

**Лекція №3**  
**Розтягання і стискання прямого**  
**стержня**

### §3.1. Гіпотеза плоских перерізів при розтяганні (стисканні). Лінійний напружено-деформований стан стержня.

Розтягання або стискання стержня спричиняються силами, що діють уздовж його осі. При такому виді опору в поперечних перерізах бруса виникають лише поздовжні сили, а всі інші п'ять внутрішніх зусиль дорівнюють нулю. Поздовжня сила спрямована вздовж осі стержня і прикладена, як і рівнодійна зовнішніх навантажень, у центрі ваги перерізу. Для визначення внутрішніх сил, як відомо, використовується метод перерізів.

$$\sum z = 0; N = -P_1 - P_2 \cdot \cos\alpha. \quad (3.1)$$

**Правило знаків:** при розтяганні поздовжня сила спрямована від перерізу і вважається додатною. При стисканні вона спрямована до перерізу і вважається від'ємною.

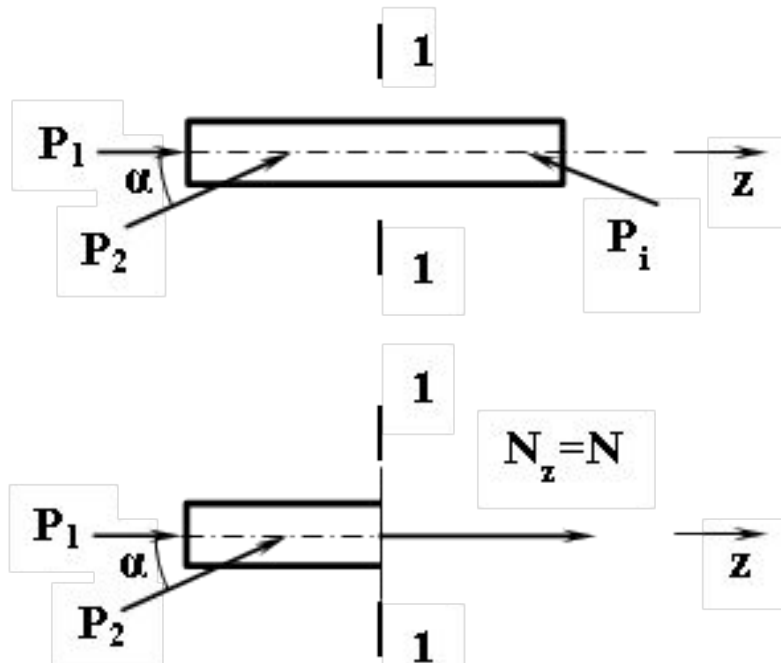
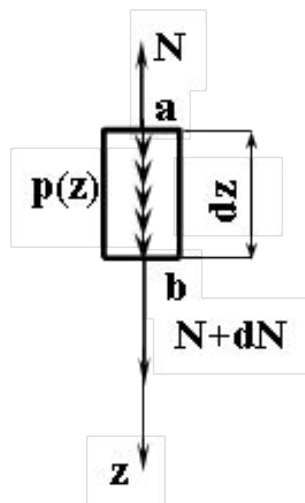
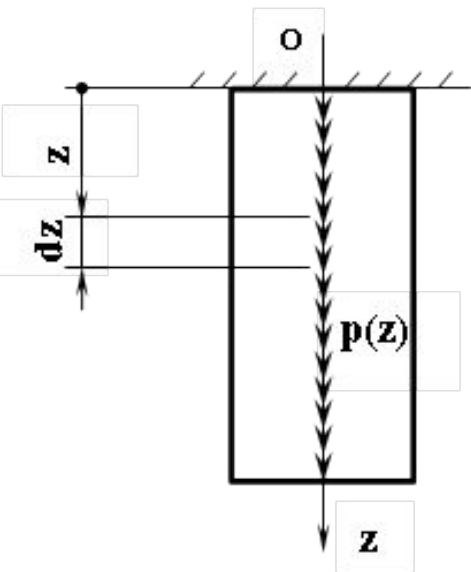


Рисунок 3.1 – Визначення поздовжньої сили.

**Зауваження 1.** Якщо на стержень діє розподілене вздовж його осі навантаження  $p(z)$  (рис. 3.2), то з урахуванням наведених позначень диференціальна залежність зусилля та інтенсивності  $p(z)$  має вигляд рівняння:

$$\sum_{z=0} : \frac{dN}{dz} = p(z). \quad (3.2)$$



Для визначення нормальних напружень  $\sigma_z$  (відсутність поперечних зусиль дає підставу вважати, що дотичні напруження в кожній точці поперечного перерізу дорівнюють нулю) запишемо вже відомі статичні рівняння, які визначають **статичний аспект задачі**.

### Статичний аспект задачі

$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad (3.3)$$

**Гіпотеза плоских перерізів:** поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступово вздовж осі стержня.

Це дає змогу вважати, що нормальні напруження рівномірно розподілені по перерізу, тобто

$$\sigma = \text{const} .$$

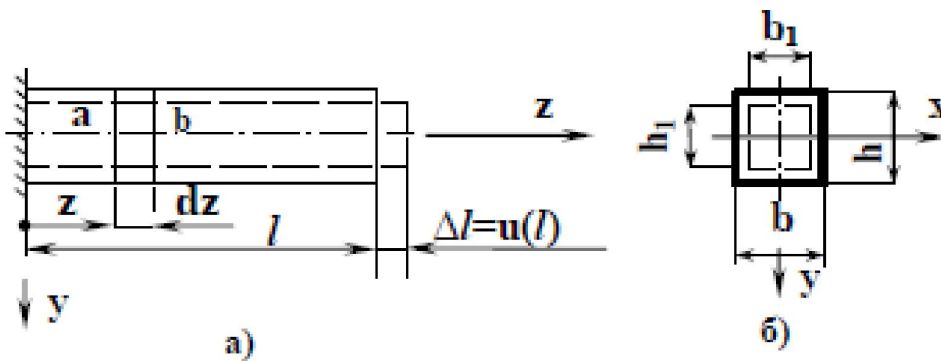
З урахування (3.3) формула (3.2) буде мати вигляд:

$$\sigma = N/A. \quad (3.4)$$

**Рисунок 3.2 – Розрахункова схема стержня під дією розподіленого вздовж його осі навантаження  $p(z)$**

## § 3.2. Деформації стержня при розтяганні (стисканні).

Розглянемо **геометричний аспект задачі**. Поділимо стержень на поздовжні (паралельні осі стержня) елементи нескінченно малих поперечних перерізів, які в подальшому будуть мати назву “волокна”. На підставі гіпотези плоских перерізів можна зробити висновок, що волокна подовжуються на одну й ту саму величину і їхні відносні подовження (укорочення) однакові



$$\epsilon_z = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.5)$$

Відносні поперечні деформації:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta a}{a}, \quad \epsilon_y = \frac{\Delta b}{b}, \quad (3.6)$$

де, відповідно наведеного рис. 3.3,

$$\Delta b = b_1 - b, \quad \Delta a = a_1 - a -$$

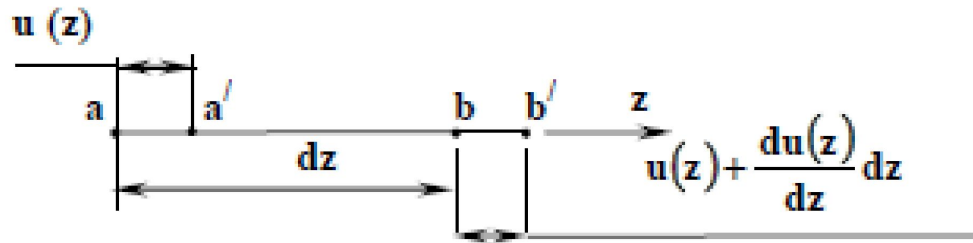
абсолютні поперечні деформації.

Відносна поперечна деформація для ізотропних в усіх поперечних напрямках однакова:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon' \quad (3.7)$$

**Зауваження 2.** Якщо точка **a** (рис 3.3 а) переміститься вздовж стержня на відстань **u(z)** (рис 3.4), тоді точка **b** переміститься відповідно на відстань

$$u(z) + \frac{\partial u(z)}{\partial z} dz.$$



Тоді відносне подовження відрізка завдовжки  $dz$

$$\varepsilon_z = \frac{u + du - u}{dz} = \frac{du(z)}{dz}. \quad (3.8)$$

### § 3.3. Закон Гука. Модуль пружності першого роду. Коефіцієнт Пуассона.

**Фізичний аспект задачі** полягає у встановленні залежності деформацій від напружень. При пружних деформаціях ця залежність лінійна і, як відомо, називається **законом Гука**:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.9)$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, що називається модулем поздовжньої пружності, або модулем пружності 1-го роду, або модулем Юнга. Розмірність  $E$  – Па, МПа.

Наприклад: сталь –  $E = 2 \div 2,2 \cdot 10^5$  МПа; чавун –  $E = 0,75 \div 1,6 \cdot 10^5$  МПа.

В будь-якому перерізі бруса при розтяганні або стисканні виконуються умови:

$$\sigma = E\varepsilon = \text{const}. \quad (3.10)$$

Підставляючи (3.10) у формулу (3.3), маємо

$$\mathbf{N} = \int_A \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dA = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \int_A dA = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} A = \boldsymbol{\sigma} A,$$

звідси

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{N}}{A}. \quad (3.11)$$

**Зауваження 3.** Знак напруження залежить від знаку поздовжньої сили.

Важливою характеристикою пружних властивостей матеріалу є також **коефіцієнт Пуассона  $\mu$** . Величина цього коефіцієнта визначається абсолютним значенням відношення поперечної деформації до поздовжньої при простих деформаціях розтягання та стискання в межах застосування закону Гука:

$$\mu = \left| \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_x}{\boldsymbol{\varepsilon}_z} \right| = \left| \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_y}{\boldsymbol{\varepsilon}_z} \right| = \left| \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right|. \quad (3.12)$$

Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина.

Враховуючи, що поздовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_y = \boldsymbol{\varepsilon}' = -\mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.13)$$

або

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_y = \boldsymbol{\varepsilon}' = -\mu \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E}. \quad (3.14)$$

Для всіх ізотропних матеріалів в значення коефіцієнта Пуассона перебуває в межах **0, ..., 0,5**. Зокрема для сталі  **$\mu \approx 0,3$** .

**Зауваження 4.** У випадку нормального навантаження в трьох взаємно-перпендикулярних площинах співвідношення для розрахунку відносних лінійних деформацій з урахуванням виразів (3.9), (3.14) та принципу суперпозиції дії сил набирають вигляду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Формули (3.15) отримали назву **узагальненого закону Гука**.

### **§3.4. Розподіл поздовжніх сил і нормальних напружень. Побудова епюр.**

Для практичного обчислення поздовжніх зусиль та напружень застосовується метод перерізів. Графіки (діаграми), що показують, як змінюється внутрішнє зусилля, або напруження, або переміщення від перерізу до перерізу, називають **епюрами**.

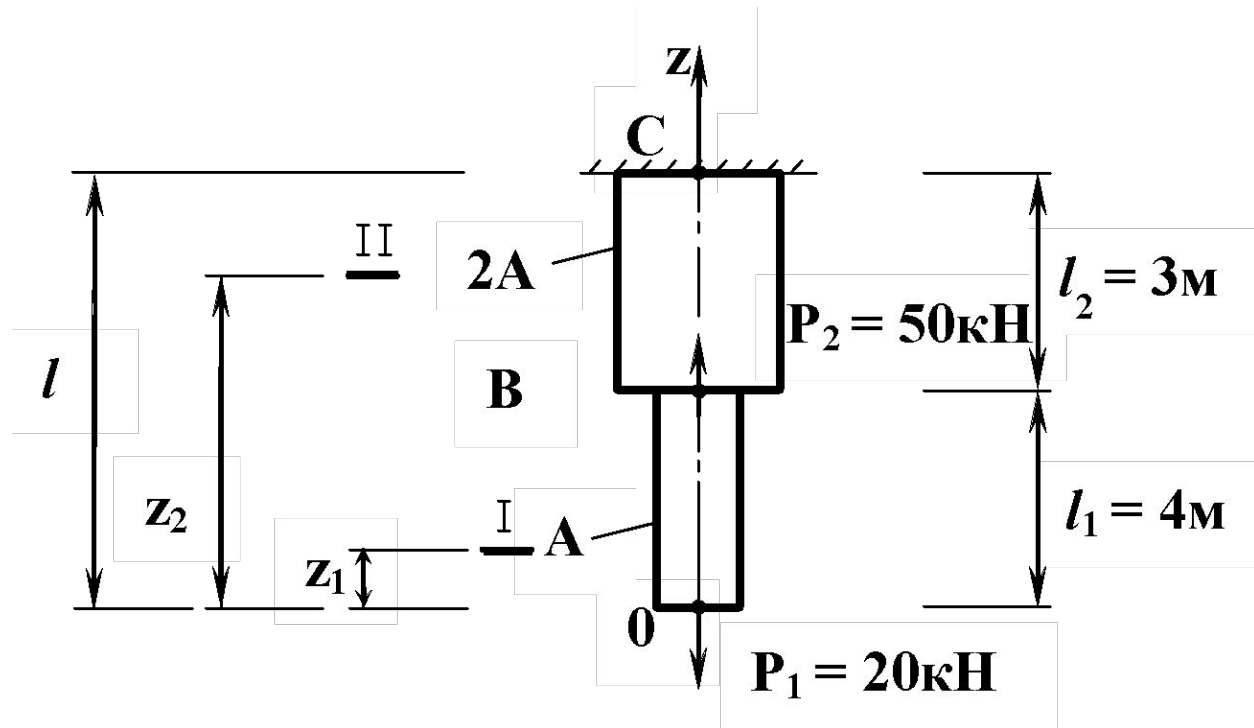
Як приклад побудови епюр внутрішніх зусиль та напружень розглянемо такий приклад:  $A = 5 \text{ см}^2$  – площа поперечного перерізу.

#### **Розв'язання**

Вибираємо початок координат – т. О.

Поділяємо стержень на дві ділянки – I (ОВ), II (ВС).

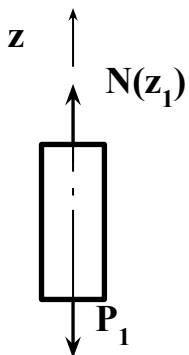
**Зауваження 5.** Ділянкою називають частину стержня між точками прикладання зосереджених сил. Якщо на стержень діє розподілене навантаження, ділянкою називають частину стержня, на якій розподілене навантаження змінюється за однаковим законом.



**Рисунок 3.5 – Розрахункова схема стержня при розтяганні або стисканні**

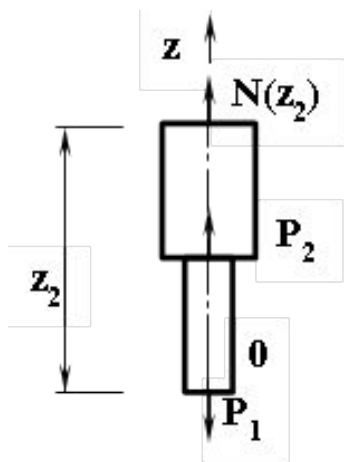


I ділянка ( $0 \leq z_1 \leq l_1$ )



**Рисунок 3.6 – I ділянка стержня при розтяганні або стисканні**

II ділянка ( $l_1 \leq z_2 \leq l$ )



**Рисунок 3.7 – II ділянка стержня при розтяганні або стисканні**

$$\sum z = 0: N(z_1) = N_1 = P_1 = 20 \text{ кН};$$

$$\sigma(z_1) = \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{P_1}{A} = \frac{20 \text{ кН}}{5 \text{ см}^2} = 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 40 \text{ МПа}.$$

Оскільки ці величини не залежать від абсциси перерізу, то в усіх перерізах поздовжня сила і напруження однакові.

$$\sum z = 0: N(z_2) = N_2 = P_1 - P_2 = 20 \text{ кН} - 50 \text{ кН};$$

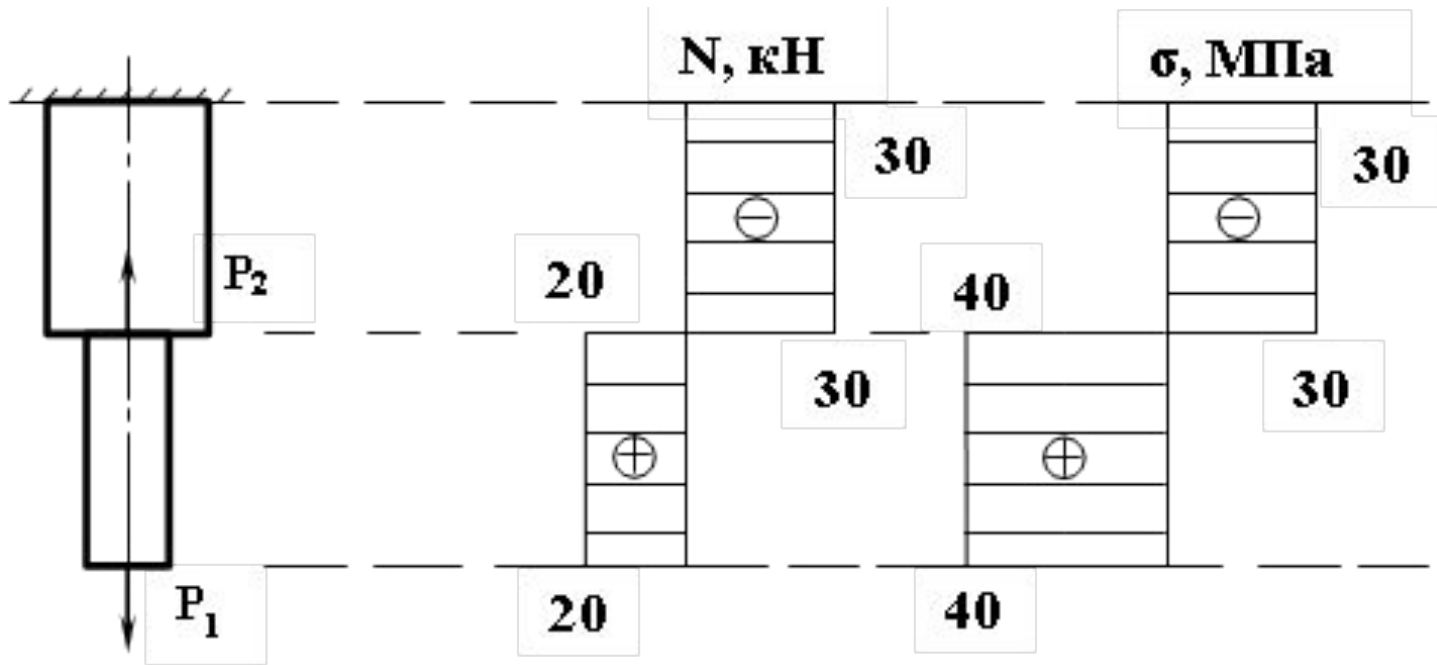
$$\sigma(z_2) = \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = -\frac{30 \text{ кН}}{2 \cdot 5 \text{ см}^2} = -3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -30 \text{ МПа}.$$

### Правила побудови епюр

Ординати відкладають від осі епюри по перпендикуляру.

Штрихують епюри лініями, перпендикулярними до осі стержня.

Для зусиль вибирається певний масштаб. Крім того, на епюрах проставляються числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри в колі ставлять знак зусилля.



**Рисунок 3.8 – Епюри повздовжніх сил та нормальних напружень стержня при розтяганні або стисканні**

### §3.5. Визначення переміщень. Жорсткість при розтяганні (стисканні).

Із виразу (3.9) та (3.11) можна знайти відносні подовження:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}. \quad (3.16)$$

У межах призматичної ділянки стержня завдовжки  $\Delta z$ , коли  $E = \text{const}$  та  $N = \text{const}$ , абсолютне подовження дорівнює:

$$\Delta z = \varepsilon \cdot \Delta z = \frac{N \Delta z}{EA}. \quad (3.17)$$

Формула (3.16) визначає закон Гука під час деформацій розтягання (стискання). Добуток  $EA$  називається **жорсткістю стержня при розтяганні та стисканні**.

Величину  $i = \frac{EA}{\Delta z}$  - називають **погонною жорсткістю стержня при розтяганні та стисканні**.

Якщо треба визначити, за яким законом змінюється переміщення перерізів по довжині стержня, замість формули (3.9) у вираз (3.11) підставляється формула (3.8).

Тоді будемо мати

$$\frac{du}{dz} = \frac{N}{EA}. \quad (3.18)$$

Абсолютне подовження ділянки завдовжки  $\Delta z$  дістанемо підсумувавши подовження всіх відрізків:

$$\Delta z = u(\Delta z) - u(0) = \int_0^{\Delta z} \frac{N}{EA} dz, \quad (3.19)$$

де  $u(\Delta z)$ ,  $u(0)$  – переміщення перерізів стержня з координатами  $z_1 = 0$  та  $z = 0$  відповідно.

Для багатоступеневих стержнів, де в межах кожної  $i$ -ої ділянки  $E_i$ ,  $N_i$ ,  $A_i$  сталі, інтегрування (3.19) можна замінити сумою:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad (3.20)$$

де  $n$  – кількість ділянок.

Наприклад, для стержня, наведеного в §3.4:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EA} + \frac{N_2 l_2}{E \cdot 2A}. \quad (3.21)$$

Поняття “напруження” було введено франц. математиком **Огюстеном Луї Контом** (1822 р.).

Коефіцієнт Пуассона – франц. математик, механік, фізик **Симеон Ден Пуассон** (1830 р.).