

# БИХРОМАТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

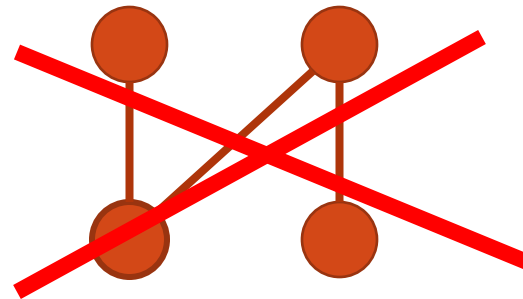
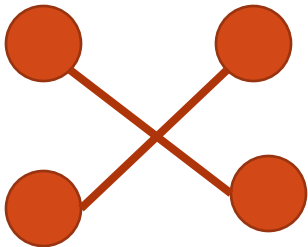
Лекция 3

# Обозначения и определения

- $X$  – множество вершин неориентированного графа  $G(X, U)$ ;
- $X' \subset X$  – «левое» подмножество вершин;
- $X'' \subset X$  – «правое» подмножество вершин ( $X' + X'' = X$ );
- $U$  – множество ребер графа  $G(X, U)$ ;
- $r(i, j)$  – вес ребра  $(i, j) \in U$ .
- **Содержательная постановка задачи о максимальном паросочетании:** На множестве ребер  $U$  графа  $G(X, U)$  выделить подмножество  $U' \subset U$ , такое, что:
  - существует не более одного ребра, принадлежащего  $U'$  и инцидентного одной вершине подмножества  $X'$ ;
  - существует не более одного ребра принадлежащего  $U'$  и инцидентного одной вершине подмножества  $X''$ ;
  - мощность множества  $U'$  максимальна.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРСОЧЕТАНИЯ

- Подмножество  $U'$  ребер называется *паросочетанием*, если любые два ребра из него не имеют общей вершины.



## поиска максимального паросочетания

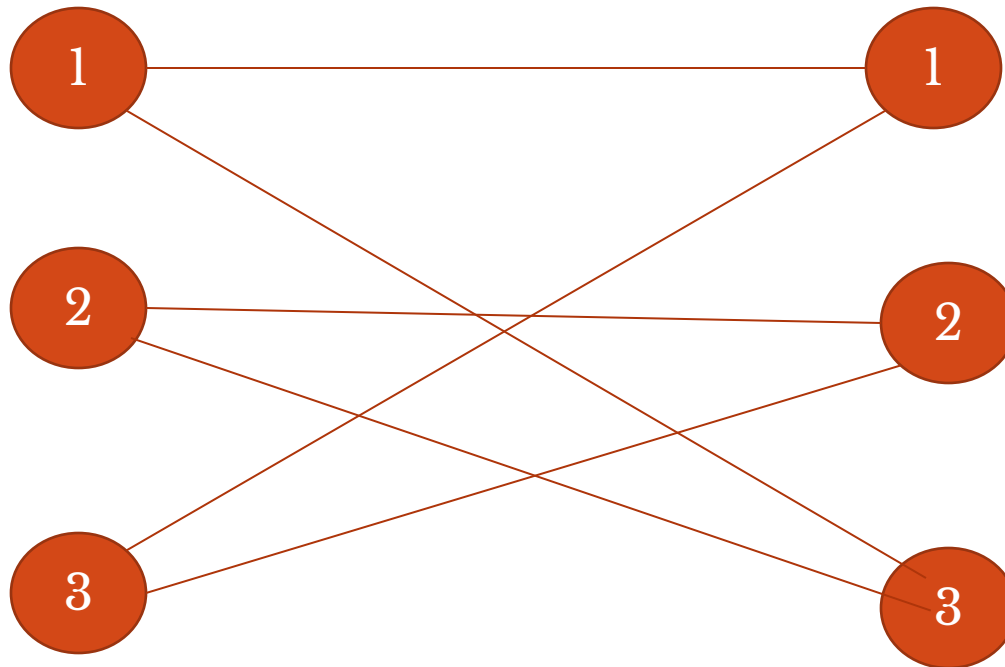
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y(i, j) \rightarrow \max; \quad \text{- целевая функция;} \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right.$$

где:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(i, j) = 1 \Rightarrow (i, j) \in U'; \\ y(i, j) = 0 \Rightarrow (i, j) \notin U'. \end{array} \right.$$

# САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Выделить на двудольном графе  $G(X,U)$  максимальное паросочетание :



# Задача о назначениях – минимизация затрат

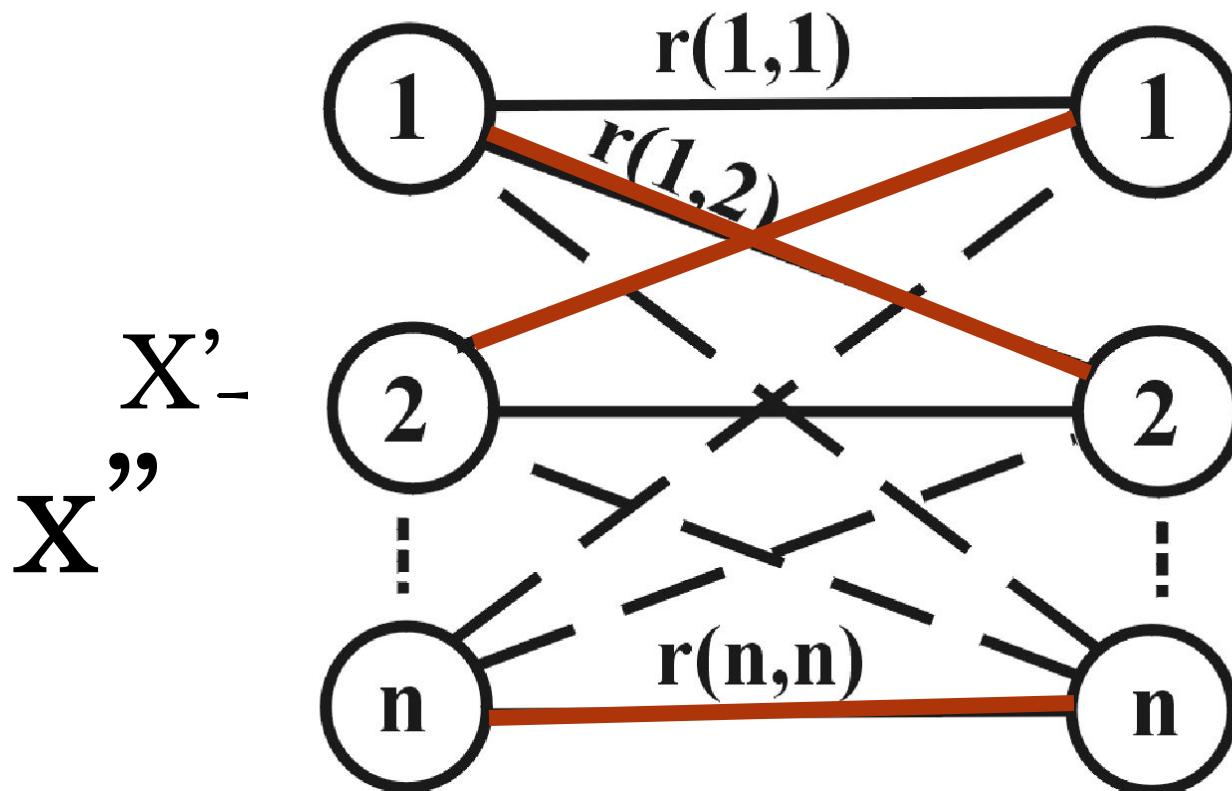
Заданы  $n$  работ и  $n$  рабочих, причем известна стоимость  $r(i, j)$  выполнения  $i$ -м рабочим  $j$ -й работы. Требуется распределить работы между рабочими т.о., чтобы:

1. Все работы были выполнены;
2. Все рабочие были заняты;
3. Суммарные задачи на выполнение всего цикла работ были минимальны.

# ГРАФИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ

Рабочие

Работы



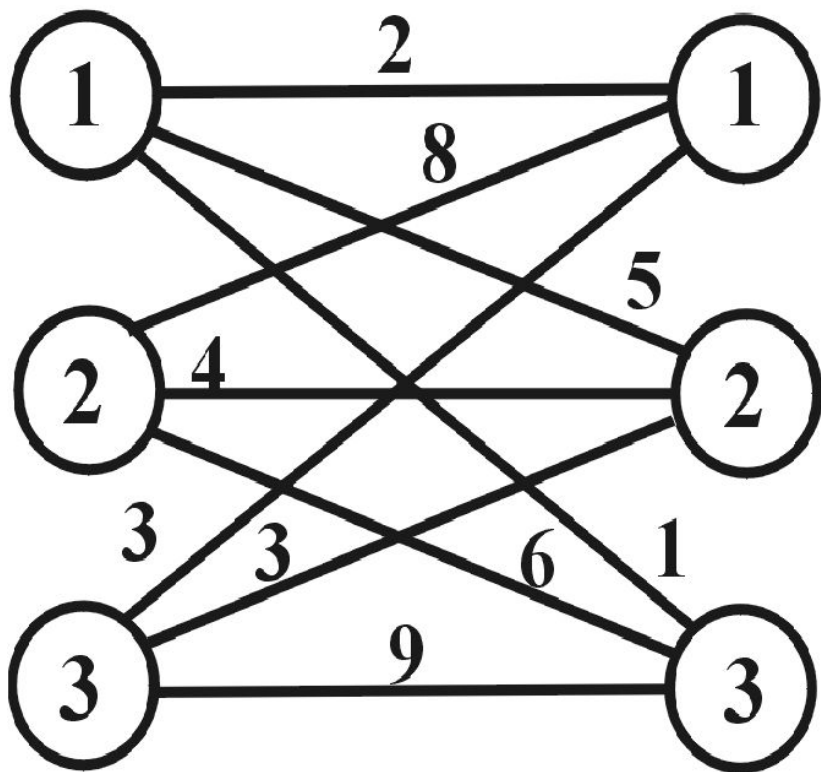
# Формальная постановка задачи минимизации затрат

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i, j) y(i, j) \rightarrow \min; \text{ - целевая функция - минимизация затрат;} \\ \sum_{i=1}^n y(i, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие выполнения всех работ;} \\ \sum_{j=1}^n y(i, j) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \text{ - условие загрузки всех рабочих;} \\ y(i, j) = 1, 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ - дискретность переменных} \end{array} \right.$$

**Примечание:** если  $i$ -й рабочий не может делать  $j$ -ю работу, то  $r(i, j) = \infty$



# Форма представления исходных данных (пример для случая $n=3$ )



	1	2	3
1	2	5	1
2	8	4	6
3	3	3	9

# Алгоритм поиска решения задачи

- Шаг 1.  $i = 1$
- Шаг 2. В  $i$  – ой строке матрицы  $M$  выбирается элемент, вес которого равен  $Q = \min M(i,j)$  и уменьшаем вес каждого элемента этой строки на  $Q$ .
- Шаг 3.  $i = i + 1$
- Шаг 4. Если  $i > n$ , то перейти к Шагу 5, нет к Шагу 2.
- Шаг 5.  $j = 1$
- Шаг 6. В  $j$  –ом столбце матрицы  $M$  выбирается элемент, вес которого равен  $D = \min M(i,j)$ .
- Шаг 7. Вес каждого элемента  $j$  –го столбца уменьшается на величину  $D$ .

# Алгоритм поиска решения задачи (продолжение)

- Шаг 8.  $j=j+1$ .
- Шаг 9. Если  $j>n$ , то перейти к Шагу 10, нет - к Шагу 6.
- Шаг 10. Нули матрицы вычеркиваются **минимальным** числом линий  $L$ , проводимых по строкам и столбцам матрицы.
- Шаг 11. Если  $L = n$ , то перейти к Шагу 14, в противном случае – к Шагу 12.
- Шаг 12. На множестве **неперечеркнутых** элементов матрицы  $M$  выбирается тот, вес которого **минимален** и равен  $W$ .
- Шаг 13. Вес **неперечеркнутых** элементов матрицы **уменьшаем** на  $W$ , а **перечеркнутых** дважды – **увеличиваем** на  $W$ . Перейти к Шагу 8.
- Шаг 14. Конец алгоритма. На множестве нулей полученной матрицы есть оптимальное назначение.

# Пример (n=5)

	1	2	3	4	5
1	1	4	6	9	5
2	2	5	7	6	9
3	3	10	13	7	8
4	4	11	9	11	12
5	7	8	10	8	9

Рис. 1



1	4	6	9	5
2	5	7	6	9
3	10	13	7	8
4	11	9	11	12
7	8	10	8	9

Рис. 2

$Q_1 = 1$

$Q_2 = 2$

$Q_3 = 3$

$Q_4 = 4$

$Q_5 = 7$



0	3	5	8	4
0	3	5	4	7
0	7	10	4	5
0	7	5	7	8
0	1	3	1	2

0 1 3 1 2

Рис. 3

0	2	2	7	2
0	2	2	3	5
0	6	7	3	3
0	6	2	6	6
0	0	0	0	0

Рис. 4

$L = 2$

$W = 2$



0	0	0	5	0
0	0	0	1	3
0	4	5	1	1
0	4	0	4	4
2	0	0	0	0

Рис. 5

$L = 5$



1	4	6	9	5
2	5	7	6	9
3	10	13	7	8
4	11	9	11	12
7	8	10	8	9

Рис. 6

$$R = 5 + 5 + 3 + 9 + 8 = 30$$

# РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

3	7	5	9	3	7	12
8	2	12	31	7	8	9
9	14	1	3	2	4	6
6	$\infty$	15	8	6	7	16
11	3	9	7	8	10	11
4	14	$\infty$	6	$\infty$	9	5
5	6	7	10	9	4	$\infty$

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей М:

№1						№2					
15	16	10	12	16	13	8	12	11	12	16	13
14	17	20	15	$\infty$	8	15	14	10	14	$\infty$	8
11	10	19	14	7	$\infty$	12	20	13	12	7	11
13	14	13	12	19	9	10	24	13	18	10	9
15	10	17	20	13	12	17	$\infty$	17	9	13	14
12	18	10	9	15	14	11	8	10	19	15	16

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей M:

№3

7	7	11	2	16	3
17	3	8	14	20	8
10	8	7	3	17	10
12	4	3	9	8	9
6	8	7	10	12	14
13	8	11	9	5	3

№4

9	15	11	12	16	13
5	12	10	4	$\infty$	19
10	$\infty$	6	4	17	12
2	14	3	18	7	18
15	10	18	16	11	5
3	18	14	19	15	12

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей М:

№5

№6

1	0	10	2	6	3
0	9	0	4	0	8
10	0	2	13	7	0
2	4	13	8	0	9
6	0	7	0	3	15
3	8	0	9	15	7

6	5	1	12	6	13
5	5	0	4	0	8
1	0	3	3	7	4
12	4	3	9	0	9
6	0	7	0	2	5
13	8	4	9	5	7



# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей М:

№7

9	25	11	22	16	3
15	8	20	14	0	8
10	10	17	13	9	10
12	14	3	6	20	9
6	0	7	18	15	5
13	8	17	19	15	4

№8

13	20	12	12	14	13
10	22	10	24	$\infty$	8
11	20	12	$\infty$	7	20
9	14	3	4	20	19
18	$\infty$	$\infty$	10	35	15
7	18	30	19	15	10

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей  $M$  :

№9

10	12	11	2	16	13
13	11	0	14	0	8
12	0	12	13	17	0
12	4	7	13	10	9
17	0	16	11	14	15
14	18	0	9	12	13

№10

10	15	11	12	16	14
5	7	10	14	10	15
21	10	8	3	7	11
22	9	13	9	19	9
26	0	17	20	11	12
10	25	10	9	2	12

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей М :

№11

21	15	22	33	16	23
25	24	10	24	0	28
21	20	20	33	27	20
32	24	23	20	30	29
26	30	27	10	30	25
33	28	40	29	35	40

№12

18	3	10	12	6	9
13	10	10	4	10	8
10	20	7	3	7	10
2	4	3	2	30	6
6	10	7	10	9	5
0	8	20	6	5	4

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей  $M$  :

№13

9	10	11	12	16	13
0	3	5	4	10	8
1	0	8	3	7	0
2	14	3	4	10	11
6	7	17	9	7	15
3	18	0	10	5	5

№14

30	35	31	32	36	43
25	40	40	34	30	38
40	30	20	33	37	20
22	34	33	25	10	39
36	10	37	30	32	35
33	38	20	39	45	37

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей  $M$  :

№15

12	13	11	20	16	14
14	10	10	14	12	17
10	20	19	13	17	9
11	14	13	11	17	19
15	20	18	14	18	12
13	15	10	17	16	13

№16

19	15	21	22	26	23
15	20	9	4	7	8
25	10	30	13	41	20
22	14	3	14	12	19
26	9	45	6	32	35
23	18	10	19	30	20

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей M:

№17

15	14	11	12	10	13
4	16	0	14	0	18
13	0	15	13	12	11
22	4	3	17	0	14
10	7	9	0	13	25
14	28	0	12	5	8

№18

10	25	0	12	16	0
5	8	0	5	0	4
0	0	6	3	7	0
12	14	3	2	0	19
9	0	47	0	10	15
0	14	0	9	15	11

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей  $M$  :

№19

40	45	51	42	36	33
45	30	0	34	0	38
51	0	35	43	27	0
42	34	43	49	0	39
36	0	27	0	40	35
33	38	0	39	35	37

№20

10	1	17	12	4	13
12	7	0	5	0	18
11	0	8	13	6	0
12	4	3	9	0	2
14	0	16	0	17	14
13	8	0	12	4	15

# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей  $M$  :

№21

6	5	1	12	6	3
5	2	0	4	0	4
11	0	8	3	17	0
2	14	3	9	20	5
6	0	7	0	4	5
3	14	10	5	15	2

№22

10	8	9	22	12	9
18	20	0	14	0	8
19	0	10	23	27	0
12	4	23	8	0	9
2	0	27	0	6	15
3	17	0	19	15	17



# Задания к контрольной работе:

Решить задачу о назначениях, заданную матрицей М:

№23

9	5	1	2	6	4
5	2	0	14	0	5
1	0	8	3	7	10
2	4	3	10	0	7
6	0	6	0	12	5
3	4	0	5	5	7

№24

11	15	11	2	6	3
5	10	17	4	9	4
1	10	2	3	7	20
2	14	13	8	12	25
6	10	4	10	9	8
7	14	10	5	5	3