

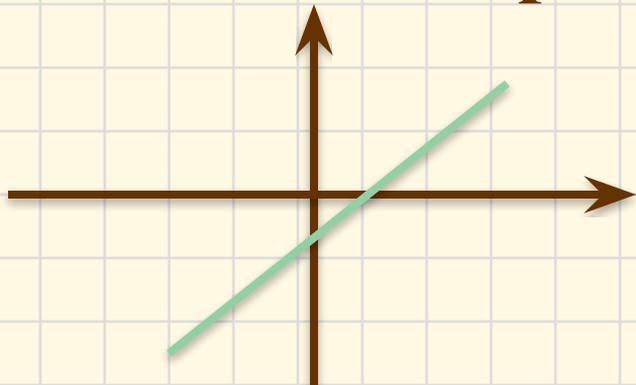
Задачи на нахождение экстремума

Анна Валерьевна
преподаватель математики

- Решение различных экономических задач в формате ЕГЭ часто сводится к отысканию экстремальных (минимальных или максимальных) значений некоторой функции. Нередко такими функциями являются линейная функция или квадратичная функция

Линейная функция $y=kx+m$

- 1) Если задан промежуток, которому принадлежит x , то экстремальное значение функция принимает на одном из концов промежутка.



Линейная функция $y=kx+m$

- 2) Если линейная функция рассматривается только на множестве целых чисел, то число из этого промежутка, при котором функция принимает наибольшее или наименьшее значение, будет ближайшим целым числом к тому концу промежутка, на котором она принимает соответствующее экстремальное значение

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

- Квадратичная функция принимает экстремальное значение при

$$x = -\frac{b}{2a}$$

№1.

Индивидуальный предприниматель за 288 тысяч рублей приобрёл цех по производству носков. Затраты на изготовление x тысяч пар носков в месяц составляют (x^2+6x+7) тысяч рублей. Если продавать одну пару носков по s рублей, то прибыль от продажи x тысяч пар носков в месяц составит $sx - (x^2+6x+7)$ тысяч рублей ($s>6$). Предприниматель имеет возможность изготавливать и продавать такое количество пар носков, которое обеспечивает наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении s предприниматель окупит затраты на покупку цеха не более чем за 32 месяца?

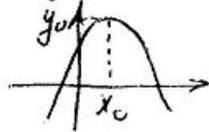
1) Прибыль $P(x)$ от продажи x тысяч пар носков в месяц составляет по условию:

$$P(x) = cx - (x^2 + 6x + 4)$$

$$P(x) = cx - x^2 - 6x - 4$$

$$P(x) = -x^2 + x(c-6) - 4$$

($P(x)$ - парабола, ветви которой направлены вниз, свое наибольшее значение принимает в вершине параболы)



$$2) \quad a = -1$$
$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad b = (c-6) \quad c = 4$$

$$x_0 = -\frac{c-6}{-2} = \frac{6-c}{-2} = \frac{c-6}{2}$$

$$3) \quad P\left(\frac{c-6}{2}\right) = -\left(\frac{c-6}{2}\right)^2 + \frac{(c-6)}{2} \cdot (c-6) - 4 =$$
$$= -\frac{(c-6)^2}{2} + \frac{(c-6)^2}{2} + 4 = -\frac{(c-6)^2}{4} + \frac{(c-6)^2}{2} - 4$$
$$= \frac{(c-6)^2}{4} - 4$$

4) Затрата необходимо окутить не более чем за 32 месяца, значит,

$$32 \cdot \left(\frac{(c-6)^2}{4} - 4 \right) \geq 288$$

$$\frac{(c-6)^2}{4} - 4 \geq 9$$

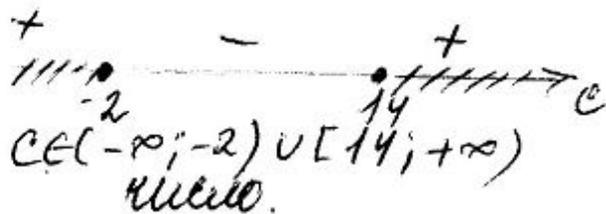
$$\frac{(c-6)^2}{4} - 16 \geq 0$$

$$\left(\frac{c-6}{2} - 4 \right) \left(\frac{c-6}{2} + 4 \right) \geq 0$$

$$\left(\frac{c-6-8}{2} \right) \cdot \left(\frac{c-6+8}{2} \right) \geq 0$$

$$(c-14)(c+2) \geq 0$$

c - положительное



значит, наименьшее значение c равно 14.

Ответ: 14.

№2

Крупный бизнесмен является владельцем **двух заводов**, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если **рабочие первого завода** трудятся суммарно **t^2 часов в неделю**, то за это время они производят **$2t$ единиц товара**. А если **рабочие второго завода** трудятся суммарно **t^2 часов в неделю**, то за это время они производят **$5t$ единиц товара**. За обоих заводах за 1 час работы рабочему платят **500 рублей**. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере **1 450 000 рублей**?

Пусть суммарное рабочее время за неделю на I заводе составит x^2 , II заводе - y^2 , тогда на I заводе произведут $2x$ единиц продукции, а на II заводе - $5y$ единиц продукции (товара). Всего на двух заводах произведут $K = 2x + 5y$ единиц товара.

По условию, за эту работу надо выплатить рабочим $(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1450000$ рублей.

Тогда

$$(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1450000$$

$$x^2 + y^2 = 2900, \quad y^2 = 2900 - x^2, \quad y > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2900 - x^2}$$

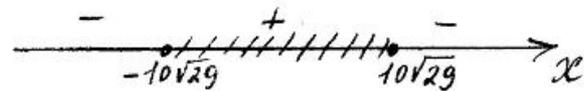
$$\begin{aligned} \text{С учетом, что } K &= 2x + 5y = \\ &= 2x + 5\sqrt{2900 - x^2}. \end{aligned}$$

Найдем наибольшее значение K (число единиц продукции) с помощью производной.

$$K = K(x) = 2x + 5 \cdot \sqrt{2900 - x^2}$$

$$1) \quad 2900 - x^2 \geq 0$$

$$(10\sqrt{29} - x)(10\sqrt{29} + x) \geq 0$$



$$x \in [-10\sqrt{29}, 10\sqrt{29}]$$

С учетом, что $x > 0$, $x \in [0; 10\sqrt{29}]$.

$$2) \quad K'(x) = 2 + \frac{5 \cdot (-2x)}{2\sqrt{2900 - x^2}}$$

$$K'(x) = 2 - \frac{5x}{\sqrt{2900 - x^2}}$$

$$3) \quad K'(x) = 0$$

$$2 - \frac{5x}{\sqrt{2900 - x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{2900 - x^2} = 5x \quad \uparrow^2$$

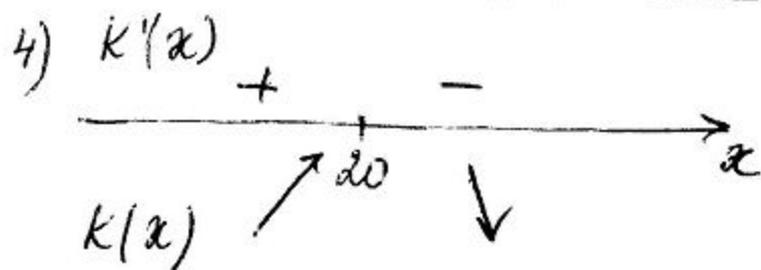
$$4(2900 - x^2) = 25x^2$$

$$-4x^2 - 25x^2 = -4 \cdot 2900$$

$$-29x^2 = -4 \cdot 2900 \quad | : (-29)$$

$$x^2 = 400$$

$\begin{cases} x = 20 \\ x = -20 \end{cases}$ - не удовлетворяет условию.



Значит, в т. $x = 20$ будет
наибольшее значение

$$y = \sqrt{2900 - 20^2} = 50$$

$$k = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290$$

Значит, на двух заводах можно
будет выпустить 290 единиц
продукции.

Ответ: 290.

Задание для самостоятельной работы

- 1) Затраты на строительство нового аквапарка составляют 50 млн рублей. Стоимость обслуживания x тысяч посетителей за сезон равна $0,25x^2+4x+6$ млн рублей. Если за обслуживание одного посетителя за сезон брать c тысяч рублей ($c>4$), то прибыль за обслуживание x тысяч посетителей за сезон будет равна $cx-(0,25x^2+4x+6)$ млн рублей. По окончании строительства у руководства аквапарка будет возможность организовать обслуживание такого числа посетителей, которое обеспечивает максимальную прибыль. При каком наименьшем значении c окупятся затраты на строительство аквапарка не более чем за 5 сезонов?

2) Олеся является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то за это время они производят $3t$ единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Олеся платит рабочему 400 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 500 рублей. Олеся готова выделить 1 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее число деталей можно произвести за неделю на этих двух заводах?