

# Статистические методы, оценивающие факторные эффекты и эффекты межфакторного взаимодействия

## Общая линейная модель

### Метрические данные

- . Сравнение нескольких средних ( $>2$ ): ANOVA (1ДА).
- . Оценка эффектов межгрупповых и внутригрупповых факторов: многофакторный ДА (ОЛМ-одномерная, ОЛМ-повторные измерения).
- . Оценка межфакторного взаимодействия.
- . Оценка влияния факторов на несколько зависимых переменных (MANOVA, ОЛМ-многомерная).

## Неметрические данные:

□ Только сравнение медиан нескольких выборок.

1. Непараметрические тесты для нескольких независимых выборок.
2. Непараметрические тесты для нескольких связанных выборок.
3. Обобщенная линейная модель.

# Обобщенная линейная модель

## Области применения

### Метрические и неметрические данные:

1. Оценка факторных эффектов и эффектов межфакторного взаимодействия для неметрических данных – номинальных (бинарных), мультиноминальных, порядковых: Обобщенные линейные модели, Обобщенные уравнения оценки.
2. Обработка многоуровневых данных: смешанные модели с вложенными факторами: Смешанные модели (Линейная ..., Обобщенные линейные).

# Сущность и логика дисперсионного анализа

- *ДА или ANOVA* (Analysis of Variance): оценка факторных эффектов и межфакторных взаимодействий.
- Состоит в *разложении (анализе) дисперсии* одной или нескольких переменных на составляющие компоненты, сравнивая которые друг с другом с помощью *F-критерия*, можно оценить ее (их) вклад в общую вариацию данных.

# Термины

**Уровни НЗП или фактора** – пол, возраст, уровень толерантности, место жительства, профессия, вид тренинга и т.д.

**Однофакторный ДА и многофакторный ДА** – сравнение групповых средних и дисперсий по каждому уровню фактора. Оценка главных эффектов.

**Межфакторное взаимодействие** – сравнение средних и дисперсий по каждому уровню одного фактору на каждом уровне другого фактора.

**Ковариата** – непрерывная (т.е. не дискретная, НЕ группирующая НЗП), включаемая в регрессионную модель.

# Линейная модель ДА

## Однофакторный ДА

$$X_{4,1} = \mu_{\text{общ.}} + \Phi_1 + \varepsilon_{4,1}$$

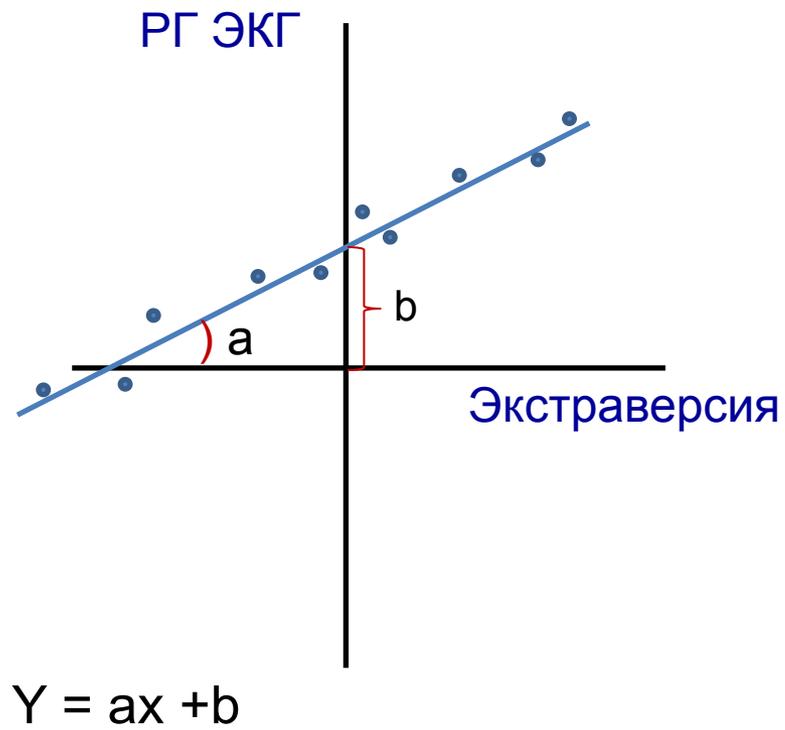
$\mu_{\text{общ.}}$  – среднее в популяции,  $\Phi_1$  - вклад фактора группы 1,  $\varepsilon_{4,1}$  - вклад уникальности 4-го испытуемого, ошибка модели.

Нулевая гипотеза:

$$H_0 : \mu_{\text{общ.}} = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3.$$

*Допущения ДА:*

1. Значения ЗП в каждой группе (выборке) нормально распределены вокруг своего среднего.
2. Равенство (однородность) дисперсий выборочных распределений, соответствующих каждому уровню фактора, т.е.  $\sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{32}$ .
3. Независимость наблюдений.



# Последствия нарушения допущений ДА

Высокая устойчивость или робастность ДА.  
Особенно при условиях:

1. Объемы выборок равны или отличаются незначительно.
2. Используются выборки большого объема.

Критерии проверки однородности дисперсий: Шеффе, Ливинь и др.

# Как работает ДА

Два варианта оценки общей дисперсии данных:

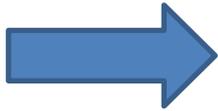
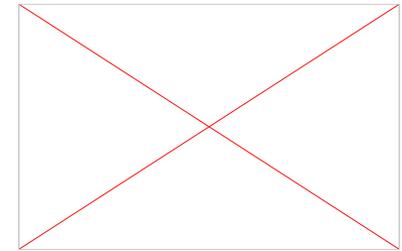
**Внутригрупповая дисперсия** -  $s^2_{WG}$ : общая дисперсия есть среднее арифметическое групповых дисперсий. Отражает влияние случайных факторов:  $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \dots + s_k^2$

$$\sigma_{total}^2 = S_{total}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \dots + s_k^2}{k}$$

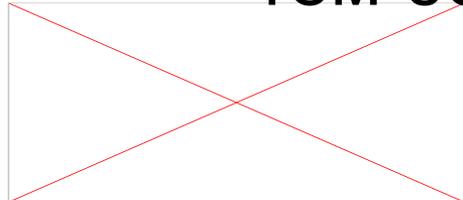
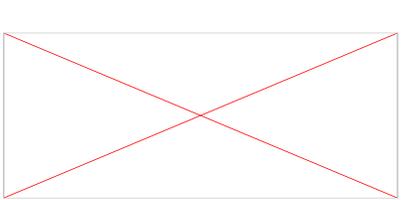
**Межгрупповая (факторная) дисперсия** -  $s^2_{BG}$ : отражает не случайную, а систематическую вариацию, т.е. является оценкой разброса самих выборочных (групповых) средних:

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{k-1}$$

# F-отношение или F-критерий



Чем больше факторная дисперсия, тем больше F.



В формулах обе дисперсии заменяются своими суммами квадратов, деленными на соответствующие степени свободы:

$k$  – это число уровней фактора или сравниваемых групп,  
 $N$  – это число испытуемых.

Нулевая гипотеза в ДА:

- однофакторный,
- многофакторный,
- повторные измерения.

# Множественные сравнения средних

Используемые тесты, с учетом или без учета однородности дисперсий выборок:

- Шеффе
- Бонферони
- НЗР
- Хауэлла

# Оценка силы факторного эффекта

$\eta^2$  (*эта квадрат*):

$$\eta^2 = \frac{\sum d^2_{BG}}{\sum d^2_{total}}$$

# Две модели ДА

- В модели ДА с *фиксированными эффектами* исследователь намеренно устанавливает строго определенные уровни изучаемого фактора.
- В модели со *случайными эффектами* уровни значения фактора выбираются исследователем *случайно* из широкого диапазона изменений фактора. Вложенные факторы. Нестинг-модели. Многоуровневые модели.

# Планирование значимости факторного

Эффекта критические значения F-распределения для уровня значимости  $p = 0.05$ .

Число ст. св.  
знаменателя

Число  
степеней  
свободы  
числитель  
я

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.22	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

# Многофакторный дисперсионный анализ

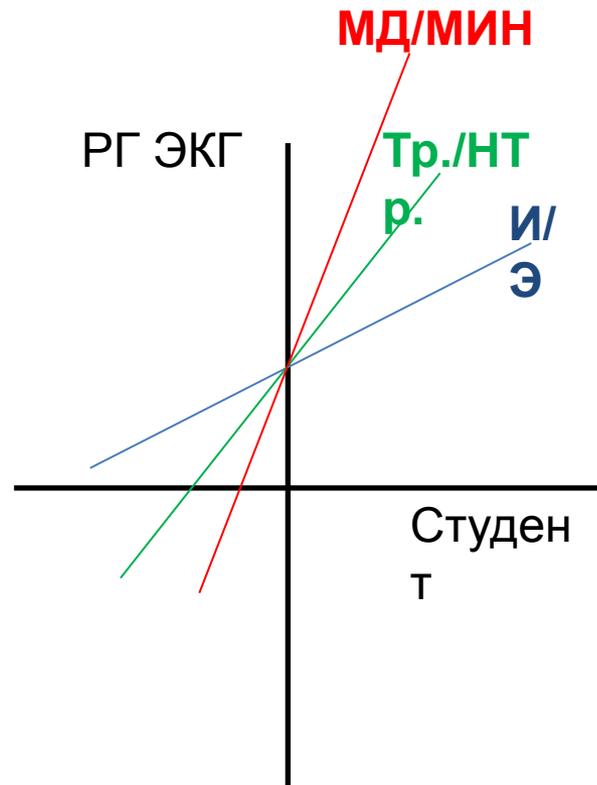
Factorial Analysis of Variance, ОЛМ-одномерная.

Линейная модель ДА:

$$X_{ijg} = m_{\text{общ.}} + \Phi_j + \Phi_g + \Phi_j * \Phi_g + e_{ijg}$$

Формулировка статистических гипотез:

1. Отдельно по фактору  $i$ : вариации средних по уровням фактора  $i$  – случайны.
2. Отдельно по фактору  $j$ : вариации средних по уровням фактора  $j$  – случайны.
3. Для взаимодействия факторов  $i$  и  $j$ :  
□ влияние фактора  $i$  различно при разных уровнях фактора  $j$ , и наоборот.



# Проблемы ДА с большим числом факторов:

$$X = \mu_{общ} + \Phi_j + \Phi_g + \Phi_k + \Phi_j * \Phi_g + \Phi_j * \Phi_k + \Phi_i * \Phi_k + \Phi_i * \Phi_j * \Phi_k + \varepsilon_{ijk}$$

*Итого – 8 компонентов дисперсии...*

# ДА с повторными измерениями – ОЛМ-повторные измерения

$X_{ij} = \mu_{общ.} + \Phi_j + \rho_i + \Phi_j \times \rho_{ji} + \varepsilon_{ij}$ , где

$\rho_i$  - компонент, связанный с влиянием индивидуальности  $i$ -го испытуемого,  $\Phi_j \times \rho_{ji}$  - дополнительный эффект взаимодействия этих двух компонент.

Особенность – данные повторных измерений связаны друг с другом, не являются независимыми. Следовательно можно и нужно учесть вклад индивидуальных различий испытуемых.

Преимущество: при вычислении знаменателя  $F$ -отношения –  $s_{WG}^2$ , из него вычитается межиндивидуальная вариация, получаются более высокие оценки.

# Две модели оценки факторных эффектов

**Одномерная модель:** 1) применяется F-отношение, 2) имеет ограничения по допущению о сферичности ковариационно-дисперсионной матрицы, т.е. дисперсии зависимой переменной для разных уровней внутригруппового фактора не различаются и корреляции между повторными измерениями есть и они положительны; 3) проверяется с помощью теста сферичности ковариационно-дисперсионной матрицы Моучли ( $p < 0,05$ ).

# Эмпирические оценки F-отношения и степеней свободы

## Критерии межгрупповых эффектов

Зависимая переменная: среднее  $d'$  по 4-м блокам, 1 дБ

Источник	Сумма квадратов типа III	ст.св.	Средний квадрат	F	Знач.
Скорректированная модель	3,413 <sup>a</sup>	1	3,413	5,219	,025
Свободный член	238,846	1	238,846	365,222	,000
КД_П_2	3,413	1	3,413	5,219	,025
Ошибка	48,394	74	,654		
Всего	319,380	76			
Скорректированный итог	51,808	75			

a. R-квадрат = ,066 (Скорректированный R-квадрат = ,053)

# Дополнительное допущение для ДА с повторными измерениями

Допущение о *симметричности*  
*ковариационной матрицы* уровней  
факторов (в б. общем плане - *сферичности*).  
1 фактор, 3 уровня:

	A1	A2	A3
A1	cov11	cov12	cov13
A2	cov21	cov22	cov23
A3	cov31	cov32	cov33

# Две модели оценки факторных эффектов

**Многомерная модель:** 1) свободна от допущения о коррелированности измерений зависимой переменной (т.е. о сферичности); 2) используются многомерные тесты - След Пиллая» и « $\lambda$ -Вилкса»; 3) при оценки межгрупповых факторов с помощью M-теста Бокса *дополнительно* проверяется допущение об идентичности ковариационно-дисперсионных матриц ( $p > 0,05$ ).

# MANOVA или ОЛМ-многомерная

- Не требует допущения о сферичности.
- Менее мощная процедура. Особенно на малых выборках.
- Предполагается связь между рядом ЗП.  
Резоны: учет интеркорреляции между ЗП-ми.

## Допущения:

1. Многомерное нормальное распределение.
2. Для каждого уровня фактора ЗП образуют одну и ту же *дисперсионно-ковариационную* матрицу (квадратная матрица, на диагонали которой лежат дисперсии переменных, а ее элементами - коэффициенты ковариации между переменными).

# Что проверяем в случае использования F-критерия?

Если используем F-критерий, то делаем:

M-тест **Бокса**: оценка равенства дисперсионно-ковариационных матриц для каждого уровня фактора ( $p > 0,05$ ). Аналогично требованию однородности дисперсий в ANOVA.

Используем многомерные критерии: след Пиллая,  $\lambda$ -Вилкса, след Хотеллинга и критерий Роя.

Для оценки скоррелированности ЗП используем тест **Бартлетта** на сферичность ( $p < 0,05$ ).

# А внутригрупповые факторы?

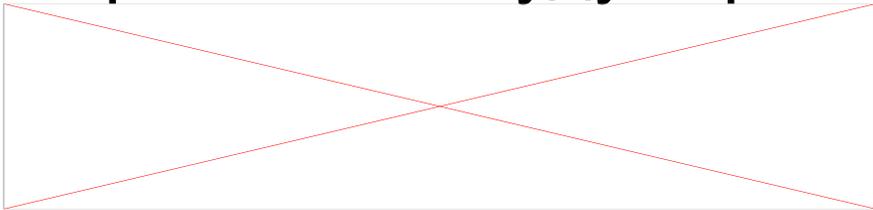
**Есть возможность** включать в многомерный ДА не только межгрупповые, но и внутригрупповые факторы, однако она реализуется с помощью специального командного режима выполнения статистических процедур (Command Syntax).

**Или:** использовать ОЛМ-повторные измерения, включая несколько ЗП.

# Непараметрические процедуры

**Ранговые** критерии для сравнения нескольких выборок - аналоги классического ДА.

- Пример «работы» непараметрического критерия **Фридмана**. Основная идея: если между группами нет различия, то а) ранжирование наблюдений будет случайным и б) средние ранги разных переменных будут примерно одинаковыми.



где  $K$  - число совпадающих наблюдений,  $j$  - число групп,  $T$  - сумма рангов в каждой группе.

# Классификация критериев по типу решаемых задач

- **Критерии для несвязанных выборок**
  - H-критерий Краскела-Уоллеса
  - Медианный критерий
  - Критерий Джонкхиера-Терпстры
  - **Критерии для связанных выборок**
  - Критерий Фридмана
  - W-критерий Кендала
  - Q-критерий Кокрена
- ✓ Ограничение для H-критерий Краскела-Уоллеса: распределения имеют схожую форму.

# Классификация критериев по типу решаемых задач

Критерии для ранговых данных и критерии для дихотомических (бинарных) переменных:

- Для **ранговых** данных:  $H$ -критерий Краскела-Уоллеса, Медианный критерий, Критерий Джонкхиера-Терпстры,  $W$ -критерий Кендала, Критерий Фридмана.
- Для **дихотомических** данных (0 или 1):  $Q$ -критерий Кокрена.

# Классификация критериев по типу решаемых задач

Критерии для простого сравнения выборок и критерии, учитывающие определенную упорядоченность сравниваемых выборок:

- **Простое сравнение** (менее мощные): H-критерий Краскала-Уоллеса, Медианный критерий, W-критерий Кендала, Критерий Фридмана
- **Учет упорядоченности** (более мощный): критерий Джонкхиера-Терпстры, критерий Пейджа.
- ✓ Выявляют различия там, где обычные критерии (Крускала-Уоллиса, Фридмана и др.) дают отрицательный результат.

# Примеры эмпирических данных

*Шкала экзистенции.sav* – однофакторный ДА. Оценить значимость различий 3-х групп испытуемых (переменные – возраст и образование) по порядковым шкалам SD, ST, P, F, EG.

*Индивид и музыка.sav* - непараметрический критерий для непарных выборок.

Оценить значимость различий по предпочтению музыки между группами испытуемых, различающихся по семейному положению, образованию и национальности с помощью подходящего

# Примеры эмпирических данных

*MANOVA.sav* - процедура ОЛМ-многомерная.

Оценить значимость различий по факторам «экстраверсия» и «нейротизм» а также эффект межфакторного взаимодействия. Оценить силу оцениваемых эффектов, построить соответствующие графики и полезные таблицы.

*Тренинг личностного роста\_СЖО.sav*.

Оценить влияния на шкалы опросника межгруппового фактора «Группа испытуемых» (контрольная и экспериментальная – которая проходила тренинг) и внутригруппового фактора «Время тестирования» (до тренинга и после тренинга).

# Примеры эмпирических данных

*Когнитивные стили, темперамент и СКИ.sav - процедуры: ОЛМ-одномерная, ОЛМ-многомерная.*

Оценить значимость различий во времени решения задач 3-х уровней сложности и общего времени в зависимости от 2-х когнитивных стилей, экстраверсии и нейротизма, их взаимодействия. Оценить силу оцениваемых эффектов, построить соответствующие графики и таблицы.

# Работа с ковариатами

Зачем нужна ковариата:

1. Наличие непрерывной (не группирующей) переменной как предиктора ЗП.
2. Желание построить более сложную модель.
3. Желание получить статистически значимый эффект за счет усложнения модели.

$$X_{ijg} = m_{\text{общ.}} + \Phi_j + \Phi_g + \Phi_j * \Phi_g + \text{Cov}_{IQ} + e_{ijg}$$

# Примеры эмпирических данных

*Церковь и гасторбайтеры.sav* – однофакторный ДА с ковариатой. Оценить значимость различий 2-х групп испытуемых (редко или часто посещают церковь) в их отношении к гасторбайтерам. Ковариата – возраст.

Смотрим на значимость и силу факторного эффекта.

# Зачем нужно оценивать контрасты?

Оценка формы тенденции,  
зависимости.

Построение моделей.

Сравнение моделей.

**Пример:** файл «Личность и сенсорные способности»,  
ОЛМ- повторные измерения, ЗП – ВР1...3.