Лекция 5

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже знаем, при расчете статически неопределимых систем методом сил исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются силы (усилия) в этих связях.

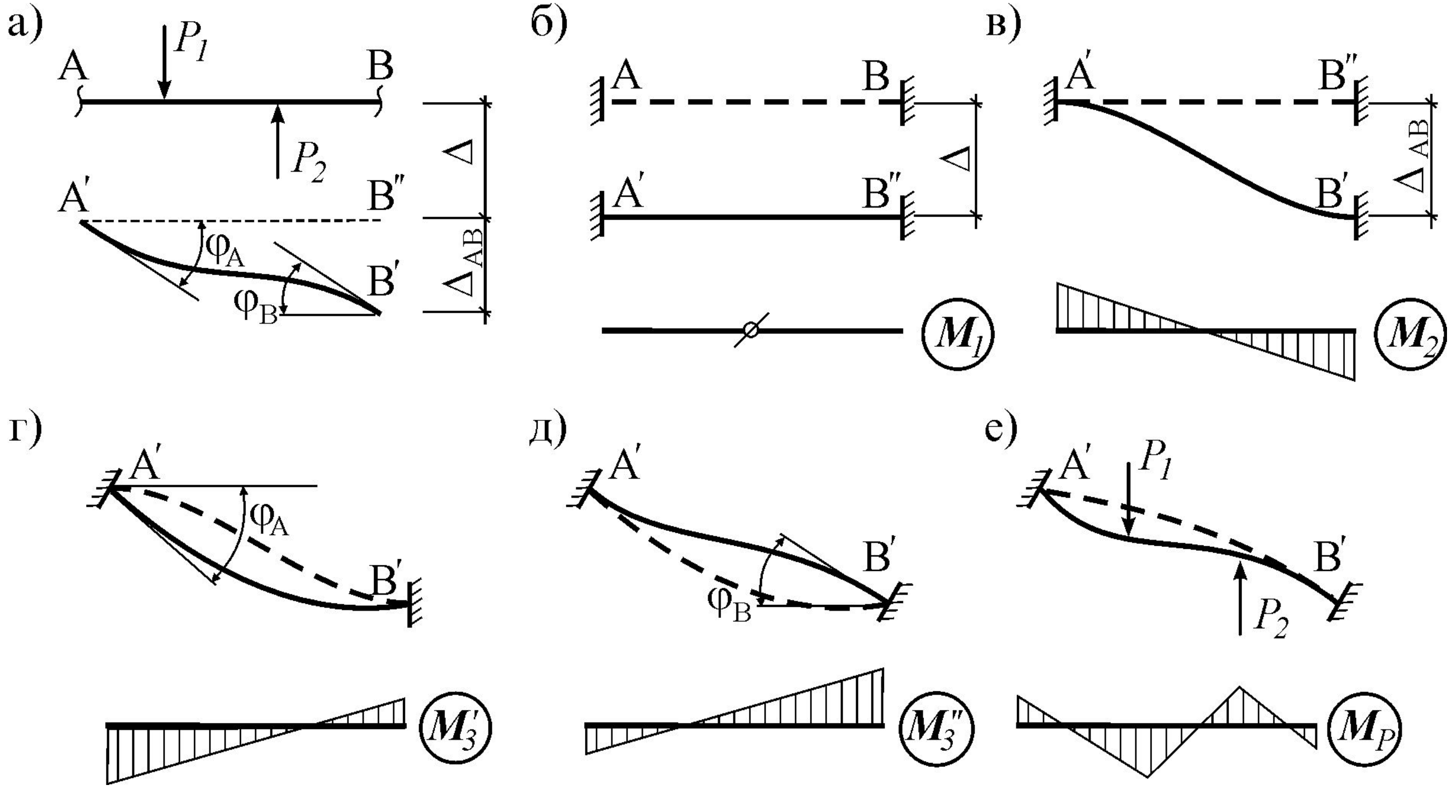
После их определения из канонических уравнений, определяются все остальные усилия, а также перемещения, напряжения и деформации, т.е. полное напряженно-деформированное состояние (НДС) системы.

НДС статически неопределимых систем можно устанавливать и по-другому. Для этого в систему вводятся дополнительные связи, а за неизвестные принимаются перемещения во введенных связях.

Такой метод называется ***методом перемещений***.

1. Неизвестные метода перемещений

Определим минимальное число узловых перемещений, необходимых для определения НДС стержневой системы. Для этого установим простейшие деформации стержня *AB* для его перевода в деформированное состояние *A’B’* (рис. а). Задача упрощается, если стержень закрепить по обоим концам.



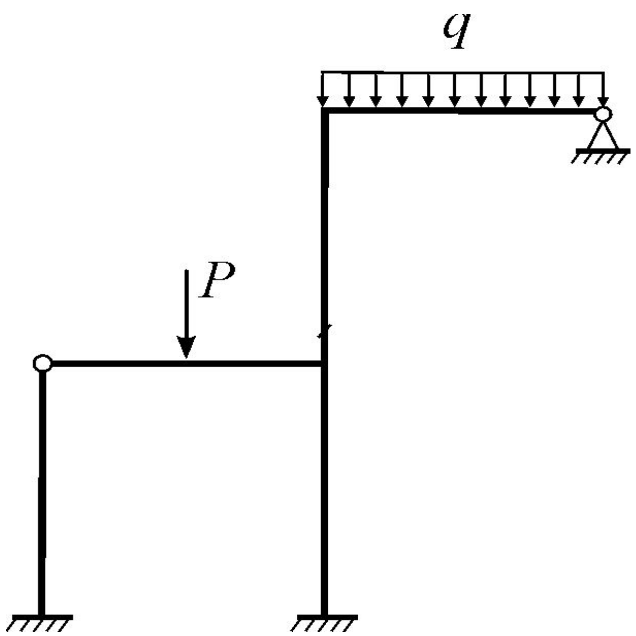
Из рисунков видно, что для того чтобы деформации закрепленного по концам стержня были такими же как у незакрепленного, его концам следует последовательно задавать линейные перемещения Δ и Δ_{AB} (рис. б, в), угловые перемещения φ_A и φ_B (рис. г, д), а внутри стержня приложить внешнюю нагрузку (рис. е).

Анализ показывает, что:

для определения НДС любого стержня достаточно знать три его перемещения – двух угловых перемещений его концов φ_A и φ_B и одного линейного перемещения (взаимного смещения концов) Δ_{AB}.

2. Выбор основной системы

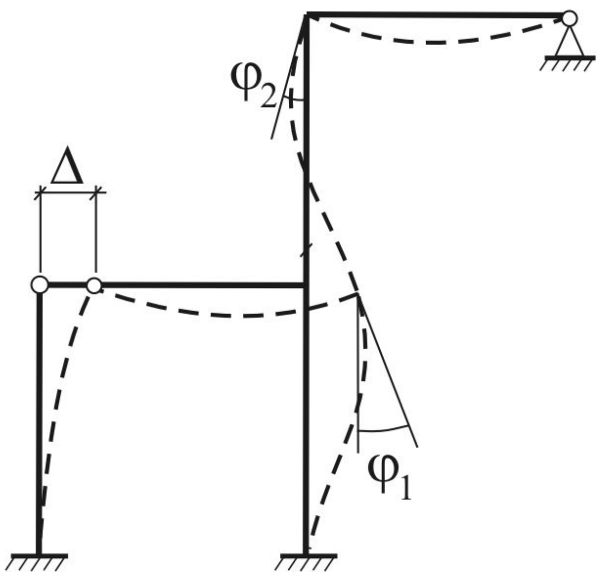
Для получения основной системы (ОС) из заданной системы (ЗС) по методу перемещений, в нее следует ввести дополнительные связи, чтобы исключить перемещения концов всех ее стержней. Например, для рамы из пяти стержней их число будет равно *5·3=15*.



Это число можно уменьшить, если **примем гипотезы**:

1. Поперечные и продольные деформации стержней малы;
2. В упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

Тогда в рассмотренной раме достаточно будет знать только три перемещения – поступательное перемещение *Δ* и угловые перемещения φ_1 и φ_2:

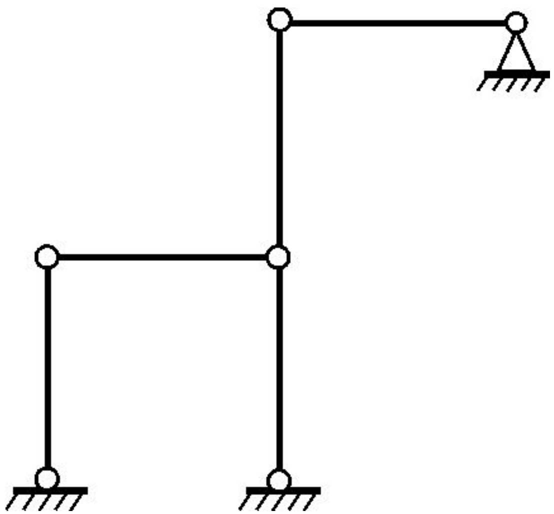


Таким образом, принятые гипотезы позволили уменьшить число неизвестных перемещений с 15 до 3.

Из 2-ой гипотезы следует, что число неизвестных угловых перемещений будет определяться по формуле:

n_y = ***числу упругих рамных узлов.***

Для определения числа неизвестных поступательных (линейных) перемещений во все узлы рамы (включая и опоры) нужно ввести шарниры.



Тогда число линейных перемещений можно определить по известной формуле кинематического анализа для фермы:

$$n_л = W = 2n_У - n_С - n_{С_0}.$$

В рассматриваемой раме:

$n_л = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1.$

Общее число всех неизвестных определяется по формуле

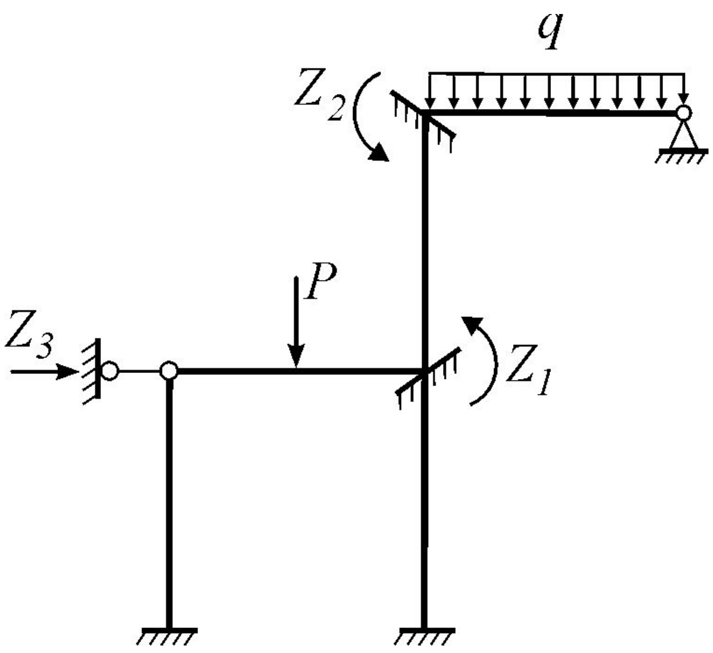
$$n = n_у + n_л .$$

Оно называется ***степенью кинематической неопределимости***.

Неизвестные перемещения обозначаются $Z_1, Z_2, ..., Z_n$.

После определения числа неизвестных, в ЗС вводятся столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней.

Например, в рассмотренную раму вводятся две заделки и одна опорная связь:



Полученная схема называется ***основной системой*** (***ОС***) метода перемещений.

Для получения ОС метода перемещений необходимо:

– ввести в упругие узлы ЗС $n_у$ заделок;

– ввести $n_л$ опорных связей в направлениях линейных перемещений узлов (для того чтобы система с введенными шарнирами стала ГНС).

Эти введенные связи отличаются от обычных связей:

1) введенная заделка исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность его линейного перемещения;

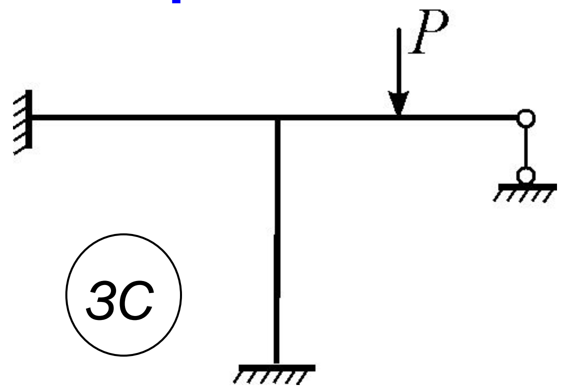
2) введенная опорная связь исключает только линейное перемещение узла, оставляя возможность его поворота.

При соблюдении этих требований ОС метода перемещений является единственной.

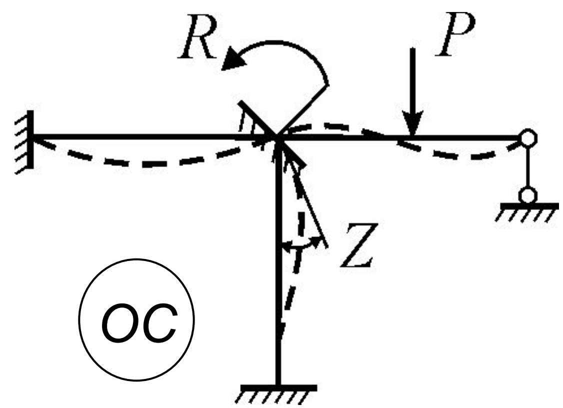
3. Сущность метода перемещений

При расчете этой рамы по МП имеем:

$n = n_у + n_л = 1 + 0 = 1.$



Выберем основную систему, вводя заделку в упругом узле:

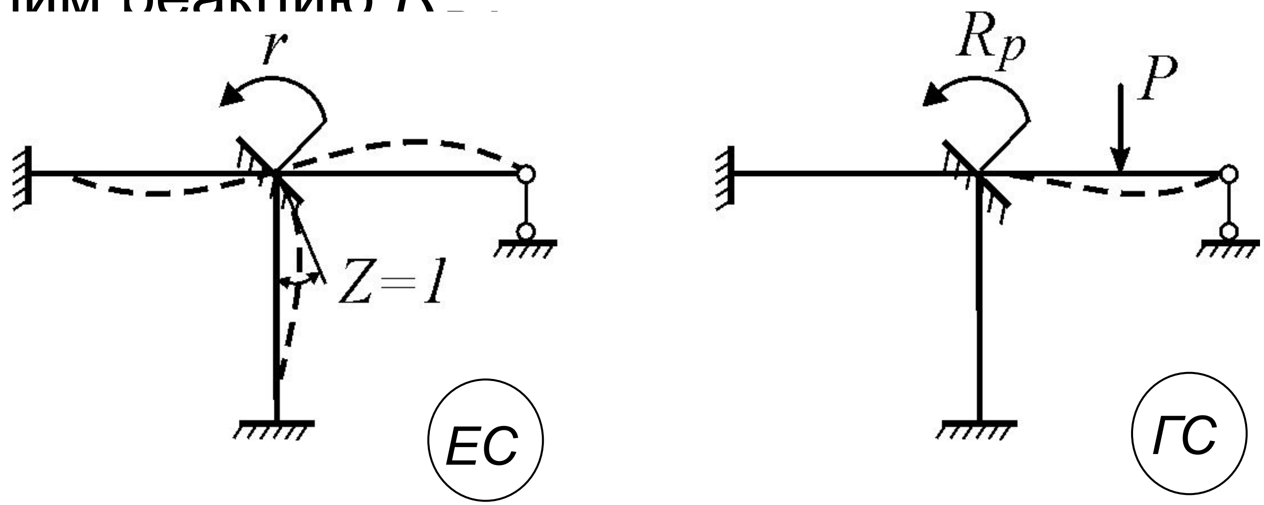


Потребуем, чтобы усилия в ОС были как и в ЗС, т.е. чтобы реактивный момент во введенной заделке равнялась нулю, т.е. ***R=0.***

При этом реакцию *R* определим рассматривая единичное и грузовое состояния основной системы.

В единичном состоянии (ЕС) в направлении введенной связи зададим единичное перемещение *Z=1* и определим возникающую реакцию *r*. Она называется **жесткостью**.

В грузовом состоянии (ГС) во введенной связи определим реакцию R_P :



С учетом упругости системы и принципа суперпозиции, наше уравнение приводится к виду

$$R = r \cdot Z + R_P = 0.$$

Оно называется ***каноническим уравнением метода перемещений***. Из него находим узловое перемещение

$$Z = -R_P / r.$$

Если степень кинематической неопределимости стержневой системы равна *n*, ее ОС получается введением *n* дополнительных связей с неизвестными Z_1, Z_2, …, Z_n.

Чтобы ОС была эквивалентна ЗС, реакции во введенных связях должны равняться нулю. С учетом этого можно записать *n* условий эквивалентности.

После рассмотрения *n* единичных состояний и одного грузового состояния и дальнейшего определения реакций (реактивных усилий) во всех состояниях, эти *n* уравнений приводятся к виду:

$$
\begin{aligned}
&r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + R_{1P} = 0,\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + R_{nP} = 0.
\end{aligned}
$$

Все вместе они называются ***системой канонических уравнений метода перемещений***.

Здесь r_{ii} – главные коэффициенты, r_{ij} – боковые коэффициенты. Свободные члены R_{iP} называются грузовыми коэффициентами.

4. Элементарные состояния основной системы

Коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений – реакции, возникающие во введенных связях в единичных и грузовом состояниях.

Их физический смысл:

r_{ij} – реакция в *i*-ой связи в *j*-ом единичном состоянии,

R_{iP} – реакция в *i*-ой связи в грузовом состоянии.

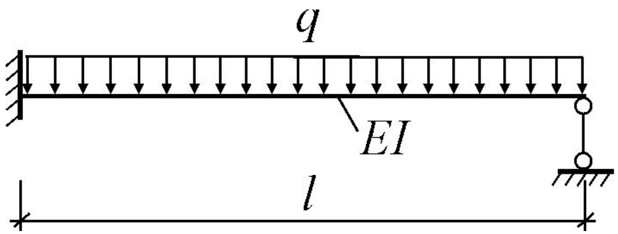
Все эти реакции равны сумме реакций отдельных стержней, объединяемых в узлах. Для их определения необходимо рассчитывать статически неопределимые стержни различной длины и жесткости с различными закреплениями по концам, получающих различные перемещения или нагруженных различными силами.

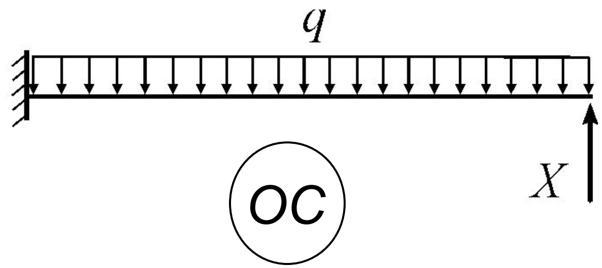
С целью упрощения расчетов, основные типы часто встречающихся задач решаются для общего случая. Такие простейшие задачи называются элементарными состояниями основной системы (ОС), а результаты их расчета сводятся в единую таблицу.

В подавляющем большинстве случаев эти задачи бывают статически неопределимыми, Поэтому они решаются методом сил.

Рассмотрим решение типовой задачи.

Стержень с равномерно распределенной нагрузкой

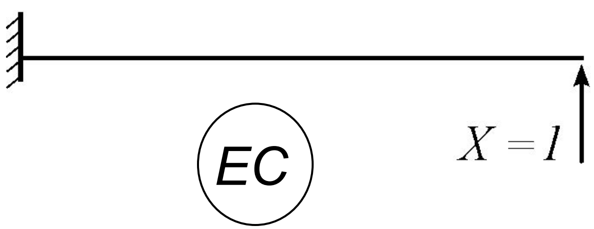


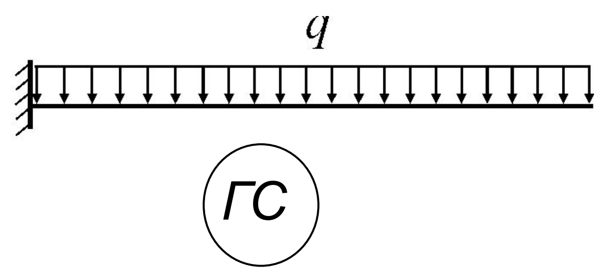


Степень статической неопределимости системы *n=1*.

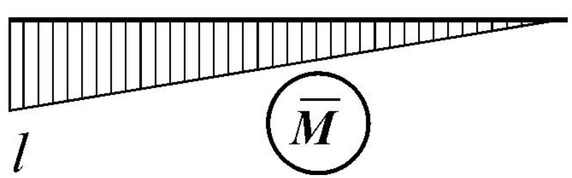
Каноническое уравнение имеет вид $\delta X + \Delta_P = 0$.

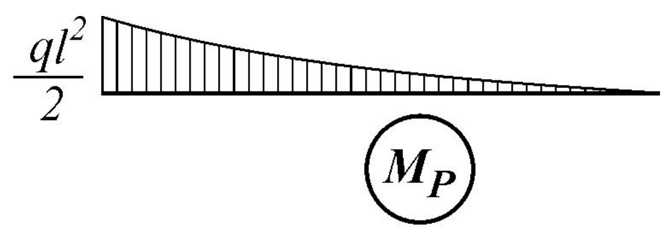
Рассмотрим единичное и грузовое состояния ОС:





В этих состояниях построим единичную и грузовую эпюры:





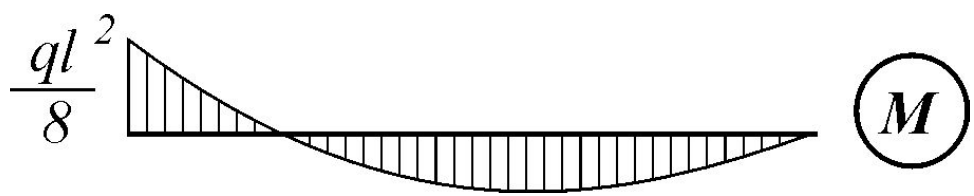
Определим коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta = \overline{M}^2 = \frac{l^3}{3EI}, \quad \Delta_P = \overline{M} \otimes M_P = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

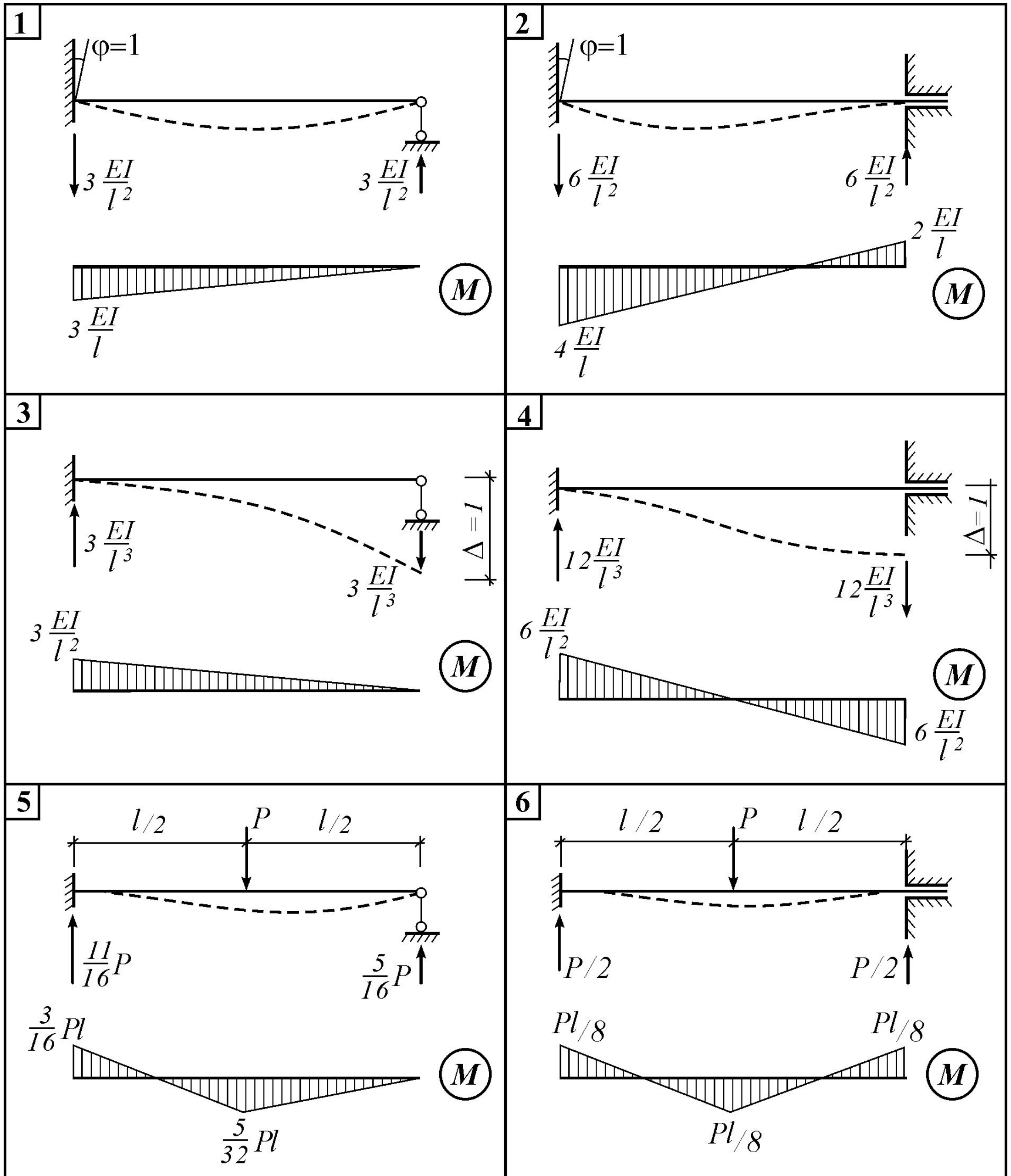
Вычислим неизвестную реакцию:

$$R_B = X = -\frac{\Delta_P}{\delta} = \frac{3}{8}ql.$$

По формуле $M = \overline{M} \cdot X + M_P$ получаем окончательную эпюру изгибающих моментов:



Аналогичные расчеты проводятся для всех типовых случаев и представляются в виде таблицы:


1
φ=1
3 EI/l²
3 EI/l²
3 EI/l
M
2
φ=1
6 EI/l²
6 EI/l²
2 EI/l
4 EI/l
M
3
Δ=1
3 EI/l³
3 EI/l³
3 EI/l²
M
4
Δ=1
12 EI/l³
12 EI/l³
6 EI/l²
6 EI/l²
M
5
l/2
P
l/2
11/16 P
5/16 P
3/16 Pl
5/32 Pl
M
6
l /2
P
l /2
P/2
P/2
Pl/8
Pl/8
Pl/8
M

5. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты канонических уравнений МП можно определять статическим или кинематическим способами.

Статический способ основан на определении реакций во введенных связях основной системы из уравнений статики. Для этого необходимо вырезать отдельные узлы или части основной системы и составлять уравнения равновесия (статики):

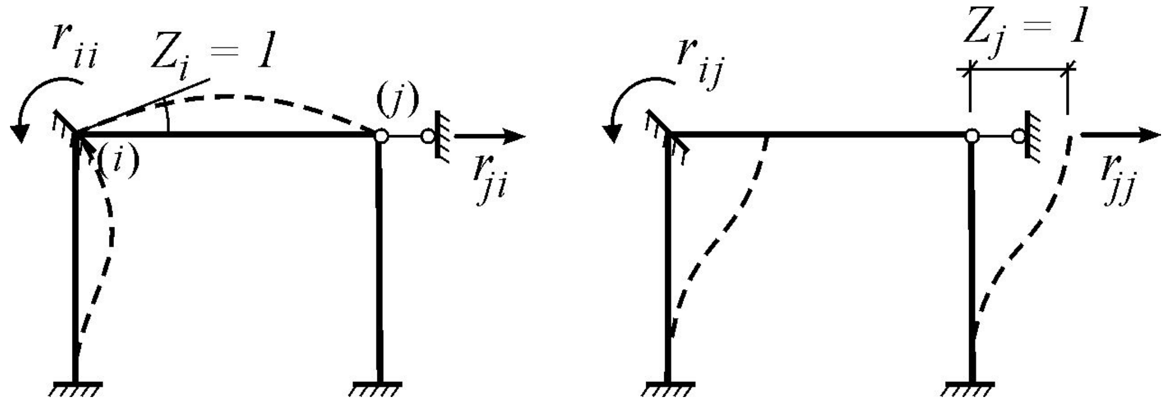
− если искомая реакция является реактивным моментом, то она определяется из условия равенства нулю момента в узле;

− если реакция является реактивной силой, то определяется из уравнения проекции на ось.

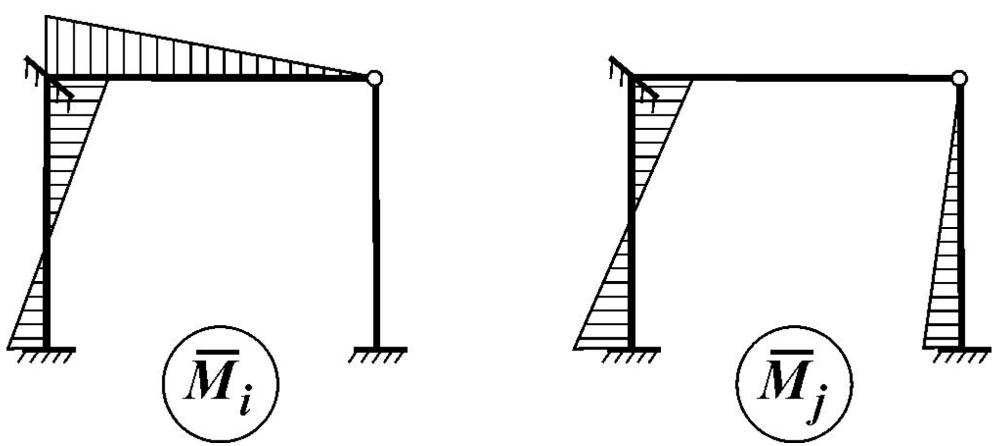
Статический способ является основным способом определения коэффициентов системы канонических уравнений.

Теорема Релея. *Реакция, возникающая в j-ой связи от перемещения i-ой связи на единицу равна реакции i-ой связи от перемещения j-ой связи на единицу:* $r_{ji} = r_{ij}$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим *i*-ое и *j*-ое единичные состояния основной системы некоторой рамы:



и соответствующие эпюры моментов в этих состояниях



Возможная работа сил *j*-ого единичного состояния на перемещениях *i*-го состояния равна

$$W_{ji} = r_{ij} \cdot 1 = r_{ij}.$$

Работа сил *i*-го состояния на перемещениях *j*-го состояния будет

$$W_{ij} = r_{ji} \cdot 1 = r_{ji}.$$

По теореме Бетти

$$W_{ji} = W_{ij}.$$

Значит, равны и правые их части, т.е.

$$r_{ij} = r_{ji}.$$

Теорема доказана.

Эту теорему иногда называют ***теоремой о взаимности реакций***. Она позволяет сократить объем вычислений побочных коэффициентов канонических уравнений МП.

Кинематический способ основан на определении коэффициентов канонических уравнений перемножением эпюр:

$$r_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx$$ т.е. $$r_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j \, .$$

Формула вычисления грузовых коэффициентов отличается от аналогичной формулы метода сил:

$$R_{iP} = -\sum \int \frac{\overline{M}_i M_P^0}{EI} dx$$ т.е. $$R_{iP} = -\overline{M}_i \otimes M_P^0 \, .$$

Здесь $\overline{M}_P^0$ – грузовая эпюра изгибающих моментов в любой статически определимой системе, полученной из заданной системы удалением лишних связей.

Кинематический способ применяется при сложности определения коэффициентов статическим способом или для проверки результатов статического способа.

6. Определение усилий

После определения коэффициентов все они подставляются в систему канонических уравнений. Затем полученная система уравнений решается и определяются неизвестные $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

Далее определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Они определяются аналогично методу сил:

− вначале по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \ldots + M_P$$

определяются моменты;

− затем, исходя из них, определяются поперечные силы *Q*, а по ним определяются продольные силы *N*:

$$M \Rightarrow Q \Rightarrow N.$$

7. Алгоритм метода перемещений

Алгоритм МП состоит из следующих этапов:

1. Определение степени кинематич. неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение эпюр моментов во всех состояниях.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Решение канонических уравнений.
8. Построение эпюр *M, Q, N.*
9. Проверка правильности расчета (статическим и кинематическим способами).

Алгоритмы МП и МС внешне совпадают.

При подробном рассмотрении можно выявить их сходные и принципиально отличающиеся стороны.