (\forall x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$$

для произвольной формулы $\Phi(x)$, в которую y не входит связно;

$$(A_5) (\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow (\forall x)\Psi(x))$$

для таких формул Φ, Ψ , что x в формулу Φ не входит свободно.

Исчисление предикатов имеет два *правила вывода* – правило *modus ponens* (сокращенно, *MP*) и правило обобщения (сокращенно, *Gen*), которые для произвольных формул исчисления предикатов Φ, Ψ символически записываются следующими схемами:

$$MP: \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi} \quad \text{и} \quad Gen: \frac{\Phi}{(\forall x)\Phi}.$$

Определение. Формула Φ называется *теоремой исчисления предикатов*, если найдется такая последовательность Φ_1, \dots, Φ_n , в которой $\Phi_n = \Phi$ и каждая формула Φ_i ($1 \leq i \leq n$) либо является аксиомой, либо получается из некоторых предыдущих формул этой последовательности Φ_j ($1 \leq j < i$) по одному из правил вывода *MP* или *Gen*. При этом Φ_1, \dots, Φ_n называется *выводом* или *доказательством* формулы Φ .

Вывод формулы Φ обозначают $\vdash \Phi$ и говорят, что « Φ есть теорема». Множество всех таких теорем обозначается символом $Th(\text{ИП})$ и называется *теорией исчисления предикатов*.

Цель построения исчисления предикатов - определение такой теории $Th(\text{ИП})$, которая совпадает с множеством тавтологий $T_{\text{АП}}$.

Лемма 1.

Справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая аксиома ИП является тавтологией;
- 2) результат применения правил вывода MP и Gen к тавтологиям является тавтологией;
- 3) любая теорема ИП является тавтологией ИП, т.е. имеет место включение $Th(\text{ИП}) \subset T_{\text{АП}}$.

Доказательство $T_{АП} \subset Th(ИП)$ было получено австрийским математиком К.Гедделем в 1930 году.

Теорема полноты ИП.

Формула исчисления предикатов в том и только том случае является тавтологией, если она есть теорема ИП, т.е. выполняется равенство $T_{АП} = Th(ИП)$.

Таким образом, ИП является адекватным инструментом получения логических законов.

Теорема о непротиворечивости ИП.

В исчислении предикатов невозможно доказать никакую формулу Φ вместе с ее отрицанием $\neg\Phi$.

С другой стороны, английский математик А.Черч в 1936 году доказал следующий принципиально важный результат.

Теорема о неразрешимости ИП.

Не существует универсальной эффективной процедуры (алгоритма), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИП.

Элементы теории алгоритмов

Важные математические проблемы имеют вид:

для некоторого данного множества X найти эффективную процедуру (т.е. алгоритм), с помощью которой можно для каждого элемента x этого множества X определить за конечное число шагов, будет этот элемент обладать некоторым данным свойством P или нет (т.е. $x \in P^+$ или $x \notin P^+$).

Решением такой проблемы является построение и обоснование искомого алгоритма.

Массовые задачи – задачи распознавания и оптимизации.

Примеры массовых задач:

- **ВЫП (SAT)** – задача выполнимости формулы логики высказываний.
- **ТЕОРЕМА (THM)** – задача доказуемости формулы логики предикатов.

Под *алгоритмом* понимается совокупность инструкций о том, как решить некоторую массовую задачу.

Общие свойства алгоритма:

- 1) *дискретность алгоритма;*
- 2) *детерминированность алгоритма;*
- 3) *элементарность шагов алгоритма;*
- 4) *массовость алгоритма.*

Так как конструктивные объекты можно кодировать словами конечного алфавита Σ (например, состоящего из двоичных символов 0 и 1), то алгоритм моделируется устройством, перерабатывающим слова алфавита Σ .

Тезис Черча:

класс задач, решаемых в любой формальной модели алгоритма, совпадает с классом задач, которые могут быть решены интуитивно эффективными вычислениями, т.е. алгоритмическими методами.

Алгоритмически неразрешимые задачи и необходимость строго математического определения алгоритма.

Модели алгоритма:

- 1) понятие *рекурсивной функции*, введенное Клини в 1936 г.,
 - 2) понятие *машины Тьюринга*, введенное Постом и Тьюрингом в 1936 г.,
 - 3) понятие *нормального алгорифма*, введенное Марковым в 1954 г.,
 - 4) понятия *формальной грамматики*, введенное Хомским в 1957 г.
-