# Вычеты

Пусть $z_0 \in \overline{C}$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, тогда существует некоторая окрестность этой точки, в которой $f(z)$ — аналитическая (для $z_0 \in C$ эта окрестность имеет вид $0 < |z - z_0| < r$, а для $z_0 = \infty$ — $|z| > r$).

Рассмотрим произвольный контур $\Gamma$, принадлежащий такой окрестности и являющийся границей некоторой области, содержащей $z_0$.

В силу теоремы Коши значение интеграла $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ не зависит от вида контура $\Gamma$, т.е. интеграл характеризует поведение функции $f(z)$ в особой точке $z_0$ и, следовательно, может быть использован для исследования функции как некоторая числовая характеристика.

***Вычетом функции*** $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \overline{C}$ называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

где $\Gamma$ — контур, принадлежащий окрестности точки $z_0$ и охватывающий ее. Обход контура — положительный (для $z_0 \in C$ обход против часовой стрелки, а для $z_0 = \infty$ – по часовой).

Обозначается вычет (res — residu (фр.) — вычитать):

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz, \quad \Gamma \in O(z_0)\setminus z_0,\ O(z_0):\ 0<|z-z_0|<r,$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)\,dz, \quad \Gamma \in O(\infty)\setminus \infty,\ O(\infty):\ |z|>r.$$

**Основная теорема о вычетах.**

Если функция $f(z)$-аналитическая в $\bar{D}$ за исключением конечного числа особых точек $z_k \in D$, то:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \ \Gamma = \partial D$$

**Обобщенная теорема о вычетах.**

Сумма вычетов функции $f(z)$ во всех ее особых точках, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$$

Функция $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки разлагается в ряд Лорана. Используя формулы для коэффициентов ряда Лорана получим следующее утверждение.

Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту $c_{-1}$ при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in C\,,$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad z_0 = \infty\,.$$

**Пример 1а**. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ее особых точках.

 Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1=-1,\ z_2=3,\ z_3=\infty$.

Разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этих точек имеют вид:

$$f(z)=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}},\quad 0<|z+1|<4;$$

$$f(z)=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+2}}(z-3)^n,\quad 0<|z-3|<4;$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\cdot\frac{1}{z^n},\quad |z|>3.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{-1} f(z)=c_{-1}=\dfrac{-1}{4};\quad \operatorname*{res}_{3} f(z)=c_{-1}=\dfrac{5}{4};$

$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-c_{-1}=-\left(\dfrac{-1+5\cdot 3^0}{4}\right)=-1$ или

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-\left(\operatorname*{res}_{-1} f(z)+\operatorname*{res}_{3} f(z)\right)=-\left(\frac{-1}{4}+\frac{5}{4}\right)=-1.$$ 

Разложим функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=-1$.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\left[w=z+1\right]=\frac{w+1}{w(w-4)}=(*)$$

*Способ 1.*

$$(*)=\frac{-1/4}{w}+\frac{5/4}{w-4}=\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{w}+\frac{5}{4(1-w/4)}\right)=\left[\begin{array}{c}\text{если}\\ 0<|z+1|<4\end{array}\right]=$$

$$=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}.$$

*Способ 2.*

$$(*)=\frac{1}{w}\left(1+\frac{5}{w-4}\right)=\frac{1}{w}\left(1-\frac{5}{4(1-w/4)}\right)=\left[\begin{array}{c}\text{если}\\ 0<|z+1|<4\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{w}\left(1-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{4^n}\right)=\frac{1}{w}-\frac{5}{4}\frac{1}{w}-\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{4^n}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}.$$

Разложим функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=3$.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=[w=z-3]=\frac{w+5}{w(w+4)}=(*)$$

*Способ 1.*

$$(*)=\frac{5/4}{w}+\frac{-1/4}{w+4}=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{w}-\frac{1}{4(1+w/4)}\right)=\left[\begin{matrix}\text{если}\\ 0<|z-3|<4\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+2}}(z-3)^n;$$

*Способ 2.*

$$(*)=\frac{1}{w}\left(1+\frac{1}{w+4}\right)=\frac{1}{w}\left(1+\frac{1}{4(1+w/4)}\right)=\left[\begin{matrix}\text{если}\\ 0<|z-3|<4\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{w}\left(1+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{4^n}\right)=\frac{1}{w}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n w^{n-1}}{4^n}=$$

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{4^{n+2}}.$$

Разложим функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$.

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}=\frac{-1/4}{z+1}+\frac{5/4}{z-3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z\left(1+\dfrac{1}{z}\right)}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z(1-3/z)}=\begin{bmatrix}\text{если}\\ |z|>3\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}+\frac{5}{4\cdot 3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\cdot\frac{1}{z^n}.$$

**Пример 1б**. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ее особых точках.

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1=-1,\ z_2=3,\ z_3=\infty$.

Разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этих точек имеют вид:

$$f(z)=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{-5}{16}\cdot\frac{1}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(z+1)^n}{16\cdot 4^{n+1}},\quad 0<|z+1|<4;$$

$$f(z)=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{z-3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+6)}{4^{n+3}}(z-3)^n,\quad 0<|z-3|<4.$$

Из этих разложений находим:

$$\operatorname*{res}_{-1} f(z)=c_{-1}=-\frac{5}{16};\qquad \operatorname*{res}_{3} f(z)=c_{-1}=\frac{5}{16}.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке можно найти, используя обобщенную теорему о вычетах:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-\left(\operatorname*{res}_{3} f(z)+\operatorname*{res}_{-1} f(z)\right)=0$$

Разложим функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=-1$.

$$▯ \quad f(z)=\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}=\left[w=z+1\right]=\frac{w+1}{w^2(w-4)}=$$

$$=\frac{1}{w^2}\left(1+\frac{5}{w-4}\right)=\frac{1}{w^2}\left(1-\frac{5}{4(1-w/4)}\right)=\left[\begin{array}{c}\text{если}\\ 0<|z+1|<4\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{w^2}\left(1-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{4^n}\right)=\frac{1}{w^2}-\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{w}-\frac{5}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{w^{n-2}}{4^n}=$$

$$=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{-5}{16}\cdot\frac{1}{z+1}-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+3}}\ .▯$$

Разложим функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=3$

$$f(z)=\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}=\frac{-5}{16}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{z-3}$$

Разложим в ряд Лорана каждое слагаемое:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-3)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-3)^n,\quad |z-3|<4;$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=-\left(\frac{1}{z+1}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-3)^n\right)'=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4^{n+1}}(z-3)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{4^{n+2}}(z-3)^n,\quad |z-3|<4.$$

Следовательно,

$$\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{z-3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+6)}{4^{n+3}}(z-3)^n,\quad 0<|z-3|<4.$$

**Пример 2**. Найти вычет функции $f(z)=\sin\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$ в ее особых точках.

 Функция имеет единственную конечную особую точку $z=0$. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\sin\left(1+\frac{1}{z}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z}=$$

$$=\sin 1\cdot\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)+\cos 1\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3 3!}+\ldots\right)=$$

$$=\ \sin 1+\cos 1\cdot\frac{1}{z}-\frac{\sin 1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}-\ldots$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=\cos 1$.

Так как у рассматриваемой функции других конечных особых точек нет, то $\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-\cos 1$.

## Вычисление вычетов

В рассмотренных выше примерах при нахождении вычетов функции раскладывались в ряды Лорана. При этом знание типа особой точки, в которой вычисляется вычет функции, не является обязательным. Таким методом всегда определяется вычет в существенно особой точке.

В случае устранимой особой точки и полюсов задачу вычисления вычета можно заменить некоторыми практически более удобными формулами и правилами. (Вывод этих формул и правил в общем виде, связан с исследованием разложения функции в ряд в окрестности особой точки).

## Вычисление вычетов в конечной особой точке $z_0 \neq \infty$

**1.** Если конечная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.

**2.** Если $z_0$ **полюс** $n$**-го порядка** функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ f(z) \cdot (z - z_0)^n \right], \quad z_0 - \Pi(n),$$

В частности, если $z_0$ **полюс 1-го порядка**, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[ f(z) \cdot (z - z_0) \right].$$

**3.** Если $z_0$ **полюс 1-го порядка** функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z), \psi(z)$ – аналитические в точке $z_0$ функции и $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

**1.** Если конечная особая точка Сейча с не является устранимой особой точкой функции Сей ча..., то Сейчас не удается отобразить рисунок..

В случае устранимой особой точки ряд Лорана функции не содержит главную часть, следовательно, $c_{-1} = 0$.

**1.** Если $z_0 - \Pi(n)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ f(z) \cdot (z - z_0)^n \right], \quad z_0 - \Pi(n),$$

В частности, если $z_0 - \Pi(1)$, то $\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \left[ f(z) \cdot (z - z_0) \right]$.

▯ Пусть $z_0 \in$ ▯ полюс $n$-го порядка функции $f(z)$. Тогда разложение функции в ряд в окрестности $z_0$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad 0 < | z - z_0 | < r$$

Умножив обе части равенства на $(z - z_0)^n$ и продифференцировав результат $(n-1)$ раз, получим выражение

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ f(z) \cdot (z - z_0)^n \right] = (n-1)! c_{-1} + n! c_0 (z - z_0) + \ldots,$$

из которого определяем

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ f(z) \cdot (z - z_0)^n \right].$$ ▯

**2.** Если $z_0 - \Pi(1)$ функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические в точке $z_0$ функции и

$$\varphi(z_0) \neq 0,\ \ \psi(z_0) = 0,\ \ \psi'(z_0) \neq 0,$$

то $\operatorname*{res}\limits_{z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \big( f(z) \cdot (z - z_0) \big) = \lim_{z \to z_0} \left( \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \cdot (z - z_0) \right) =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left( \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} \right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

## Вычисление вычетов в бесконечно удаленной особой точке

**1.** Если $z=\infty$ – **устранимая** особой точкой функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \lim_{z\to\infty}\left[\left(f(\infty)-f(z)\right)\cdot z\right]$$

В частности, если $z=\infty$ является нулем функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\left(-z\cdot f(z)\right).$$

**Следствие.** Если $f(z) \sim \dfrac{A}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$ при $z\to\infty$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -A, & k=1; \\ 0, & k\ge 2. \end{cases}$$

**2.** Если $f(z)$ представима в виде $f(z)=\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)=\varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta)$ регулярна в точке $\eta=0$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$.

□ Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной устранимой особой точки имеет вид:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad r < |z| < \infty$$

Коэффициент $c_{-1}$ можно определить из этого равенства следующим образом:

$$c_{-1} = \lim_{z \to \infty} \left[ \left( f(z) - c_0 \right) \cdot z \right].$$

Так как, очевидно, что $c_0 = \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$, то, доопределяя функцию, положим $f(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} f(z) = c_0$. Получаем формулу для вычисления вычета в $z = \infty$ – устранимой особой точке функции $f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \lim_{z \to \infty} \left[ \left( f(\infty) - f(z) \right) \cdot z \right]$$ □

**Следствие.** Если $f(z) \sim \dfrac{A}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$ при $z \to \infty$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \begin{cases} -A, & k = 1; \\ 0, & k \geq 2. \end{cases} \qquad (*)$$

□ Если $f(z) \sim \dfrac{A}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$ при $z \to \infty$, то точка $z = \infty$ является нулем функции $f(z)$ $k$-го порядка и разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad r < |z| < \infty,$$

где $c_{-k} = A \neq 0$, а значит, выполняется (*).□

---

Если $z = \infty$ – является нулем функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \left( -z \cdot f(z) \right).$$

**2.** Если $f(z)$ представима в виде $f(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z}\right) = \varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta)$ регулярна в точке $\eta = 0$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$.

▯ Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n^f z^n$ – разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда

$$\varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^f z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^f \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^f \eta^n .$$

В силу единственности разложения в ряд Лорана полученный ряд является разложением функции в $\varphi(\eta)$ в точке $\eta = 0$, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^f \eta^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{\varphi} \eta^n ,$$

а значит,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}^f = -c_1^{\varphi} = -\varphi'(0). ▯$$

**Пример 3.** Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ее особых точках.

▯ **1.** $z_1=3$ – полюс 1-го порядка, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=3} f_2(z)=\operatorname*{res}_{z=3}\frac{z+2}{(z+1)^2}\frac{1}{z-3}=\left.\frac{z+2}{(z+1)^2}\frac{1}{(z-3)'}\right|_{z=3}=\left.\frac{z+2}{(z+1)^2}\right|_{z=3}=\frac{5}{16}.$$

**2.** $z_2=-1$ – полюс 2-го порядка, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f_2(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[f_2(z)\cdot(z+1)^2\right]=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+2}{z-3}\right]=$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{z-3-(z+2)}{(z-3)^2}=\lim_{z\to-1}\frac{-5}{(z-3)^2}=-\frac{5}{16}.$$

**3.** $z_3=\infty$ – ноль функции, следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f_2(z)=-\lim_{z\to\infty}\dfrac{(z+2)z}{(z+1)^2(z-3)}=0.$ ▯

Замечание. Этот пример уже был решен ранее (см. пример 1б). Для получения результата (без использования формул, выведенных на последних слайдах) требовалось строить разложение в ряд Лорана (что для этой функции является весьма трудоемким процессом). Пример показывает насколько быстрее найти вычеты для данной функции с использованием выведенных формул. В общем случае, выбор технологии вычисления определяется функцией.

**Пример 4**. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)^2}$ в ее особых точках.

Вычет в точке $z=1$: $\underset{1}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'\right|_{z=1}=\left.\dfrac{2z}{z^2+1}\right|_{z=1}=-\dfrac{1}{2}$

Вычет в точках $z=\pm i$

*Способ 1.* $\underset{\pm i}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\dfrac{1}{(z\pm i)(z-1)^2}\right|_{z=\pm i}=\dfrac{1}{\pm 2i(\pm i-1)^2}=\dfrac{1}{4}$,

*Способ 2.* $\underset{\pm i}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\dfrac{1/\,(z-1)^2}{\left(z^2+1\right)'}\right|_{z=\pm i}=\left.\dfrac{1}{2z(z-1)^2}\right|_{z=\pm i}=\dfrac{1}{4}$.

Вычет в бесконечно удаленной точке $z=\infty$:

*Способ 1.* $\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)=-\left(\underset{1}{\operatorname{res}} f(z)+\underset{i}{\operatorname{res}} f(z)+\underset{-i}{\operatorname{res}} f(z)\right)=-\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)$.

*Способ 2.* Учитывая, что $z=\infty$ является нулем функции $f(z)$, получим

$$\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to\infty}\left(-z\,f(z)\right)=\lim_{z\to\infty}\frac{-z}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)^2}=0\,.$$

**Пример 5***. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)}$ в ее особых точках.

⊠ Особыми точками являются $z=0$ и $z=i\pi k, k\in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (корни уравнения $e^{2z}=1$).

Точка $z=0$ является полюсом 2-го порядка, так как

$$f(z)=\frac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)}=\frac{1}{z\left(1-\left(1+2z+\dfrac{(2z)^2}{2!}+\dfrac{(2z)^3}{3!}+\ldots\right)\right)}=$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{-1}{2+\dfrac{4z}{2!}+\dfrac{8z^2}{3!}+\ldots}=\frac{1}{z^2}\cdot\varphi(z),\quad \varphi(0)=\frac{-1}{2}\neq 0.$$

$$\Rightarrow\qquad \operatorname*{res}_{0} f(z)=\lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\left(1-e^{2z}\right)}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2z}+2ze^{2z}}{\left(1-e^{2z}\right)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\left(1+2z+\dfrac{(2z)^2}{2}+o\left(z^2\right)\right)+2z\left(1+2z+(z)\right)}{(-2z)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2z^2+o\left(z^2\right)}{4z^2}=\frac{1}{2}.$$

Покажем, что точки $z = i\pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ являются простыми полюсами функции $f(z) = \dfrac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)}$. Для этого достаточно показать, что $\varphi(z) = \dfrac{z - i\pi k}{z\left(1-e^{2z}\right)}$ не обращается в 0 в точке $z = i\pi k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\lim_{z\to i\pi k} \varphi(z) = \lim_{z\to i\pi k} \frac{z - i\pi k}{z\left(1-e^{2z}\right)} = \left[w = z - i\pi k\right] =$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{w}{\left(w + i\pi k\right)\left(1-e^{2\left(w+i\pi k\right)}\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\left(w + i\pi k\right)\left(1-e^{2w}\right)} =$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{w}{\left(w + i\pi k\right)\left(-2w\right)} = -\frac{1}{2i\pi k} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{i\pi k} f(z) = \left.\frac{1/z}{\left(1-e^{2z}\right)'}\right|_{z=i\pi k} = \left.\frac{1/z}{-2e^{2z}}\right|_{z=i\pi k} = \frac{1}{-2i\pi k} = \frac{i}{2\pi k}. \blacksquare$$