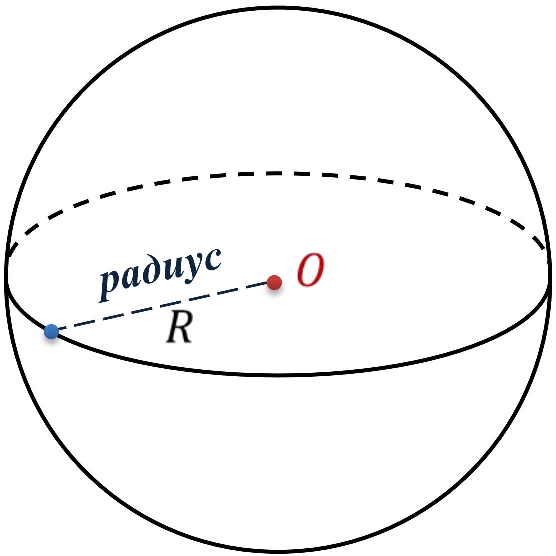
Взаимное расположение сферы и плоскости

Определение. ***Сферой*** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

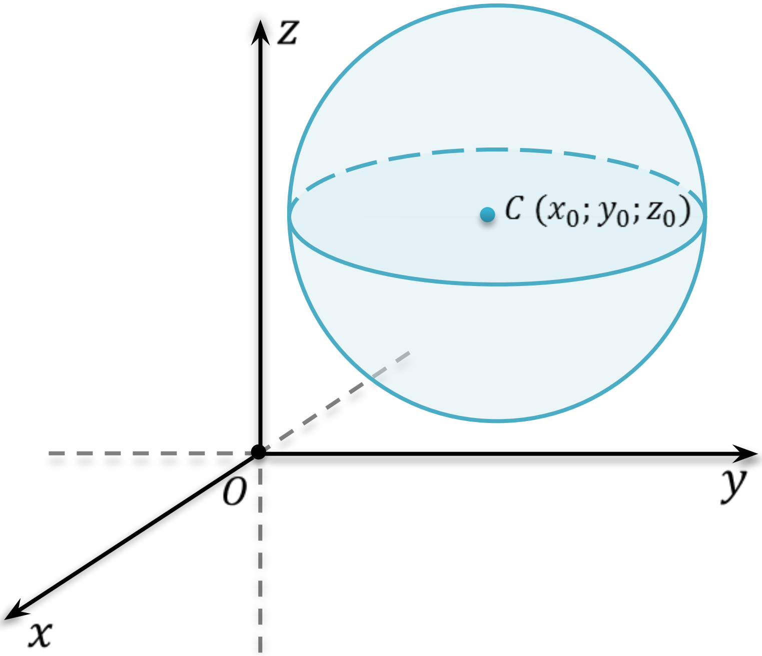


Данная точка называется ***центром*** сферы.

Данное расстояние – ***радиусом*** сферы.

В прямоугольной системе координат ***уравнение сферы*** радиуса R с центром в точке $C\ (x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$



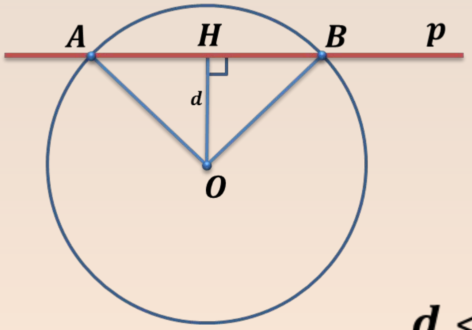
Если уравнение относительно прямоугольных координат

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

определяет поверхность в пространстве, то ею является ***сфера***.

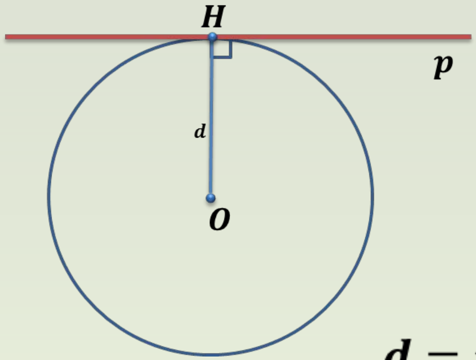
Планиметрия. Взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения расстояния от центра окружности до прямой и радиуса окружности:

Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки.



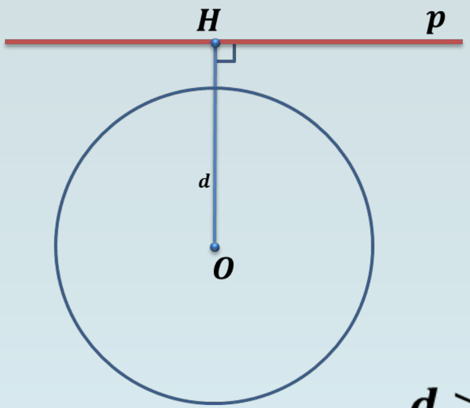
$d < r$

Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.



$d = r$

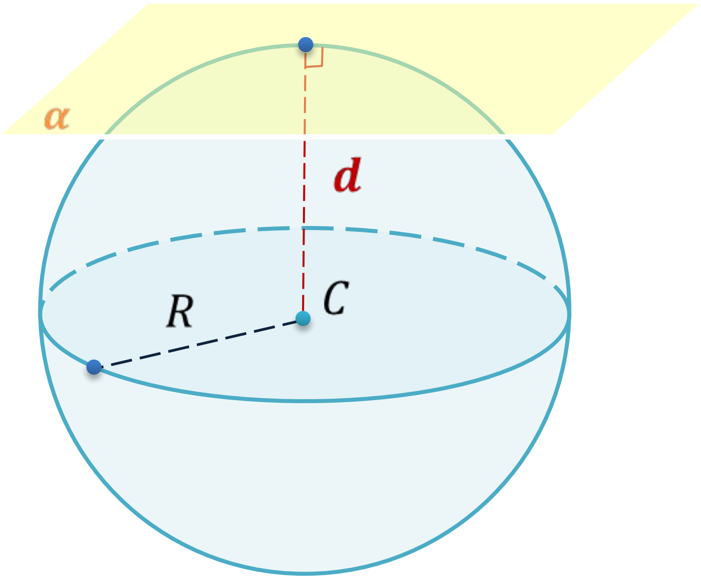
Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.



$d > r$

Исследуем ***взаимное расположение сферы и плоскости*** в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от ее центра до плоскости.

Введем обозначения:



R – радиус сферы

C – центр сферы

d – расстояние от центра сферы до некоторой плоскости

Введем систему координат $Oxyz$.

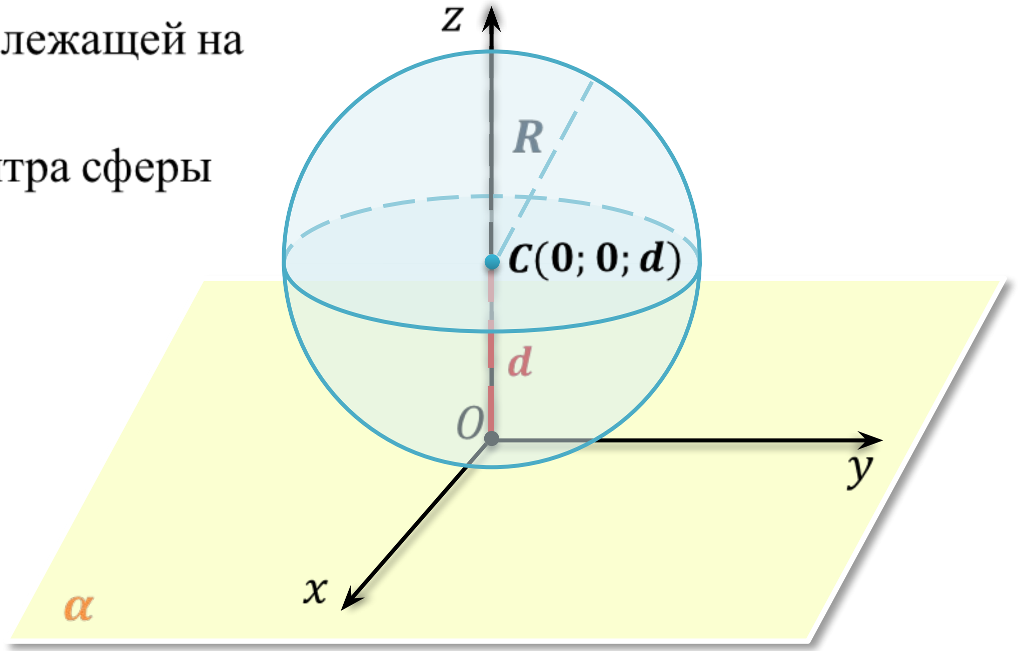
Построим плоскость α, совпадающую с плоскостью Oxy.

Изобразим сферу с центром в точке C, лежащей на положительной полуоси Oz.

$\boldsymbol{d}$ – расстояние (перпендикуляр) от центра сферы до плоскости α.

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2}$$

$$\boldsymbol{z = 0}$$



Если <u>координаты</u> какой-нибудь точки $M(x; y; z)$ <u>удовлетворяют обоим уравнениям</u>, то точка M лежит как в плоскости α, так и на сфере, т. е. *является общей точкой плоскости и сферы*.

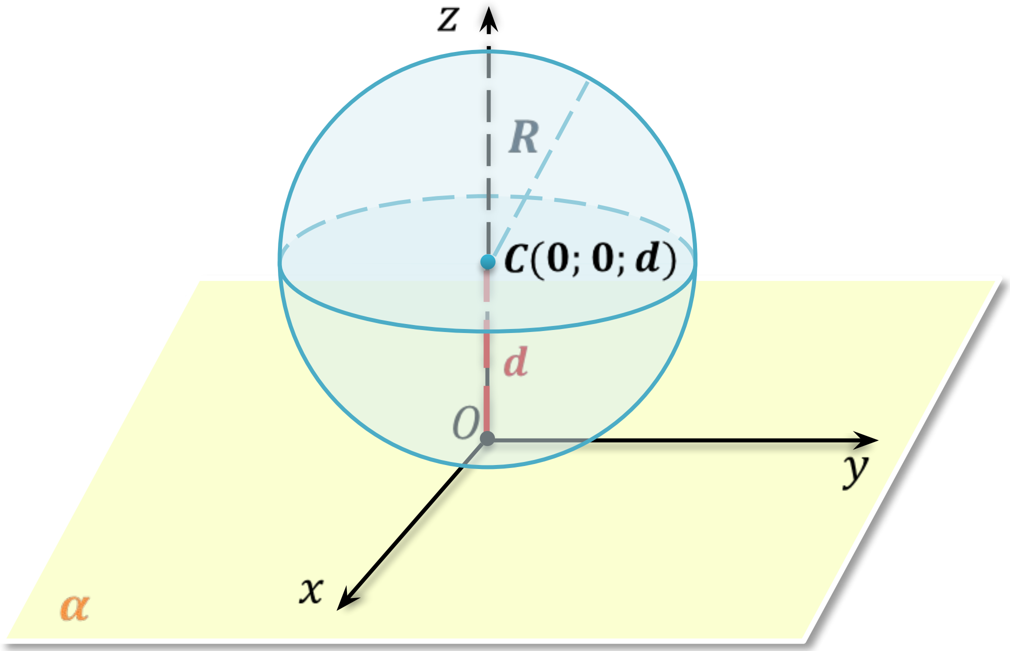
Если же система этих двух уравнений <u>не имеет решений</u>, то сфера и плоскость *не имеют общих точек*.

$$\begin{cases} \boldsymbol{z = 0} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + (0 - d)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + d^2 = R^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2 - d^2}}$$



Следовательно, в зависимости от соотношения $\boldsymbol{d}$ – расстояния от центра сферы до плоскости α и $\boldsymbol{R}$ – радиуса сферы возможны три случая взаимного расположения сферы и плоскости в пространстве.

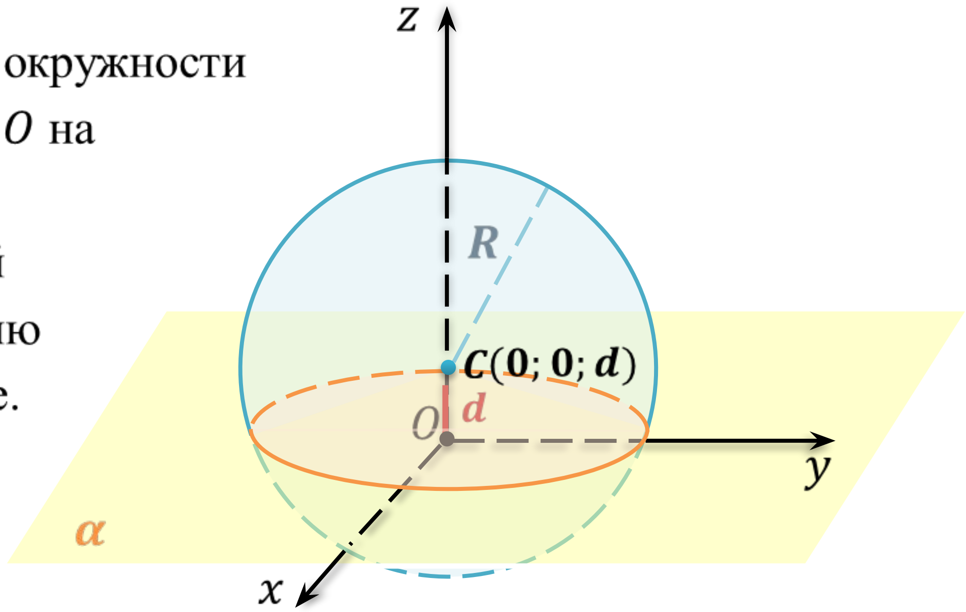
1) $\boldsymbol{d < R}$

Тогда $\boldsymbol{R^2 - d^2 > 0}$.

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2 - d^2}$ является уравнением окружности радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ с центром в точке O на плоскости Oxy.

Координаты любой точки $M(x; y; 0)$ этой окружности удовлетворяют как уравнению плоскости α, так и уравнению сферы, т. е. *все точки этой окружности являются общими точками плоскости и сферы*.

В данном случае сфера и плоскость пересекаются по окружности.



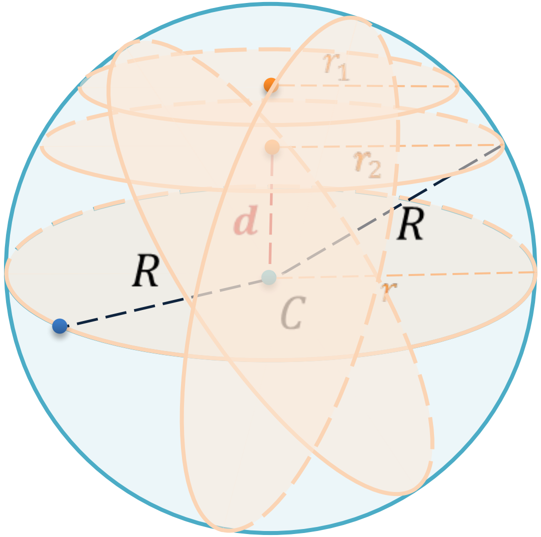
Если *расстояние от центра сферы до плоскости* ***меньше*** *радиуса сферы*, то сечение сферы плоскостью есть окружность.

Сечение шара плоскостью есть круг.

Плоскость, проходящая через диаметр шара, называется ***диаметральной***.

Круг, полученный в результате сечения, называется ***большим кругом*** шара.

Если же секущая плоскость не проходит через центр шара, то расстояние от центра сферы до секущей плоскости $d > 0$ и $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



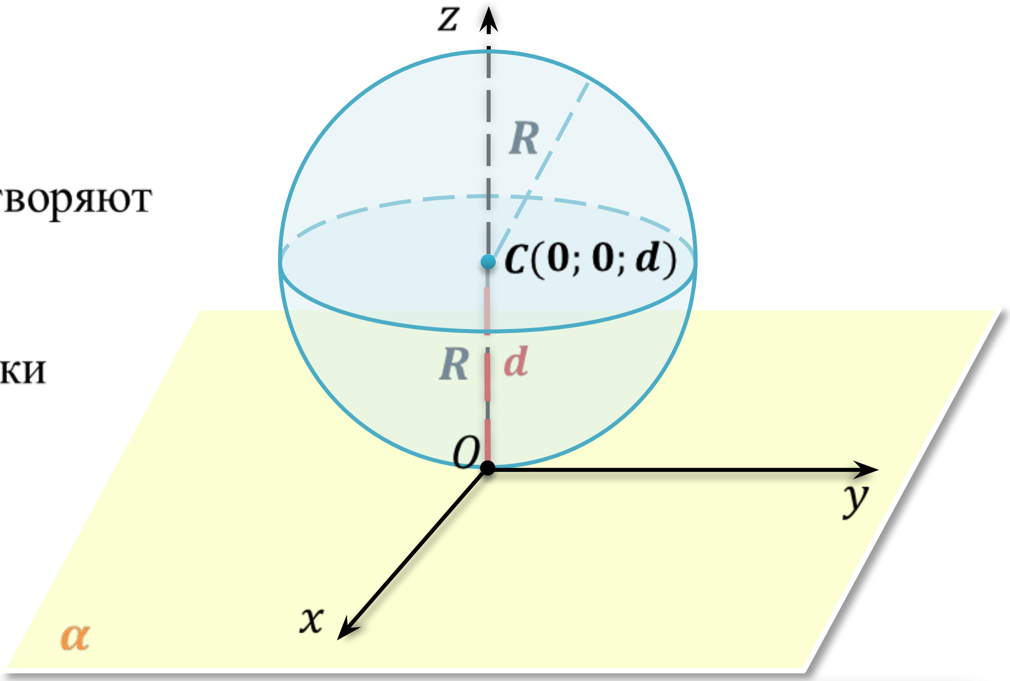
$r \leqslant R$

2) $\boldsymbol{d = R}$

Тогда $\boldsymbol{R^2 - d^2 = 0}$.

Уравнению $\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2 - d^2}$ удовлетворяют только числа $x = 0$ и $y = 0$.

Следовательно, только координаты точки $O(0; 0; 0)$ удовлетворяют обоим уравнениям, значит, O – единственная общая точка сферы и плоскости.

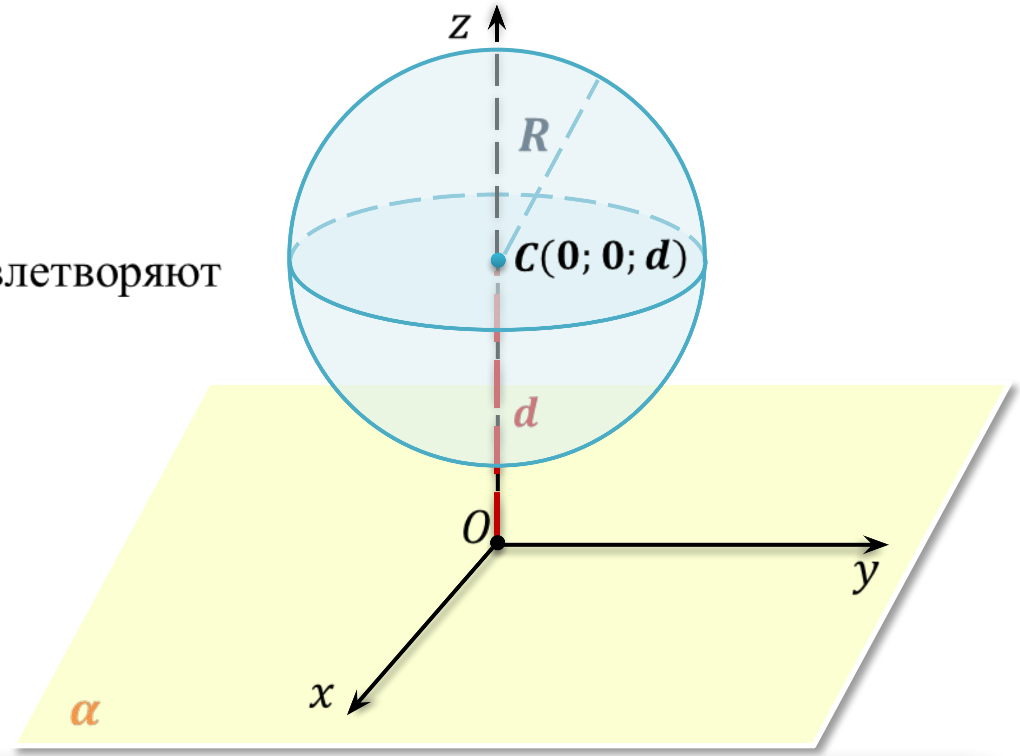


Если *расстояние от центра сферы до плоскости* ***равно*** *радиусу сферы*, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

3) $d > R$

Тогда $R^2 - d^2 < 0$.

Уравнению $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ не удовлетворяют координаты никакой точки.

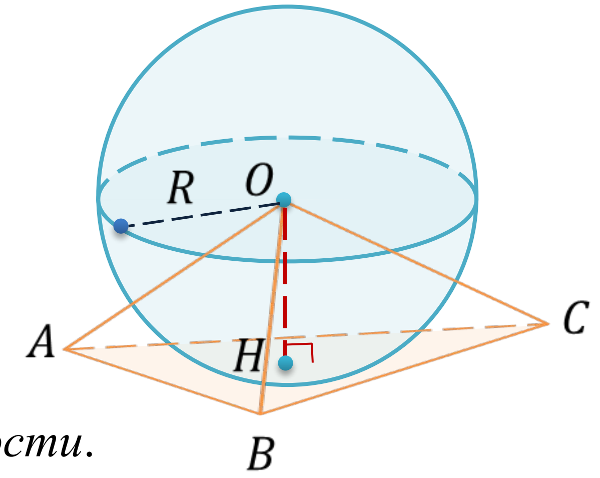


Если *расстояние от центра сферы до плоскости* ***больше*** *радиуса сферы*, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Задание. Отрезок OH – высота тетраэдра $OABC$. Выясните взаимное расположение сферы радиуса R с центром O и плоскости ABC, если:

а) $R = 2$ см, $OH = 35$ мм; б) $R = 8$ дм, $OH = 70$ см; в) $R = 5$ см, $OH = 5$ см.

Решение.



а) $R = 2$ см,
$OH = 35 \text{ мм} = 3{,}5 \text{ см}$ $\Rightarrow \boldsymbol{OH > R}$

Следовательно, сфера и плоскость не имеют общих точек, и значит, *не пересекаются*.

б) $R = 8$ дм,
$OH = 70 \text{ см} = 7 \text{ дм}$ $\Rightarrow \boldsymbol{OH < R}$

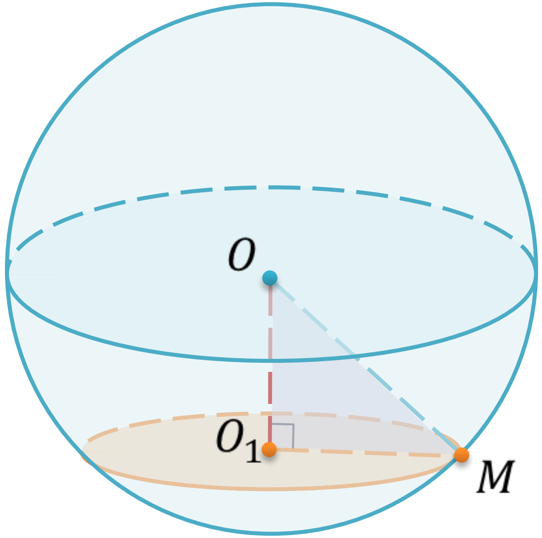
Значит, сфера и плоскость *пересекаются по окружности*.

в) $R = 5$ см,
$OH = 5$ см $\Rightarrow \boldsymbol{OH = R}$

Сфера и плоскость *имеют только одну общую точку*.

Задача. Шар пересечен плоскостью. Площадь сечения равна 576π см^2. Расстояние от центра шара до плоскости сечения равно 7 см. Найдите радиус шара.

Решение.



$OO_1 \perp OM$

$\triangle OO_1M$ – прямоугольный.

$OM = R$

$OO_1 = 7$ см, $S_{сеч} = 576\pi$ см^2.

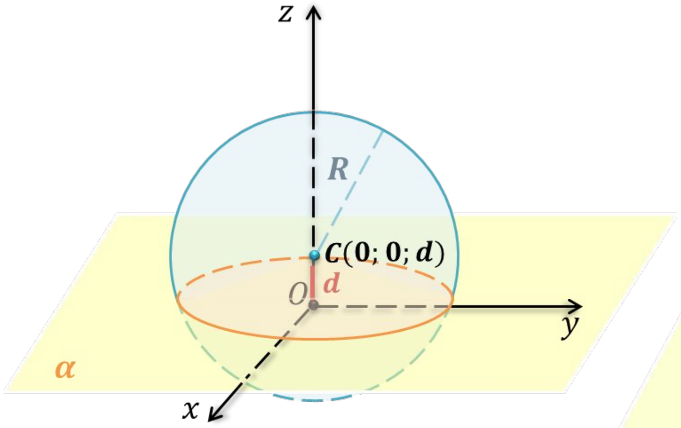
$S_{сеч} = \pi r^2 \;\Rightarrow r = 24$ (см)

$$OM = \sqrt{{OO_1}^2 + O_1M^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \text{ (см)}$$

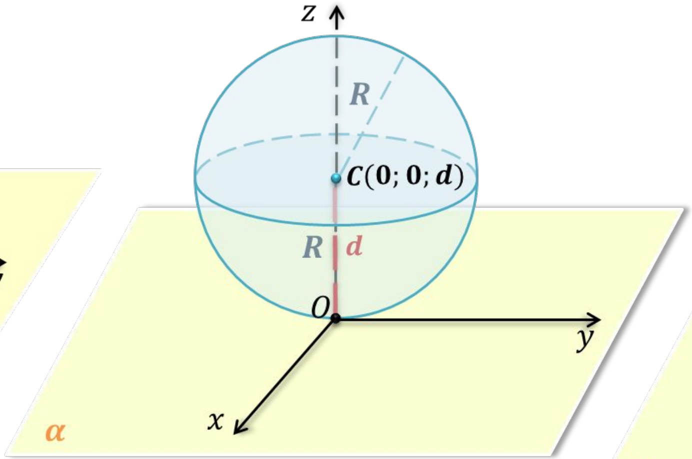
Ответ: 25 см.

Взаимное расположение сферы и плоскости

1) $\boldsymbol{d < R}$



2) $\boldsymbol{d = R}$



3) $\boldsymbol{d > R}$