Сюжетные задачи

Задачи ЕГЭ

ПРЕМИИ

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудни ков и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, ели ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальные поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе за дание удастся выполнить при любом распределении разме ров премий?

а) Разделим общую сумму в 600 000 рублей на 40, получим, что каж дый должен получить по 15 000 рублей. Так как это число кратно и 1000 и 5000, то всем 40 сотрудникам можно раздать равную пре мию в указанных купюрах.

б) Сумма, оставшаяся после выплаты 40 000 будет равна 560 000. При делении на 70 сотрудников получаем выплаты по 8000 рублей. Не удастся сделать, так как $8000 = 5000 + 3 \cdot 1000$ и для 70 сотрудни ков нужно будет 210 тысячных купюр, а их всего 100.

в) Если премию можно распределять произвольным образом, то макси мальное число будет соответствовать максимальному числу купюр, то есть 200 сотрудников.

АВТОБУСЫ

Группу школьников нужно перевези из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причем в этом случае число рей сов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из слу чаев автобусы заполняются полностью.

Какое максимальное количество школьников можно пере везти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

Тип А: 2 автобуса; *n* – рейсов каждый; m + 7 – человек в автобусе

Тип В: 3 автобуса; *n* – 1 – рейс; *m* – человек

$$3(n-1)m = 2n(m+7) \Leftrightarrow 3mn - 3m = 2nm + 14n \Leftrightarrow mn - 3m = 14n \Leftrightarrow$$

$$m(n-3) = 14n \Leftrightarrow m = \frac{14n}{n-3} = \frac{14(n-3)+42}{n-3} = 14 + \frac{42}{n-3}.$$

Следовательно надо найти делители 42: $n-3 = 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42.$

Если $n-3=1$, это получаем $n=4$, $m=56$, , а всего школьников 504.

Если $n=5, m=35$, это 420 школьников;

Если $n=6, m=28$, это 420 школьников;

Если $n=9, m=21$, это школьников 504;

Если $n=10, m=20$, это 540 школьников;

Если $n=17, m=17$, это школьников 816;

Если $n=45, m=15$, это школьников 1980

ДРОТИКИ

В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сек тор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попа дание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

а) Да, например, при попадании в утроение сектора 20, утроение сектора 19 и центральный сектор 50 получаем: 60 + 57 + 50 = 167.

б) Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дает меньше 54 очков. Если все шесть бросков были по 60 очков, то игрок набрал 360 очков, что больше 356. Если хотя бы один бросок на 60 очков заменить броском на 54 очка или меньше, то сумма уменьшит ся как минимум на 6, а, значит, станет не больше 354 очков, что мень ше 356 очков. Следовательно, бросок на 60 очков можно заменять только броском на 57 очков. Но одна такая замена дает итоговый ре зультат 357 очков, а хотя бы две замены — не более 354 очков. Зна чит, 356 очков шестью бросками набрать невозможно.

в) Как было показано в пункте б) каждый бросок приносит игроку не более 60 очков. Значит, за 16 бросков он наберет не более 960 очков, а тогда для того, чтобы набрать 1001 очко понадобится не менее 17 бросков.

Покажем, что игрок может набрать 1001 очко за 17 бросков. Предполо жим, что он сделал 15 бросков на 60 очков (итого 900), один бросок в зону утроения сектора 17 (51 очко) и один бросок в центральный сек тор 50 очков. Тогда в сумме он наберет 900 + 51 + 50 = 1001 очко.

ТЕСТ

Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

- а) Пусть было 3 участника, которые набрали 90, 72 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест $\frac{72+2}{2}$ =37 баллов. После добавления баллов у участников оказалось 95, 77 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников теста, сдав ших тест, первоначально составлял 90 баллов, а после добавления баллов составил (95+77)/2=86 баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 85. Имеем два уравнения: $80N = 65(N - a) + 90a$ и $85N = 69(N - b) + 93b$, откуда $15N = 25a$, то есть $3N = 5a$, и $16N = 24b$, то есть $2N = 3b$. Поэтому целое число N делится на 5 и на 3, то есть делится на 15. Таким образом, $N \geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 64 балла, 1 участник — 70 баллов и 9 участников по 90 баллов. Тогда средний балл был равен 80, средний бал участников, сдавших тест, был равен 90, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 65. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, средний балл участников, не сдав ших тест, стал равен 69. Таким образом, все условия выполнены.

МАЛЬЧИКИ/ДЕВОЧКИ

- Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.
-
- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
- б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично, кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9} = \frac{7}{16} > \frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.