Метод рационализации

Введени е

Решение неравенств - важный раздел в математике. Успешное изучение математики невозможно без умения решать разнообразные неравенства, поэтому мы решили рассмотреть один из способов решения неравенств – метод рационализации. В школьной программе он не изучается, но его применение значительно облегчает решение задания С3 ЕГЭ, в частности логарифмических и показательных неравенств.

Теоретическое обоснование метода

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, $\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$ неравенство вида является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- **Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, известный в математической литературе под названием декомпозиции.**

  Метод рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x), при котором неравенство G(x) $>$0 равносильно неравенству F(x) $>$0 в области определения выражения F(x).

Сведение логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида

$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$ **, (1)**

где $a(x), f(x), g(x)$ **- некоторые функции**

<u>Теорема 1.</u>

Логарифмическое неравенство $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$ ***равносильно следующей системе неравенств*:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Доказательство

Начнем с того, что первые четыре неравенства системы (2) задают множество допустимых значений исходного логарифмического неравенства. Обратим теперь внимание на пятое неравенство.

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель этого неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство $f(x) \le g(x)$

Если $a(x) > 1$, то первый множитель пятого неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство $f(x) \ge g(x)$

Таким образом, пятое неравенство системы включает в себя оба случая предыдущего метода.

Терема доказана.

Сведение показательных неравенств к системе рациональных неравенств

Теперь рассмотрим показательное неравенство вида

$$a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)} \quad \textbf{(3)}$$

Так же, как в предыдущем пункте $a(x), f(x), g(x)$ - некоторые функции.

И снова вспомним, что традиционное решение такого неравенства приводит к *двум случаям*. <u>В первом</u> основание степени положительно, но меньше единицы (знак неравенства обращается), <u>во втором</u> случае основание степени больше единицы (знак неравенства сохраняется).

Как и в случае с логарифмическим неравенством, имеется возможность значительно укоротить решение задачи, используя метод рационализации. Этот метод основан на следующей теореме.

<u>Теорема 2.</u>

Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)}$ ***равносильно следующей системе неравенств*:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Доказательство

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель третьего неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство $f(x) \le g(x)$

Если $a(x) > 1$, то первый множитель третьего неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство $f(x) \ge g(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h, p, q – выражения с переменной x (h > 0,h $\neq$ 1, f > 0, g > 0), a – фиксированное число (a > 0, a $\neq$ 1).

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$log_h f - log_h g$ $log_h - 1$ $log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$log_f h - log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

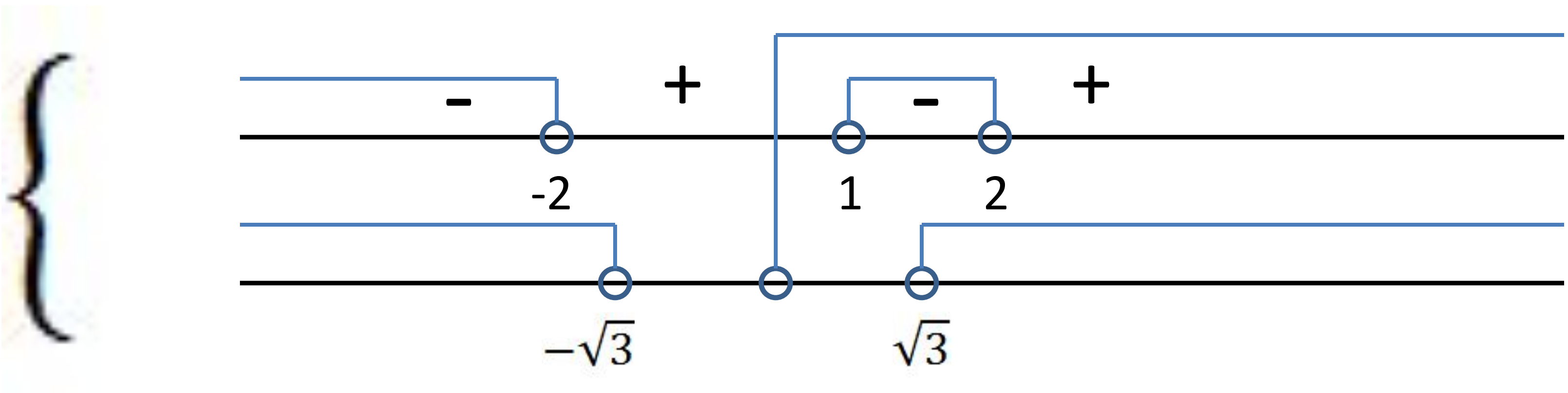
Пример 1.

Решить неравенство: $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение:

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-3-1) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x+2) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(\sqrt{3}; 2)$

Пример 2.

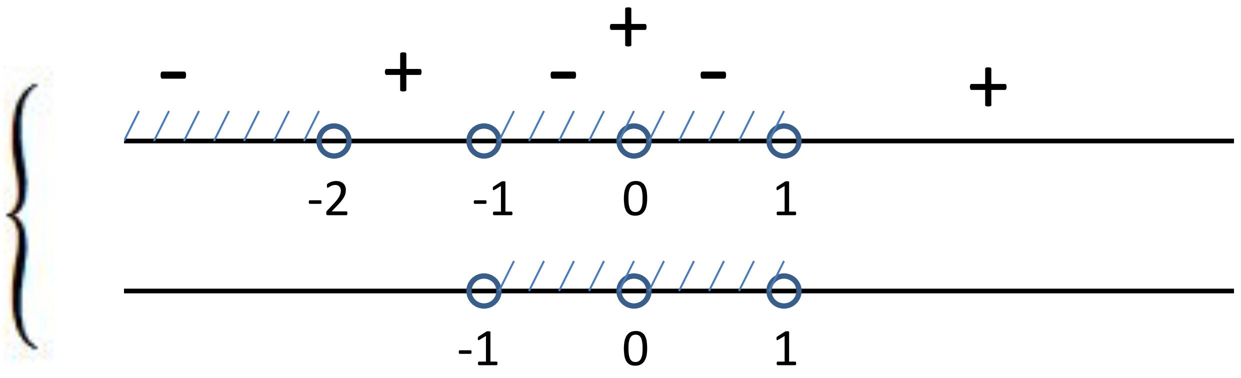
Решить неравенство:

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$$

$$\begin{cases} (x+3-1)\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-1\right) > 0; \\ x+3>0; \\ x+3 \neq 1; \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)\dfrac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-1; 0) \cup (0; 1)$

Пример 3.

Решить неравенство: $$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geq\log_{2x^2-5x+3}(3-x)$$

Решение:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)-\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\geq 0$$

$$\begin{cases}(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36\quad-32)\geq 0\\ 12x^2-41x+35\rangle 0\\ 2x^2-5x+3\rangle 0\\ 12x^2-41x+34\neq 0\\ 2x^2-5x+2\neq 0\\ 3-x\rangle 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right) > 0 \\ (x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right) > 0 \\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2) \neq 0 \\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{2};2\right) \cup (2;3)$

Решите примеры

Пример 5.

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \le \log_{2x}(x^2 + x)$$

ОТВЕТ

Пример 6.

$$\frac{\log_x(x-3) - \log_x(9-x)}{\log_{x-1} x} < 0$$

ОТВЕТ

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2+1) \le 0$$

ОТВЕТ

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

Пример 9. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2$

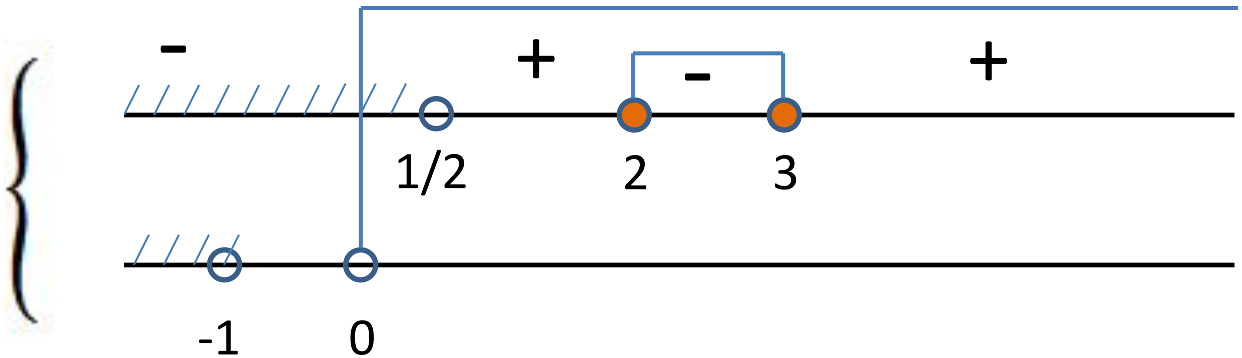
ОТВЕТ

ОТВЕТ

Пример 11. $\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1) \le 2$

ОТВЕТ

Пример 5

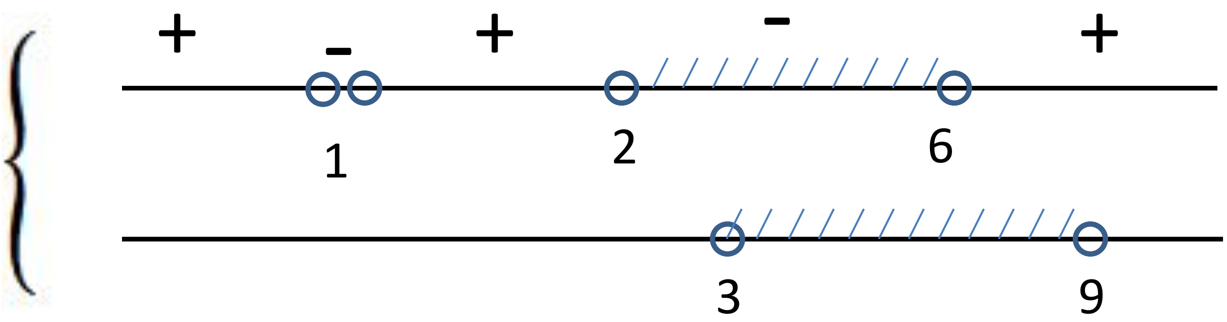


ОТВЕ
Т:

$$\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup[2;3]$$

НАЗА
Д

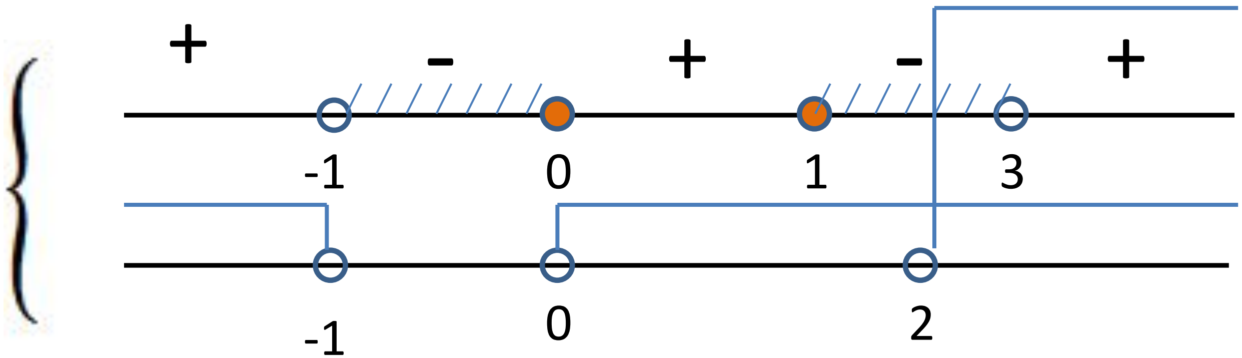
Пример 6



ОТВЕ
Т: $(3; 6)$

НАЗА
Д

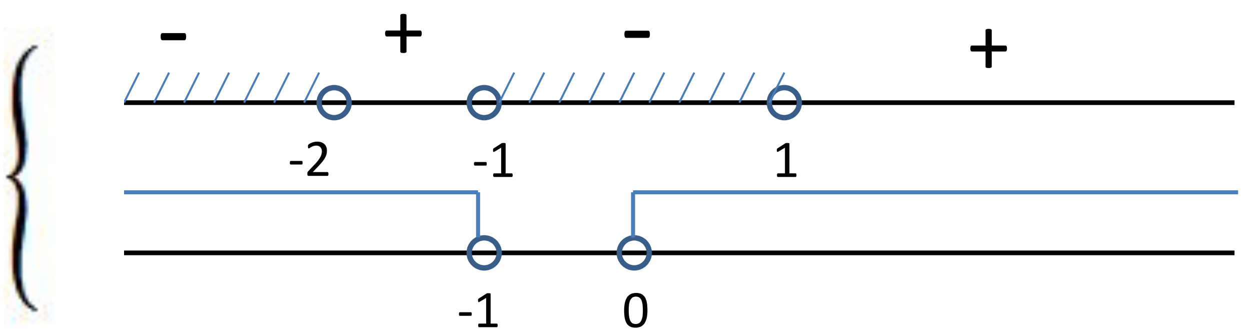
Пример 7



ОТВЕТ: (2;3)

НАЗАД

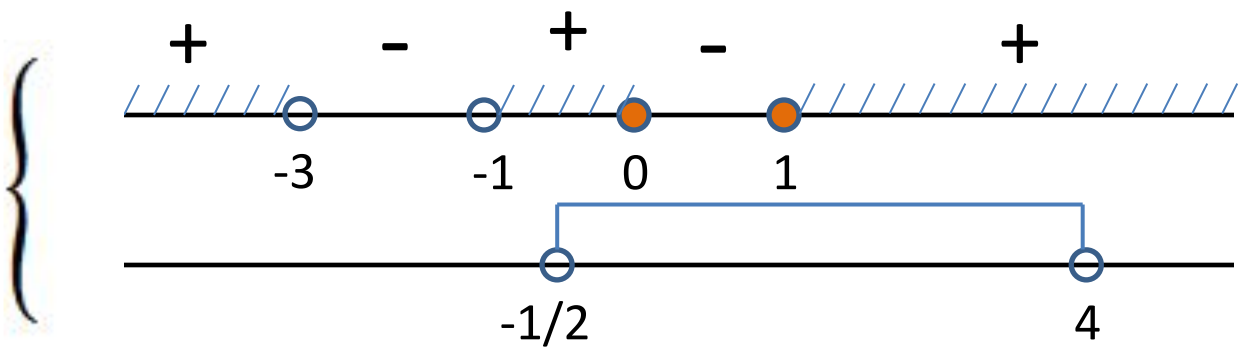
Пример 8



ОТВЕТ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

НАЗАД

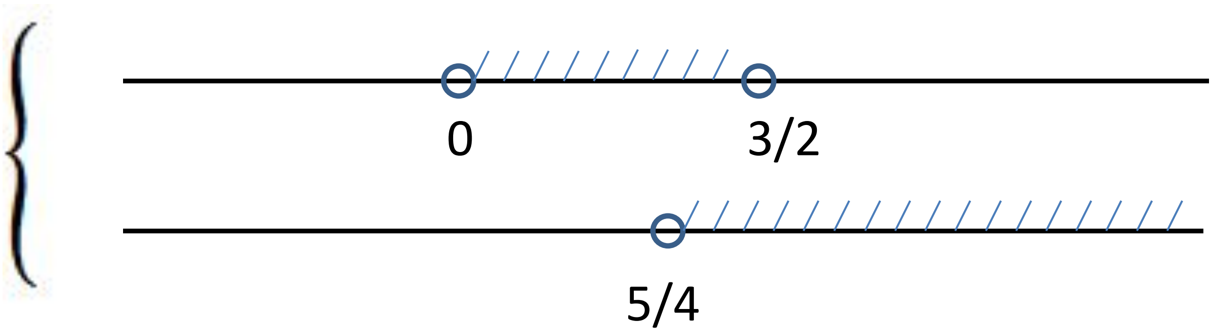
Пример 9



ОТВЕТ: $(-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; 4)$

НАЗАД

Пример 11



ОТВЕ
Т:

$$x \in \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$$