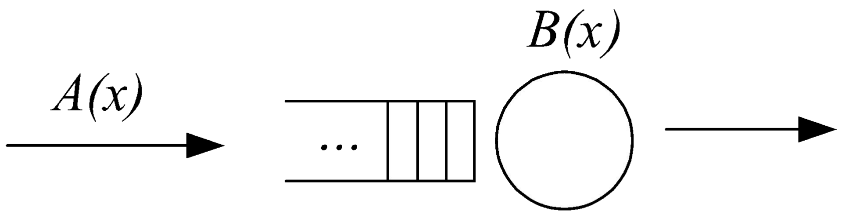
Курс «Прикладные задачи ТМО», «Основы математической теории телетрафика»

СМО $M|M|1|\infty$

Лекция 5

Система массового обслуживания

$$M \mid M \mid 1 \mid \infty$$



$A(x)$ - ФР длительности интервала между поступлениями заявок, $x \geq 0$;

$B(x)$ - ФР длительности обслуживания заявок;

$\upsilon = 1$ - количество приборов;

$r = \infty$ - число мест в очереди.

Стационарное распределение вероятностей: $\{p_n,\ n \in \mathrm{J}\}$

Показатели производительности СМО:

N - среднее число заявок в СМО;

Q - . средняя длина очереди;

$\overline{\omega}$ - среднее время ожидания начала обслуживания;

$\overline{\upsilon}$ - среднее время пребывание завки в СМО.

Нагрузочные параметры

Входящий поток: M

СВ $\xi \in \exp(\lambda)$ - длительность интервала между поступлениями заявок;

λ - интенсивность входящего ПП заявок;

ФР $A(t) = \exp(\lambda) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t > 0; \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$

Время обслуживания: M

СВ $\eta \in \exp(\mu)$ - длительность обслуживания заявок;

μ - интенсивность экспоненциального распределения СВ длительности обслуживания заявки;

ФР $B(t) = \exp(\mu)$.

Математическая модель

Случайный процесс (СП) $X(t)$ - число заявок в СМО в момент t, $t \geq 0$.

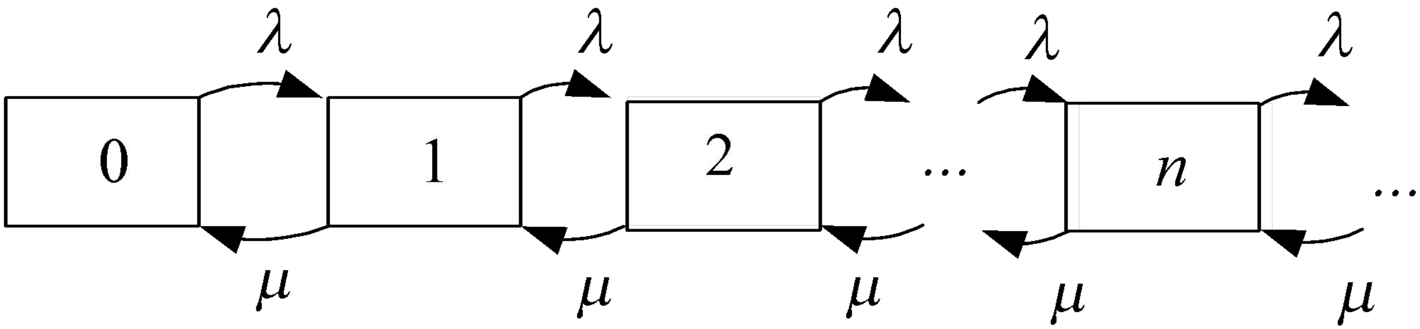
$\mathrm{J} = \{0, 1, \ldots\}$ - пространство состояний системы.

Задачи: исследовать СП $X(t)$, $X(t) \in \mathrm{J}$
в предположении о существовании стационарного режима и стационарных вероятностей состояний процесса $X(t)$

$$p_n = \lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\{X(t) = n\}, \; n \in \mathrm{J},$$

найти стационарное распределение $\{p_n, \; n \in \mathrm{J}\}$ вероятностей СП $X(t)$;
найти условия существования стационарного режима;
найти стационарные характеристики, связанные с временем.

Диаграмма интенсивностей переходов



Интенсивности переходов ПРГ $X(t)$:

$$a_{n,n+1} =: \lambda_n = \lambda,\ n \geq 0;$$

$$a_{n,n-1} =: \mu_n = \mu,\ n > 0;$$

$$a_{n,n} = -\lambda_n - \mu_n = -\lambda - \mu,\ n > 0.$$

СУР

СУГБ: $-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} = 0, \ n \geq 1.$$

СУЛБ: $\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \ n \geq 1.$

Условие нормировки: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$

Стационарное распределение

$p_n = \rho^n p_0,\ n \ge 1,$
где $\rho = \lambda/\mu$ - предложенная нагрузка на СМО

p_0 определяется из условия нормировки $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$:

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right]^{-1} = 1 - \rho.$$

Тогда $p_n = \rho^n (1 - \rho),\ n \ge 0.$ (1)
Условие существования стационарного режима $\rho < 1$.

Стационарный режим

Условия Карлина и МакГрегора
существования стационарного режима при $|\mathrm{J}| = \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} < \infty \qquad (3)$$

При $\upsilon = 1,\ r = \infty$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho}\right)^i = \infty \quad \Rightarrow \quad \rho < 1$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i < \infty \quad \Rightarrow \quad \rho < 1$$

ВВХ СМО

η – случайная величина (СВ) времени обслуживания,

$B(t) = P\{\eta < t\} = \exp(\mu)$ - ФР СВ η,

$M\eta = \int_0^\infty t dB(t) = \int_0^\infty t B'(t) dt = \frac{1}{\mu}$ - ср. значение СВ η.

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$W(t) = P\{\omega < t\}$ - ФР СВ ω,

$M\omega = \overline{\omega}$ - ср. значение СВ ω.

υ – СВ времени пребывания заявки в СМО,

$V(t) = P\{\upsilon < t\}$,

$M\upsilon = \overline{\upsilon}$ - ср. значение СВ υ.

ФР времени ожидания заявки

Пусть в момент t поступления заявки в СМО $X(t)=i$, $i=\overline{0,\upsilon+r}$.

$i=0$: заявка немедленно поступит на обслуживание,
ФР СВ $\omega=0$
ПЛС СВ ω $\quad \omega_0(s)=e^{-s\cdot 0}\cdot 1=1.$

$i=1$: остат. обсл. заявки на приборе ~ exp(μ);
ПЛС СВ ω $\quad \omega_1(s)=\dfrac{\mu}{\mu+s}.$

$i=n,\ n\ge 1$: остат. обсл. заявки на приборе ~ exp(μ),
в очереди $(n-1)$ заявок, для каждой обсл. ~ exp(μ);
ПЛС СВ ω $\quad \omega_n(s)=\left(\dfrac{\mu}{\mu+s}\right)^n.$

ПЛС ФР времени ожидания заявки

По формуле полной вероятности:

$$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n E_n(t)=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n E_n(t).$$

ПЛС $\omega(s)$, $s\geq 0$, СВ ω с ФР $W(t)$:

$$\omega(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dW(t)=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n=(1-\rho)\frac{\mu+s}{s+\mu(1-\rho)}=$$

$$=(1-\rho)+\rho\frac{\mu(1-\rho)}{s+\mu(1-\rho)}. \qquad (4)$$

ФР $W(t)$ СВ ω:

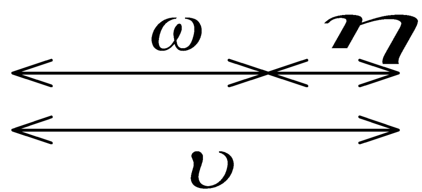
$$W(t)=(1-\rho)\cdot 1+\rho\cdot\left[1-e^{-\mu(1-\rho)t}\right]. \qquad (5)$$

Среднее время ожидания заявки

$$\bar{\omega} = \int_0^\infty t\,dW(t) = \int_0^\infty tW'(t)\,dt = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad (6)$$

$$\bar{\omega} = -\omega'(0) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad (7)$$

ФР времени пребывания заявки в СМО



$\upsilon = \omega + \eta$

ФР $V(t) = P\{\upsilon < t\}$ - ?

ПЛС $\upsilon(s)$, $s \geq 0$, ФР $V(t)$:

$$\upsilon(s) = \int_0^\infty e^{-st} dV(t) = \omega(s) \cdot \text{ПЛС}\{\exp(\mu)\} = (1-\rho)\frac{\mu + s}{s + \mu(1-\rho)}\frac{\mu}{\mu + s} =$$

$$= \frac{\mu(1-\rho)}{s + \mu(1-\rho)}. \qquad (8)$$

ФР $V(t)$ СВ υ:

$$V(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}, \ t > 0. \qquad (9)$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{\upsilon} = \int_0^\infty t\,dV(t) = \int_0^\infty tV'(t)\,dt = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad (10)$$

$$\bar{\upsilon} = -\upsilon'(0) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad (11)$$

Формулы Литтла

Среднее число заявок в СМО: $N = \lambda \overline{\upsilon}$

Средняя длина очереди: $Q = \lambda \overline{\varpi}$