Тема урока:
«Применение интеграла к решению физических задач»

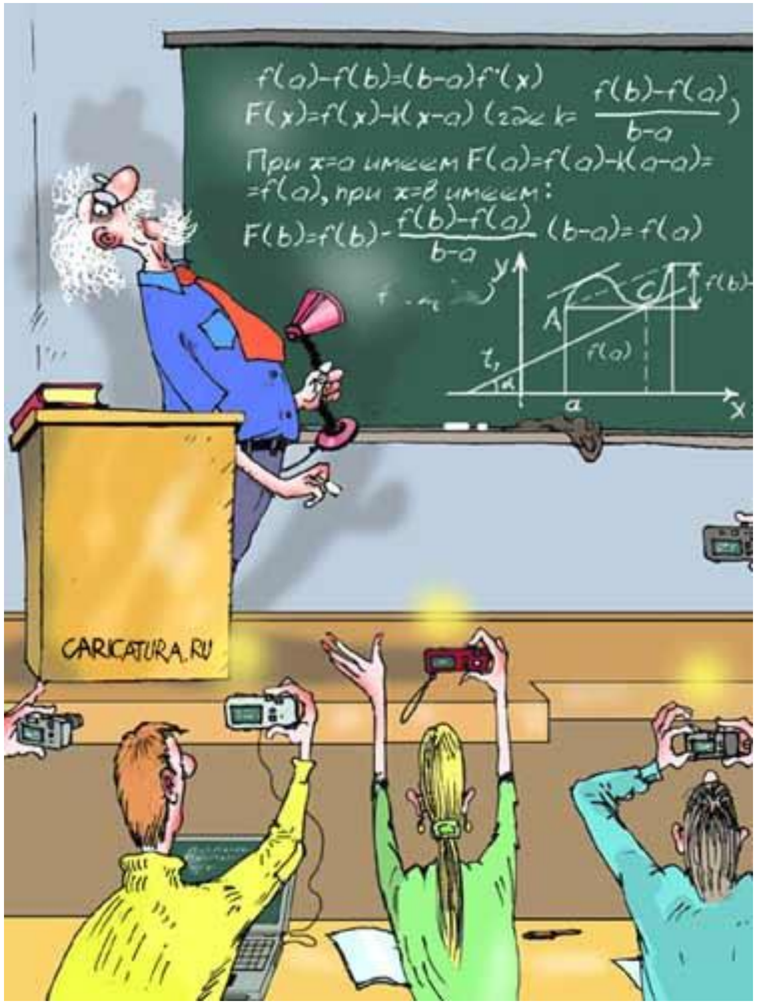
•Цели урока:

1. обобщить и закрепить ключевые задачи по теме
2. научиться работать с теоретическими вопросами темы
3. научиться применять интеграл к решению физических задач

Рассмотрим теорию

по данной теме

1. Схема решения задач на приложения определенного интеграла



С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи физики, механики и т. д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Так, понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Несмотря на разнообразие этих задач, они объединяются одной и той же схемой рассуждений при их решении. Искомая величина (путь, работа, давление и т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Эту переменную величину обозначают через X, а промежуток ее изменения — через [a, b].

Отрезок [a, b] разбивают на n равных частей, в каждой из которых можно пренебречь изменением переменной величины. Этого можно добиться при увеличении числа разбиений отрезка.

На каждой такой части задачу решают по формулам для постоянных величин. Далее составляют сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при $n\to\infty$, находят искомую величину I в виде интеграла

$I=\int_a^b f(x)\,dx$, где f(x) — данная по условиям задачи функция (сила, скорость и т. д.).

2. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле S=vt.
Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t, т. е. v=f(t), то для нахождения пути, пройденного телом за время от t1 до t2, разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt. В каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда пройденный телом путь будет приблизительно равен сумме:

$\sum_{k=1}^{n} v(t)\Delta t.$, т.е.

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} v(t)\Delta t.$$

Если функция v(t) непрерывна, то

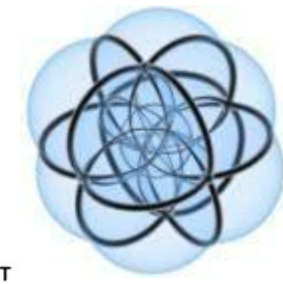
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Итак,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

3. Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела

Пусть тело под действием силы F движется по прямой s, а направление силы совпадает с направлением движения. Необходимо найти работу, произведенную силой F при перемещении тела из положения a в положение Ь.



Если сила F постоянна, то работа находится по формуле $A = F(b-a)$ (произведение силы на длину пути).

Пусть на тело, движущееся по прямой Ox, действует сила F, которая изменяется в зависимости от пройденного пути, т. е. $F = f(x)$. Для того чтобы найти работу, совершаемую силой F на отрезке пути от a до b, разделим этот отрезок на n равных частей Δx. Предположим, что на каждой части Δx сила сохраняет постоянное значение $F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_k), \ldots, F(x_n)$.

Составим интегральную сумму, которая приближенно равна значению произведенной работы:

$$A \approx F(x_1)\Delta x + F(x_2)\Delta x + \cdots + F(x_k)\Delta x + \cdots + F(x_n)\Delta x,$$

т.е. работа, совершенная этой силой на участке от a до b, приближенно мала сумме

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$.

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

4.Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины

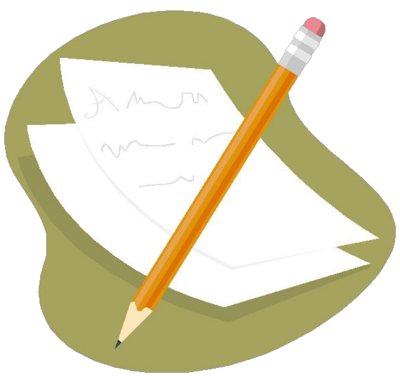
Согласно закону Гука, сила F, необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.

Пусть x – величина растяжения или сжатия пружины. Тогда $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойства пружины.

Работа на участке Δx выразится формулой $\Delta A \approx F\Delta x$, а вся затраченная работа $A \approx \sum_{x_0}^{x_1} F\Delta x$ или $A \approx \sum_{x_0}^{x_1} kx\Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то погрешность величины работы стремится к нулю.

Для нахождения истинной величины работы следует перейти к пределу

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} f\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} kx\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} kx dx.$$



Итак,

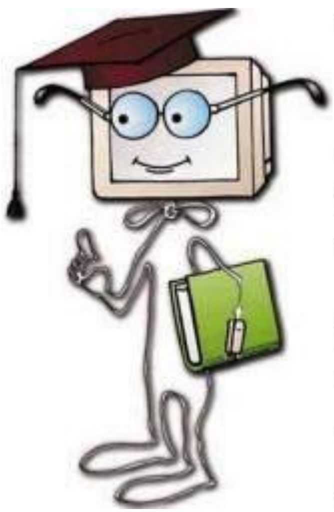
$$A = k \int_{x_0}^{x_1} x dx.$$

5.Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле

$P = 9{,}81\gamma h S$ (4), где γ – плотность жидкости.

Выведем формулу для вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку произвольной формы, если ее верхний край погружен на глубину a, а нижний — на глубину b.



Так как различные части вертикальной пластинки находятся на разной глубине, то сила давления жидкости на них неодинакова. Для вывода формулы нужно разделить пластинку на n горизонтальных полос одинаковой высоты Δx. Каждую полосу приближенно можно считать прямоугольником.

По закону Паскаля сила давления жидкости на такую полосу равна силе движения жидкости на горизонтально расположенную пластинку той же площади, погруженной на ту же глубину.

Тогда согласно формуле (4) сила давления на полосу, находящуюся на расстоянии x от поверхности, составит

$\Delta P = 9{,}81\gamma x y \Delta x$, где $y\Delta x$ – площадь полосы.

Составим интегральную сумму и найдем ее предел, равный силе давления жидкости на всю пластинку:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} 9{,}81\gamma x y \Delta x = \int_{a}^{b} 9{,}81\gamma x y \, dx,$$

т.е.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx\ (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то a=0 и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx\ (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\,dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\,dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2}\int_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Рассмотрим примеры задач по данной теме

№ 1

Скорость движения материальной точки задается формулой

v=$(4t^3 - 2t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 4с от начала движения.

№ 2

Скорость движения изменяется по закону $v = 2t$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

№ 3

Скорость движения тела задана уравнением $v = (2t - 3t^2)$ м/с. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

№ 4

Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = (29,4 - 9,8t)$ м/с.

Найти наибольшую высоту подъема.

№ 5

Какую работу совершает сила в 10Н при растяжении пружины на 2 см?

№ 6

Сила в 60Н растягивает пружину на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 14 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см?

№ 7

Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

№ 8

В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

№ 9

Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением

$v = t^2 - 8t + 3.$

Найти уравнение движения точки.

№ 10

Скорость тела задана уравнением $v = 6t^2 + 1$. Найти уравнение движения, если за время $t = 3c$ тело прошло путь $s = 60$ м.

№ 11

Тело движется со скоростью $v = 3t^2 - 1$ м/с. Найти закон движения $s(t)$, если в начальный момент тело находилось на расстоянии 5 см от начала отсчета.

№ 12

Вычислить силу давления воды на плотину, имеющую форму трапеции, у которой верхнее основание, совпадающее с поверхностью воды, имеет длину 10 м, нижнее основание 20 м, а высота 3 м.

№ 13

Цилиндрический стакан наполнен ртутью. Вычислить силу давления ртути на боковую поверхность стакана, если его высота 0,1 м, а радиус основания 0,04 м. Плотность ртути равна 13600 кг/$м^3$.