Желательные статистические свойства оценок параметров объекта, полученных в результате идентификации

Желательными свойствами оценок являются:

1) Несмещённость, которая состоит в том, что математическое ожидание оценки совпадает с истинным значением при любых объёмах N экспериментальных данных т.е.

$$M[\hat{A}] = A$$

2) Состоятельность т.е. сходимость по вероятности оценок A к истинным значениям параметров

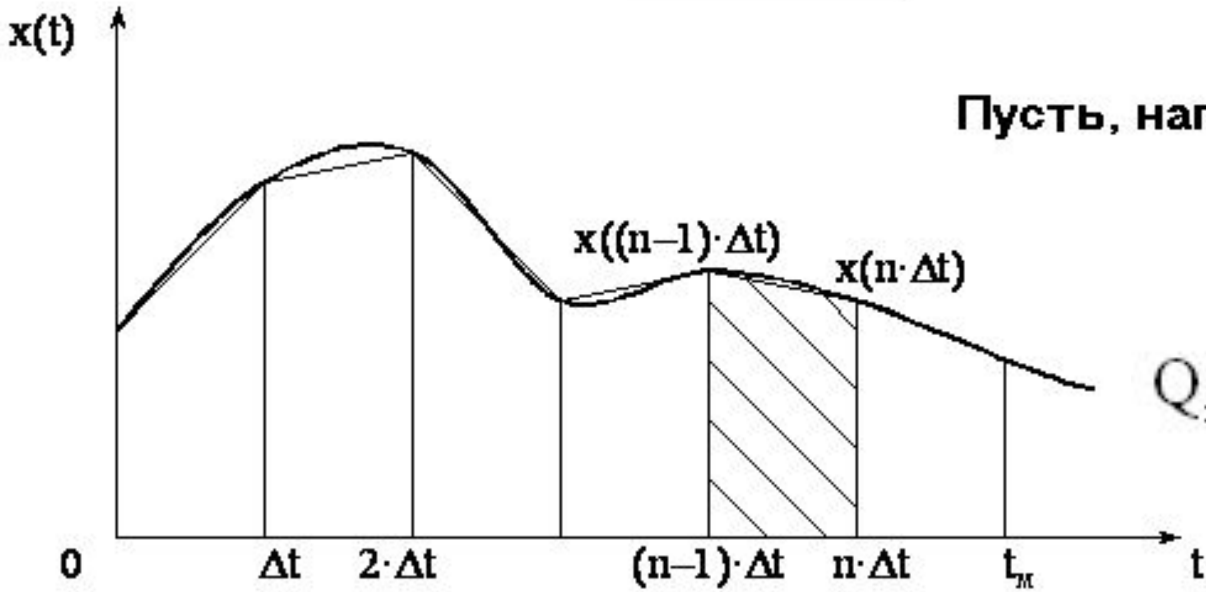
$$P\left[\left|\hat{A} - A\right| > \varepsilon\right] \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

где P – обозначение вероятности; ε – бесконечно малая положительная величина.

3) Эффективность. Эффективной называется оценка, имеющая наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок.

Во многих распространенных на практике задачах идентификации МНК–оценки являются несмещёнными, состоятельными и эффективными. Поэтому МНК является одним из наиболее используемых методов оценивания.

Построение переходных процессов в непрерывных динамических системах при помощи ЭВМ методом структурного моделирования



Пусть, например $W(S)=\dfrac{K}{S}$

$$Q_{n\text{-}1,n}=\frac{X_n+X_{n-1}}{2}\cdot\Delta t$$

$$Y_n = Y_{n\text{-}1} + K\ Q_{n\text{-}1,n} \qquad Y_n=\alpha_1\cdot Y_{n-1}+\alpha_2\cdot X_n+\alpha_3\cdot X_{n-1}$$

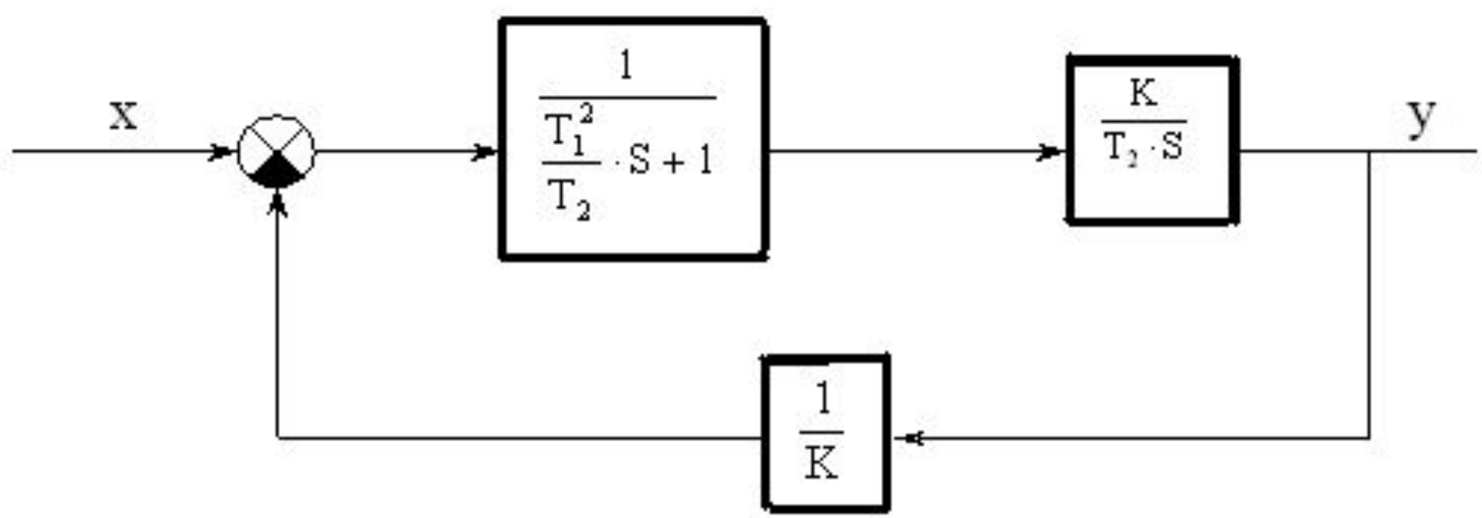
Таблица для определения коэффициентов α и выбора периода дискретности

Передаточная функция звена	α_1	α_2	α_3	Δt_{max}
$\frac{K}{S}$	1	$\frac{\Delta t \cdot K}{2}$	α_2	$\frac{0.1}{K}$
$K \cdot S$	0	$\frac{K}{\Delta t}$	$-\alpha_2$	$\frac{0.1}{K}$
$\frac{K}{T \cdot S+1}$	$e^{\frac{-\Delta t}{T}}$	$\frac{K}{\Delta t} \cdot (T \cdot \alpha_1 - T + \Delta t)$	$-\frac{K}{\Delta t} \cdot (T \cdot \alpha_1 - T + \alpha_1 \cdot \Delta t)$	$\frac{0.1 \cdot T}{K}$
$\frac{K \cdot S}{T \cdot S+1}$	$e^{\frac{-\Delta t}{T}}$	$\frac{K}{\Delta t} \cdot (1 - \alpha_1)$	$-\alpha_2$	$\frac{0.1 \cdot T}{K}$
$K \cdot (1 + T \cdot S)$	0	$\frac{K}{\Delta t} \cdot (T + \Delta t)$	$-\frac{K \cdot T}{\Delta t}$	$\frac{0.1}{K \cdot T}$

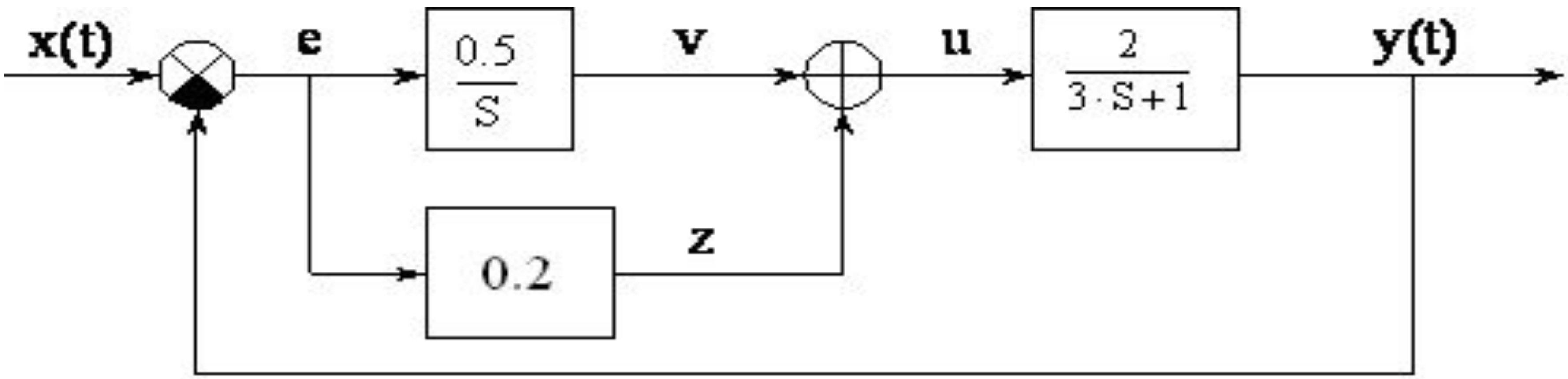
Схема замещения колебательного звена

Для колебательного звена используется эквивалентная схема замещения

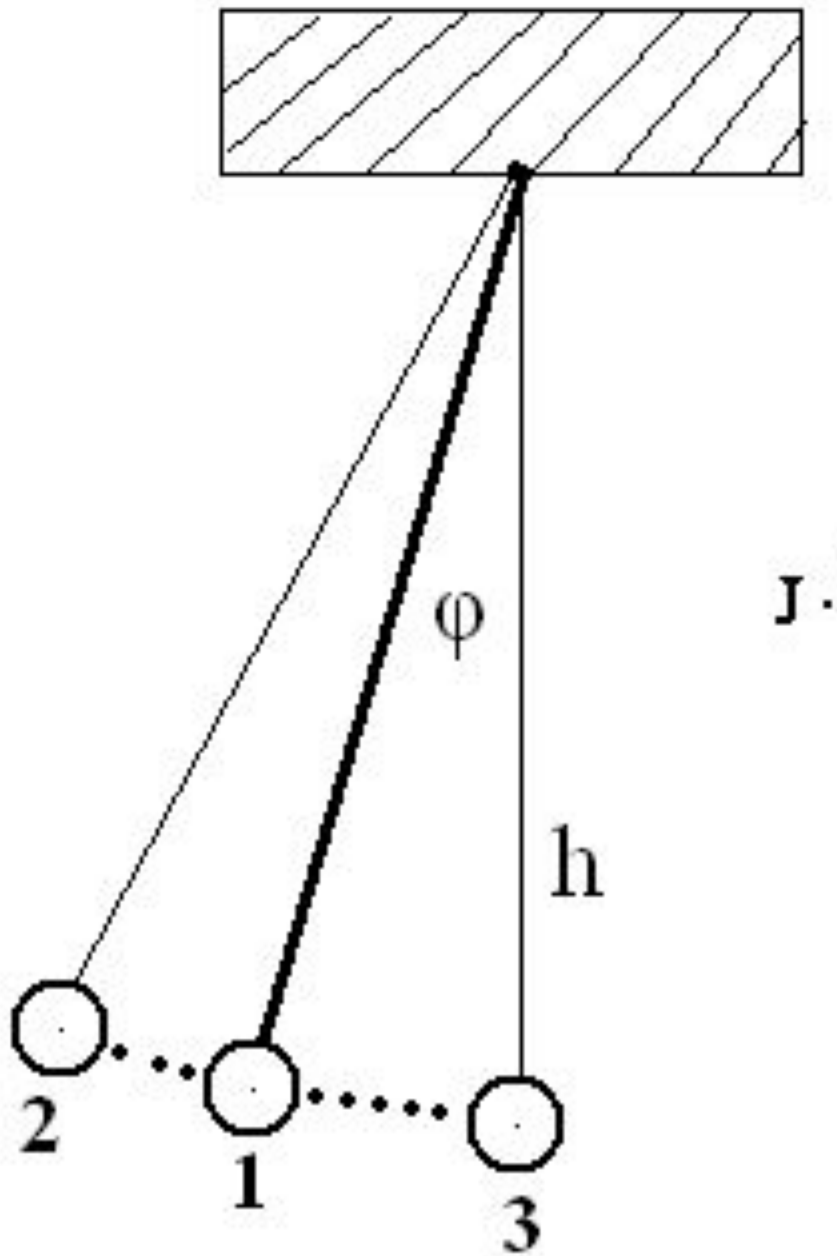
$$W(S) = \frac{K}{T_1^2 \cdot S^2 + T_2 \cdot S + 1}$$



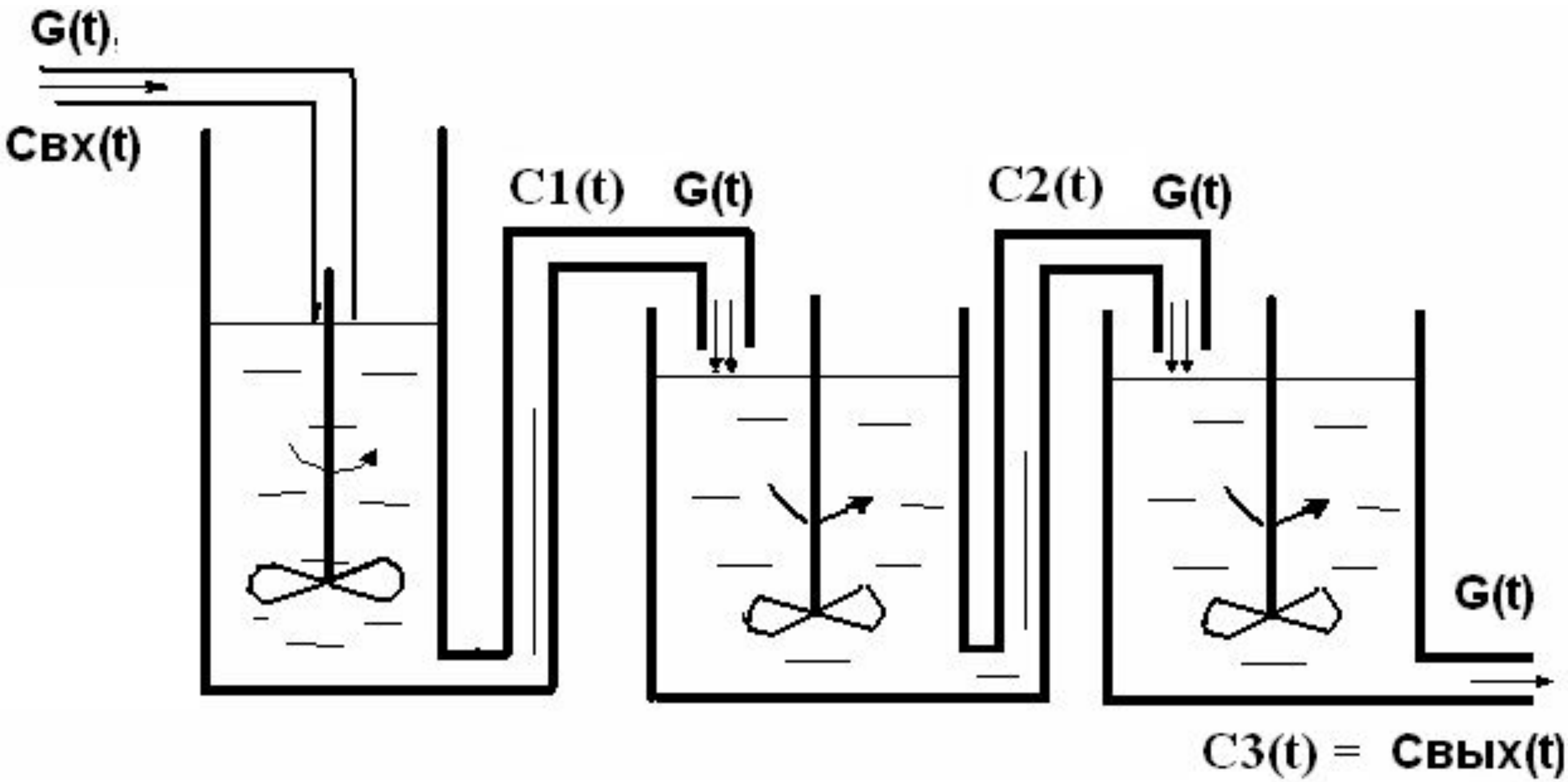
Пример построения переходного процесса в замкнутой системе

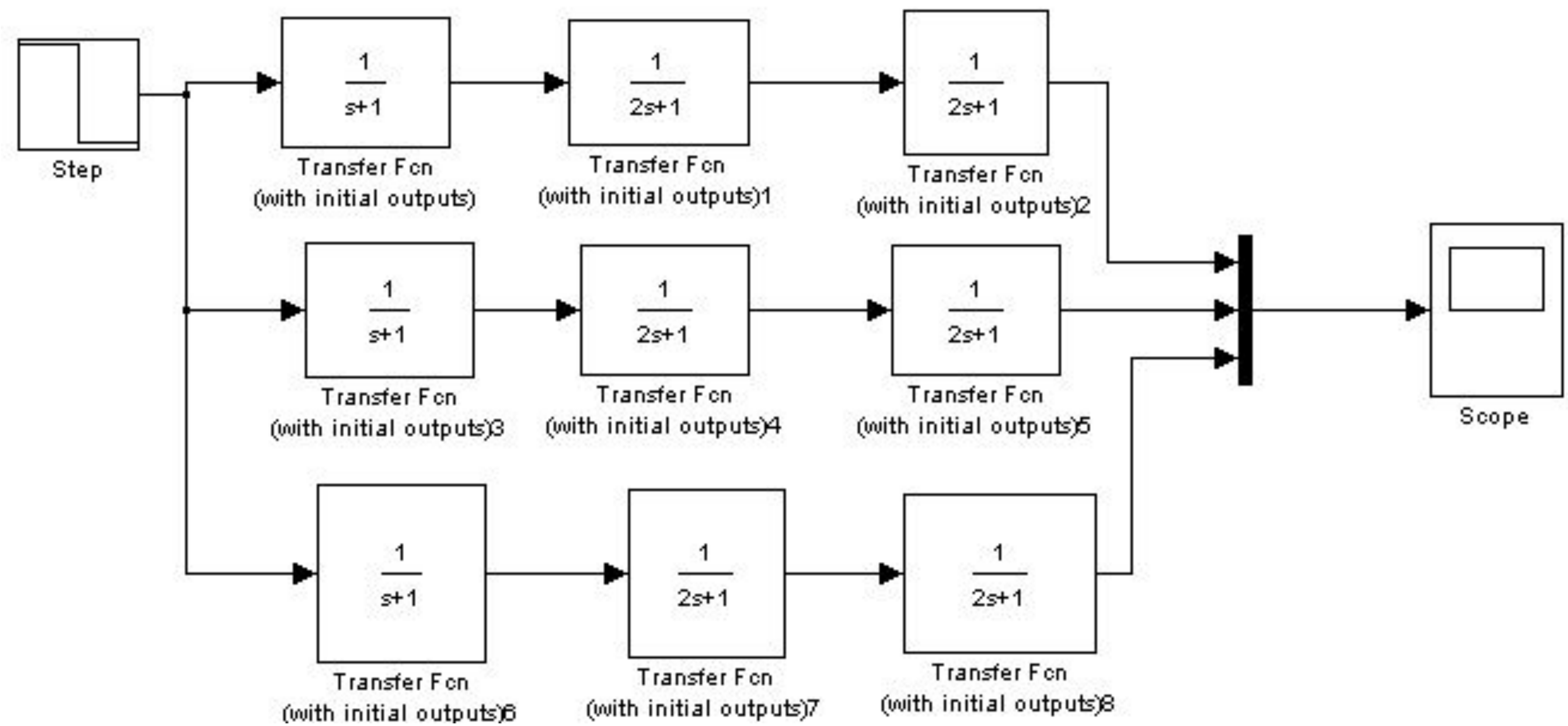



```
y[0]=0; e[0]=1; v[0]=0; z[0]=0.2; u[0]=0.2;
for ( i=1; i<N; i++)
{ e[i]=1-y[i-1];  v[i]=a11*v[i-1]+a21*e[i]+a31*e[i-1];
  z[i]=0.2*e[i];  u[i]=v[i]+z[i];
y[i]= a12*y[i-1]+a22*u[i]+a32*u[i-1];}
```

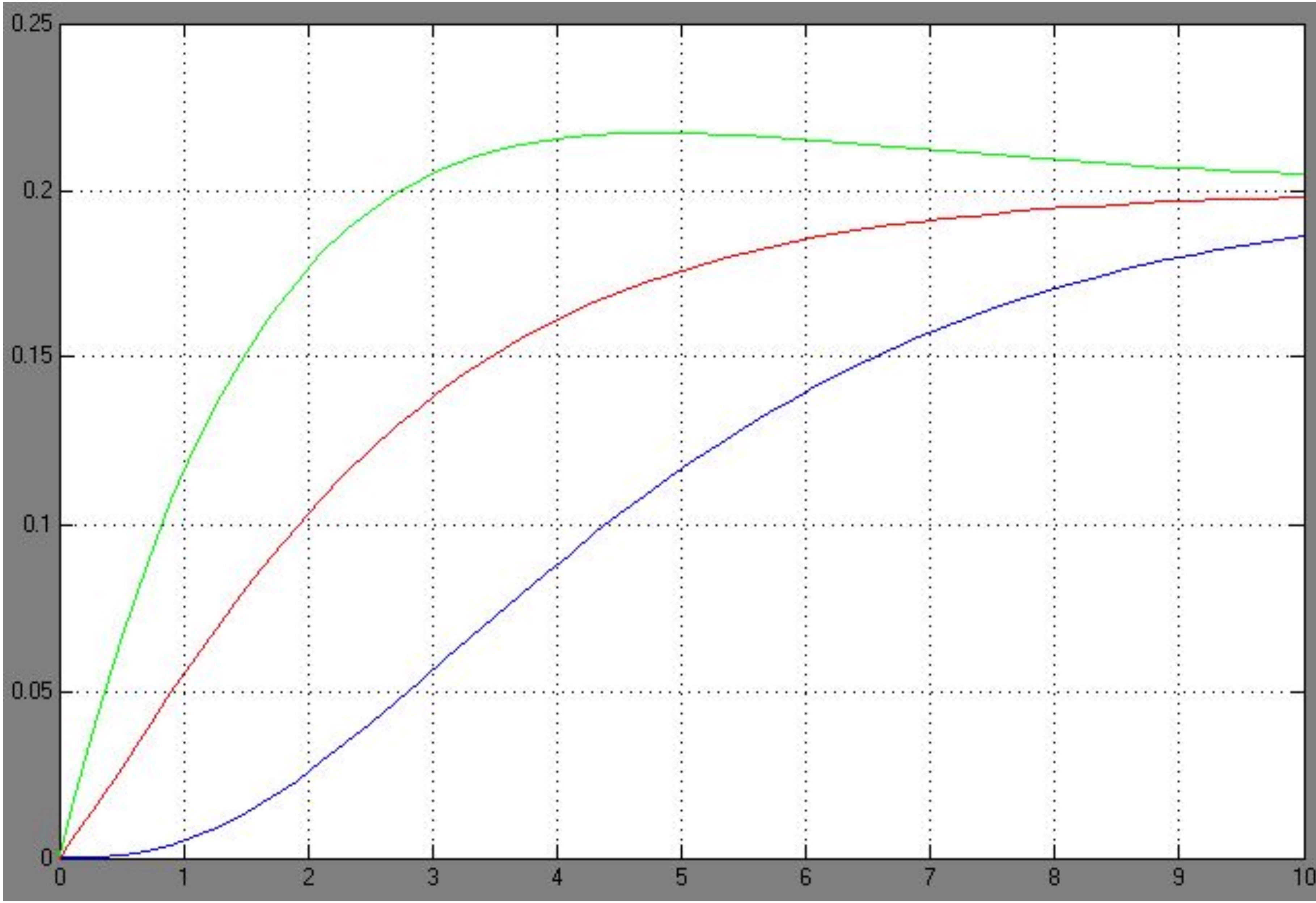


$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m \cdot g \cdot h \cdot \sin\varphi$$


G(t)
Свх(t)
C1(t)
G(t)
C2(t)
G(t)
G(t)
C3(t) = Свых(t)



Свх(t) = 0,2;   Свых(t) = 0.


0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Модель в пространстве состояний

Под *свободным движением* динамической системы будем понимать изменение ее выходов и внутреннего состояния под действием энергии, ранее запасенной системой.

Координатами состояния динамической системы назовем такой минимальный набор сигналов, характеризующих ее текущее состояние, знание которого позволяет однозначно прогнозировать дальнейшее свободное движение системы.

Пространство состояний – совокупность всех возможных наборов координат состояния.

Количество координат, необходимых для описания в пространстве состояний линейной динамической системы, совпадает с порядком n дифференциального уравнения, которым описывается система.

Координаты состояния

Координаты состояния могут быть выбраны различными способами и, соответственно, разными будут модели одной и той же системы в пространстве состояний. Описание в пространстве состояний считается выполненным, если:

- выбраны n координат состояния;
- записана система n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных координат состояния (так называемая нормальная форма Коши), которая описывает движение динамической системы;
- записаны уравнения связи координат состояния с выходами системы.

В исходном уравнении нет производных от входного сигнала

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b \cdot u(t),$$

где u(t) и y(t) – вход и выход динамической системы соответственно.

В качестве первой координаты $x_1(t)$ выберем выходной сигнал y(t). Каждая последующая координата состояния равна производной от предыдущей $x_{i+1}(t) = x'_i(t)$.

Тогда *система n уравнений, описывающих движение в пространстве состояний,* принимает следующий вид

$$x'_1(t) = x_2(t);$$
$$x'_2(t) = x_3(t);$$
$$\vdots$$
$$x'_{n-1}(t) = x_n(t);$$
$$x'_n(t) = -\frac{a_n}{a_0}x_1(t) - \frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(t) - \cdots - \frac{a_1}{a_0}x_n(t) + \frac{b}{a_0}u(t).$$

Связь координат состояния с выходом задается уравнением $y(t) = x_1(t)$.

В матричной форме модель системы в пространстве состояний имеет вид

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t);$$

$$Y(t) = C \cdot X(t),$$

где $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ - вектор координат состояния;

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \cdots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}$ - собственная матрица динамической системы;

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b}{a_0} \end{bmatrix}$ - вектор коэффициентов при управляющем воздействии;

$U(t) = u(t)$ – управляющее воздействие;

$Y(t) = y(t)$ – выход системы;

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ - вектор состава измерений.

Модель при наличии производных от входных сигналов

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 \cdot u^{(m)}(t) + \cdots + b_m \cdot u(t),$$

Перепишем уравнение в операторной форме

$$(a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \cdots + a_n) y(t) = (b_0 \cdot p^m + \cdots + b_m) u(t).$$

Обе части разделим на произведение операторов

$$(b_0 \cdot p^m + \cdots + b_m)^{-1} y(t) = (a_0 \cdot p^n + \cdots + a_n)^{-1} u(t) = x_1(t)$$

Тогда $u(t) = (a_0 \cdot p^n + \cdots + a_n) \cdot x_1(t)$

Каждая последующая координата состояния равна производной от предыдущей $x_{i+1}(t) = x'_i(t)$. **Тогда** ***система n уравнений, описывающих движение в пространстве состояний,*** **принимает следующий вид**

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_2(t); \\ x'_2(t) &= x_3(t); \\ &\vdots \\ x'_{n-1}(t) &= x_n(t); \end{aligned}$$

$$x'_n(t) = -\frac{a_n}{a_0} x_1(t) - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2(t) - \cdots - \frac{a_1}{a_0} x_n(t) + \frac{1}{a_0} u(t).$$

Связь выхода и координат состояния получим из уравнения

$y(t) = (b_0 \cdot p^m + \cdots + b_m) x_1(t)$, откуда

$y(t) = b_m \cdot x_1(t) + \cdots + b_0 \cdot x_1^m(t) = b_m \cdot x_1(t) + \cdots + b_0 \cdot x_{m+1}(t)$

В матричной форме

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t);$$
$$Y(t) = C \cdot X(t),$$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix}$ - вектор коэффициентов при управляющем воздействии;

$C = [b_m \; b_{m-1} \; \ldots \; b_0 \; 0 \; \ldots \; 0]$

Заметим, что в физически реализуемых системах $n \geq m$.

Пример 1

Уравнение объекта: $2 \cdot y''' + 4 \cdot y'' + 0.5 \cdot y' + 0.8 \cdot y = 6 \cdot u$.

$x_1 = y;\ \ x_2 = x_1' = y';\ \ x_3 = x_2' = y''$.

$2 \cdot x_3' + 4 \cdot x_3 + 0.5 \cdot x_2 + 0.8 \cdot x_1 = 6 \cdot u.$

Тогда уравнения движения объекта в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = x_3; \\ x_3' = -0.4 \cdot x_1 - 0.25 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 3 \cdot u. \end{cases}$$

Уравнение измерения: $y = x_1$.

В матричной форме $\begin{cases} X' = A \cdot X + B \cdot u; \\ Y = C \cdot X. \end{cases}$ **Где** $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ **;**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & -0.25 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Y = y.$$

Пример 2

Уравнение объекта:

$$2\cdot y''' + 4\cdot y'' + 0.5\cdot y' + 0.8\cdot y = 6\cdot u' - 2\cdot u.$$

$(2P^3 + 4P^2 + 0.5P + 0.8)y = (6P - 2)u$. **Обе части разделим на**

$(2P^3 + 4P^2 + 0.5P + 0.8)\cdot(6P - 2)$. **Получим**

$(6P - 2)^{-1}y = (2P^3 + 4P^2 + 0.5P + 0.8)^{-1}u = x_1;\ x_2 = x_1';\quad x_3 = x_2'.$

$2\cdot x_3' + 4\cdot x_3 + 0.5\cdot x_2 + 0.8\cdot x_1 = u.$

Тогда уравнения движения объекта в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = x_3; \\ x_3' = -0.4\cdot x_1 - 0.25\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 0.5\,u. \end{cases}$$

Уравнение измерения: $y = -2\cdot x_1 + 6\cdot x_2.$.

В матричной форме $\begin{cases} X' = A\cdot X + B\cdot u; \\ Y = C\cdot X. \end{cases}$ **Где** $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & -0.25 & -2 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \end{bmatrix};\quad Y = y.$$

Понятия наблюдаемости и управляемости

Динамическая система называется *наблюдаемой*, если найдется такой интервал времени $[t_н, t_k]$, что по результатам измерения вектора $Y(t)$ $t \in [t_н, t_k]$ можно однозначно восстановить значение вектора координат состояния $X(t_k)$.

Динамическая система называется *управляемой*, если при любом начальном значении вектора координат состояния $X(t_н)$ найдется интервал времени $[t_н, t_k]$ и управляющее воздействие $U(t)$ $t \in [t_н, t_k]$, переводящее динамическую систему в любое заданное конечное состояние $X(t_k)$.

Теоремы о наблюдаемости и управляемости

Динамическая система является наблюдаемой, если ранг *матрицы наблюдаемости*

$$M = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

равен n, где n – количество координат состояния.

Динамическая система является управляемой, если ранг *матрицы управляемости* $W = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & \cdots & A^{n-1} \cdot B \end{bmatrix}$ равен n.

Напомним, что рангом матрицы A (обозначается rang (A)) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Пример оценки управляемости и наблюдаемости

$$W(S) = \frac{2}{0.4S^2 + 3S + 1}.$$

$x_1(t) = y(t)$; $x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$.

$x'_1(t) = x_2(t)$;

$x'_2(t) = -2.5 \cdot x_1(t) - 7.5 \cdot x_2(t) + 5 \cdot u(t)$.

Уравнение измерения $y(t) = x_1(t)$.

$X'(t) = A \cdot X + B \cdot u$;

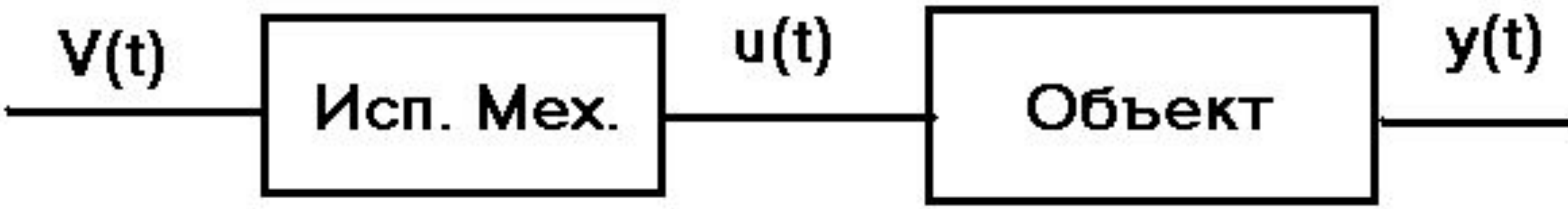
$Y(t) = C \cdot X$,

Где $X(t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.5 & -7.5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Матрицы наблюдаемости и управляемости соответственно равны

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $W = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -37.5 \end{bmatrix}$. rang M = rang W = 2,

следовательно, данная динамическая система наблюдаема и управляема.



$$W_{ОБ}(S) = \frac{0.5 \cdot S + 1}{S \cdot (5S + 2)} \qquad W_{ИМ}(S) = \frac{2}{4 \cdot S + 1}$$

Измеряется сигнал y(t)

Объект $5\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}=0{,}5\frac{du(t)}{dt}+u(t)$.

Исп. Мех. $4u'(t) + u(t) = 2v(t)$.

Перепишем уравнение объекта в операторной форме $(5p^2+2p)y(t)=(0{,}5p+1)\cdot u(t)$.

Разделив обе части на $(5p^2+2p)(0{,}5p+1)$

Получим

$$(0{,}5p+1)^{-1}y(t)=(5p^2+2p)^{-1}\cdot u(t)=x_1(t)$$

Введем обозначение $x_2(t)=x'_1(t)$

Выразим $u(t)$ через $x_1(t)$, $x_2(t)$

$u(t) = 2x'_1(t) + 5x''_1(t) = 2x_2(t) + 5x'_2(t)$,

откуда $x'_2(t) = -0{,}4x_2(t) + 0{,}2u(t)$

$$\begin{cases} x'_1(t)=x_2(t); \\ x'_2(t)=-0{,}4x_2(t)+0{,}2x_3(t); \\ x'_3(t)=-0{,}25x_3(t)+0{,}5V(t). \end{cases}$$

$$Y(t)=y(t)=x_1(t)+0{,}5x_2(t)$$

Если бы в системе измерялась величина y'(t), то уравнение наблюдения приняло бы вид

$$Y(t)=y'(t)=x_1'(t)+0{,}5x_2'(t)=x_2(t)+0{,}5(-0{,}4x_2(t)+0{,}2x_3(t))$$

$$=0{,}8x_2(t)+0{,}1x_3(t).$$

Перепишем и в матричной форме

$$\begin{cases} x'(t)=A\cdot x(t)+B\cdot v(t); \\ y(t)=C\cdot x(t) \end{cases}$$

где $x'(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & -0{,}25 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$;

$C=[1 \quad 0{,}5 \quad 0]$; **Y(t)=y(t).**

Запишем матрицу наблюдаемости

$$M=\begin{bmatrix} C \\ C\cdot A \\ C\cdot A^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}32 & \mathbf{0{,}135} \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы М равен
det (M)= $0,8 \cdot 0,135 + 0,32 \cdot 0,1 \neq 0$

Следовательно, rang (M)=3, система наблюдаема.

Запишем матрицу управляемости

$$W = \begin{bmatrix} B & A \cdot B & \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}065 \\ 0{,}5 & -0{,}125 & 0{,}03125 \end{bmatrix}$$

det (W)= $-0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \neq 0$
Следовательно, rang (W)=3.

Система управляема.

Если в системе измеряется сигнал $y'(t)$, то уравнение измерения принимает вид:

$$Y(t) = 0.8 \cdot x_2(t) + 0.1 \cdot x_3(t). \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Матрица наблюдаемости $M = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & -0.32 & 0.135 \\ 0 & 0.128 & -0.0978 \end{bmatrix}.$

det (M) = 0. СИСТЕМА НЕНАБЛЮДАЕМА.

Если в системе измеряется два сигнала: y(t) и y′(t), то уравнения измерения принимают вид:

$$Y(t) = \begin{cases} y(t) = x_1(t) + 0.5 \cdot x_2(t); \\ y'(t) = 0.8 \cdot x_2(t) + 0.1 \cdot x_3(t). \end{cases} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Матрица наблюдаемости

$$M = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & -0.32 & 0.135 \\ 0 & -0.32 & 0.135 \\ 0 & 0.128 & -0.0978 \end{array}\right] \begin{array}{l} * \\ \\ ** \\ \\ *** \\ \\ \end{array}$$

Отмеченный минор 3-го порядка равен
1*0.8*0.135 + 1*0.1*0.32 ≠ 0. СИСТЕМА НАБЛЮДАЕМА