

## 2. Правила сложения и умножения вероятностей и их следствия

---

### Ключевые слова

- *правило сложения для несовместных событий*
- *сумма вероятностей событий полной группы*
- *вероятности противоположных событий*
- *зависимые и независимые события*
- *условная и безусловная вероятность*
- *правило умножения*
- *условие независимости*

- *надежность*
- *система без резервирования*
- *система с резервированием*
- *вероятность хотя бы одного из событий*
- *правило сложения для совместных событий*
- *неравенство вероятностей*
- *формула Бернулли*
- *формула гипотез (полной вероятности)*
- *формула Бейеса*

# Правило сложения для несовместных событий

(только для него – «как получено»)

Вероятность суммы двух несовместных событий (т.е., одного из них) равна сумме их вероятностей:

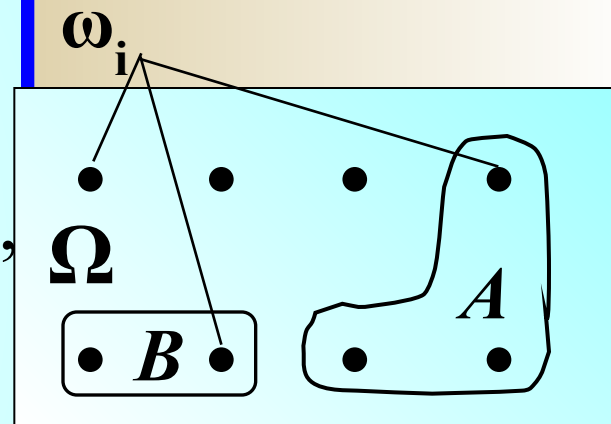
$$P(A + B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = \emptyset$$

Из аксиоматического определения:

$$P(A) = \sum_i p(\omega_i \in A), \quad P(B) = \sum_i p(\omega_i \in B),$$

$$P(A + B) = \sum_i p(\omega_i \in A + B)$$

Эта сумма равна сумме двух первых



По классическому определению:

пусть в эксперименте с равновозможными исходами  $m_A$  элементарных событий благоприятны событию  $A$ ,  $m_B$  – событию  $B$ ,  $(m_A + m_B)$  – событию  $(A + B)$ .

Тогда:

$$P(A+B) = (m_A + m_B) / n = m_A/n + m_B/n = P(A) + P(B)$$

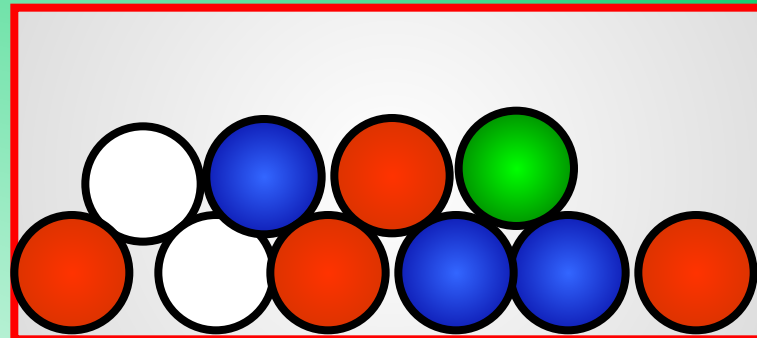
→ теорема доказана

Обобщается на  $k$  несовместных событий ( $k > 2$ )

Вероятность наступления одного из попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{j=1}^k P(A_j)$$

**Пример:** в ящике 2 белых,  
3 синих, 4 красных шара и  
1 зеленый



**Вероятность вынуть наугад шар цвета  
российского флага:  $0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9$**

**+ 0.1 – вероятность вынуть зеленый шар = 1**  
– вероятность достоверного события ? –  
«вынуть шар одного из возможных цветов»

**Эта ситуация иллюстрирует следующее правило**

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_k$  образуют *полную группу*,  
то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_j P(A_j) = 1, \quad \text{если } \sum_j A_j = \Omega \text{ и } A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$$

**Важный частный случай –  
*противоположные события***

**Сумма вероятностей *противоположных*  
событий равна единице**

$$p + q = 1$$

Часто на практике оценивается *вероятность отказа* объекта  $q$ , а затем определяется *надежность*  $p$  (*вероятность безотказной работы*)

$$p = 1 - q$$

## *Зависимые и независимые события. Условная и безусловная вероятность*

---

Два события называют *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятности другого

# Пример

Эксперимент: из коробки с 5 белыми и 3 черными шарами извлекаются наугад 2 шара.

События: В – 1-ый шар черный, А – 2-ой шар белый.

## 2 разные схемы эксперимента:

а) «схема с возвращением»

(1-ый шар возвращается перед доставанием 2-го);

б) «схема без возвращения» (1-ый шар не возвращается)

## Вероятности:

а)  $P(A) = 5 / 8$  (не зависит от того, было ли В)

$P(B) = 3 / 8 \rightarrow A$  и  $B$  – независимые

б)  $P(A) = 4 / 7$ , если В не произошло, но

$P(A) = 5 / 7$ , если В произошло

$\rightarrow$  вероятность наступления А

зависит от наступления или не наступления В



**Условная вероятность –  $P(A/B)$  или  $P_B(A)$  есть вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что событие  $B$  имело место. Вероятность независимого события – безусловная (абсолютная)**

**Как следует из определения условной вероятности,**

**Отсюда следует правило умножения вероятностей!**

**Вероятности событий, о котором идет речь, и события, о котором идет речь, пр...**

$$P(A/B) = P(A \cdot B) / P(B)$$

# Правило умножения

*Вероятность произведения двух событий (т.е., их совместного наступления) равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое имело место:*

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

**Пример.** В эксперименте с шарами по схеме (б), когда 1-ый шар не возвращается,  $P(A \cdot B) = (3/8) \cdot (5/7) = 15/56$  – вероятность того, что 1-ый черный, а 2-ой белый

Для независимых событий выполняется (по определению) *условие независимости*:

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B)$$

В этом случае правило умножения принимает следующую форму

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей

**Пример.** В ситуации с возвращением шара (а)

$$P(A \cdot B) = (5/8) \cdot (3/8) = 15/64$$

**Правило умножения обобщается на любое число взаимонезависимых событий**

**Вероятность совместного наступления независимых событий равна произведению их вероятностей:**

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$$

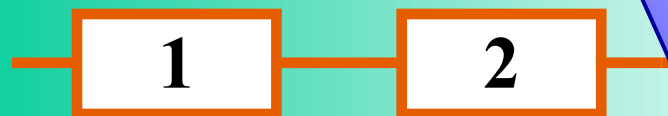
**Все последующие формулы для расчета вероятностей событий можно рассматривать как следствия правил сложения и умножения**

# Важные примеры

Надежность системы независимых  
последовательных элементов

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_j \cdot \dots \cdot p_k,$$

$p_j$  – надежность  $j$ -го элемента



*Это «системы без резервирования»*

Работа системы – произведение рабочих состояний всех  $k$  элементов (функционирует, только если все действуют). Вероятность работы системы в целом определяется по правилу умножения.

Если надежность элементов одинакова, т.е.,

$$p_j = p, j = 1 \dots k \rightarrow P = p^k$$

**Надежность системы без резервирования  
падает с ростом количества элементов**

**Вероятность отказа такой системы:**

$$Q = 1 - P = 1 - p_1 p_2 \dots p_j \dots p_k$$

**Отказ системы независимых элементов, работающих параллельно – произведение отказов элементов.**

**Откажет, только когда откажут все элементы.**

1  
...

**Это «система с резервированием»**

k

**Вероятность отказа**

$$Q = q_1 q_2 \dots q_j \dots q_k$$

$$Q = q^k, \text{ если } q_j = q (j = 1 \dots k)$$

$$P = 1 - Q = 1 - q_1 q_2 \dots q_j \dots q_k$$

**Надежность системы с резервированием растет с ростом количества элементов**

**В практических расчетах надежности и вероятности отказа наиболее удобно определить:**

- 1) *для последовательной системы – сначала R потом Q*
- 2) *для параллельной системы – сначала Q затем R*

**NB!**



## Пример:

Вероятности отказа элементов системы  $q_1 = 0.1$ ,  $q_2 = 0.2$

1) Если элементы последовательны,

$$\begin{aligned} \text{то надежность } P &= p_1 \cdot p_2 = (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \\ &= 0.9 \cdot 0.8 = 0.72; \end{aligned}$$

вероятность отказа  $Q = 1 - P = 0.28$

**Q** ← «откажет хотя  
бы 1»

2) Если элементы действуют параллельно,

$$\begin{aligned} \text{то } Q &= q_1 \cdot q_2 = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02; \\ \text{надежность } P &= 1 - Q = 1 - 0.02 = 0.98 \end{aligned}$$

**P** ← «работает хотя  
бы 1»

**Общее правило для расчета вероятности  
«хотя бы одного из событий»  
(как совместных, так и не совместных)**

**Вероятность наступления хотя бы одного  
из нескольких независимых событий равна  
единице без произведения вероятностей  
противоположных событий:**

$$P(A = A_1 + A_2 + \dots + A_k) \\ = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot p(\bar{A}_k)$$

**Если событий лишь два, то вероятность  
«по крайней мере одного» можно определить  
по *правилу сложения для совместных событий*  
(при  $k > 2$  существенно усложняется)**

**Вероятность наступления хотя бы одного  
из двух совместных событий  
равна сумме их вероятностей  
без вероятности их совместного наступления:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

**Пример. Какова вероятность хотя бы одного попадания при 3-х выстрелах, если вероятность попасть в каждом равна 0.7?**

$$P(\text{хотя бы 1 из 3-х}) = 1 - q^3 = 1 - 0.3^3 = 0.973$$

Веро.  
попада  
одно

to be  
contin  
ued

$$P(\text{хотя бы 1 из 2-х}) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0.3 \cdot 0.2 = 0.94;$$

$$P(\text{хотя бы 1 из 2-х}) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$$