Высшая математика

Вебинар для студентов заочной формы обучения (дистанционная)

Преподаватель:
Кузьмина Ольга Борисовна

Кафедра: Информационно-компьютерных технологий
KuzminaOB@edu.mubint.ru

Сайт:
https://mubint.sharepoint.com/kuzmina/

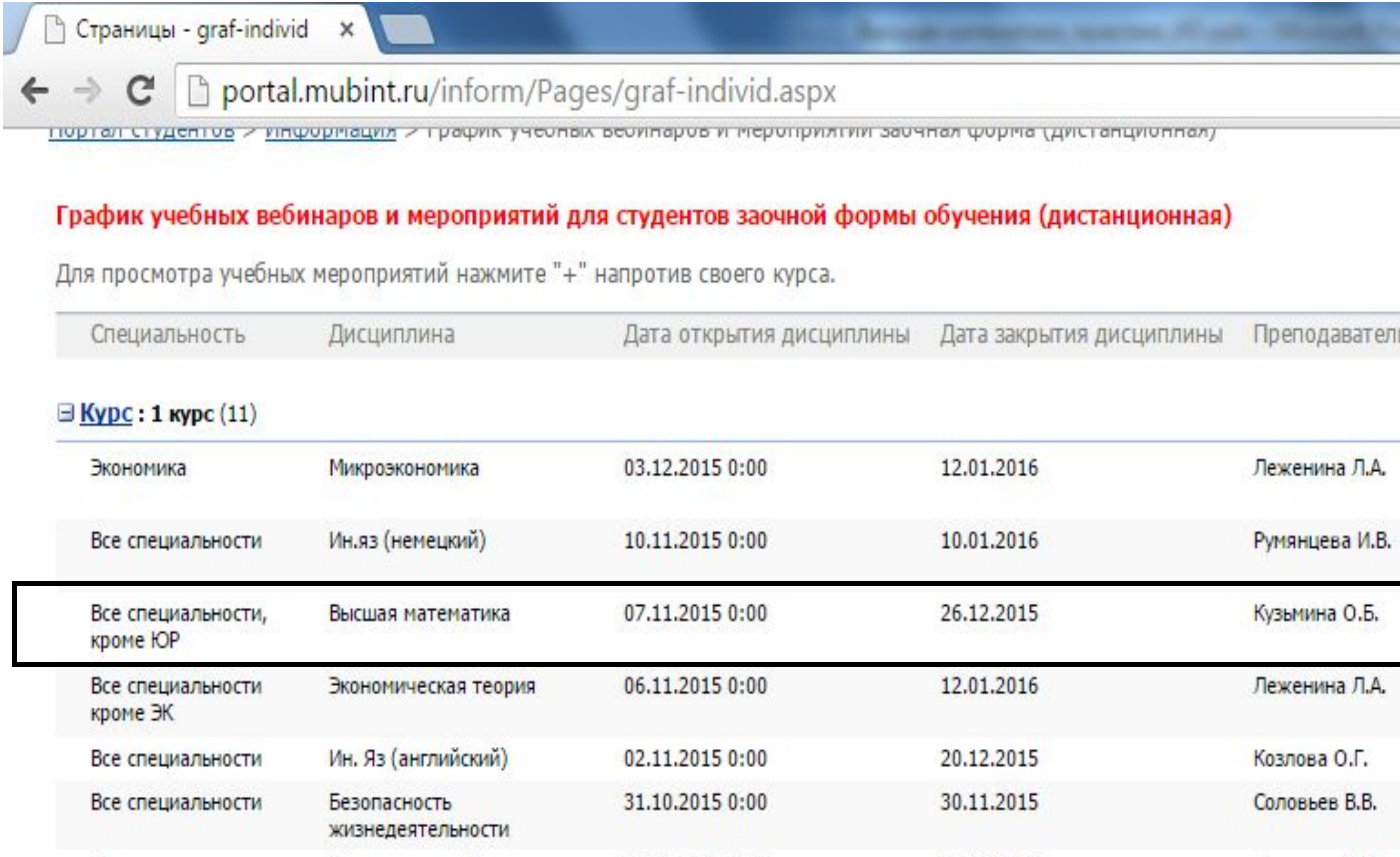
Порядок изучения дисциплины

Вид работы	Примерные сроки
Лекции	13.12.2016 17.12.2016
Практические занятия	11.01.2017 14.01.2017 18.01.2017 25.01.2017
Тестирование	Январь-февраль 2017
Закрытие дисциплины	28.02.2017

Форма контроля – экзамен, для специальности «Менеджмент» – зачет.

Экзамен/зачет проставляется по результатам практической работы и итогового тестирования в AdobeConnect.

Порядок изучения дисциплины


Страницы - graf-individ

portal.mubint.ru/inform/Pages/graf-individ.aspx

Портал студентов > Информация > График учебных вебинаров и мероприятий заочная форма (дистанционная)

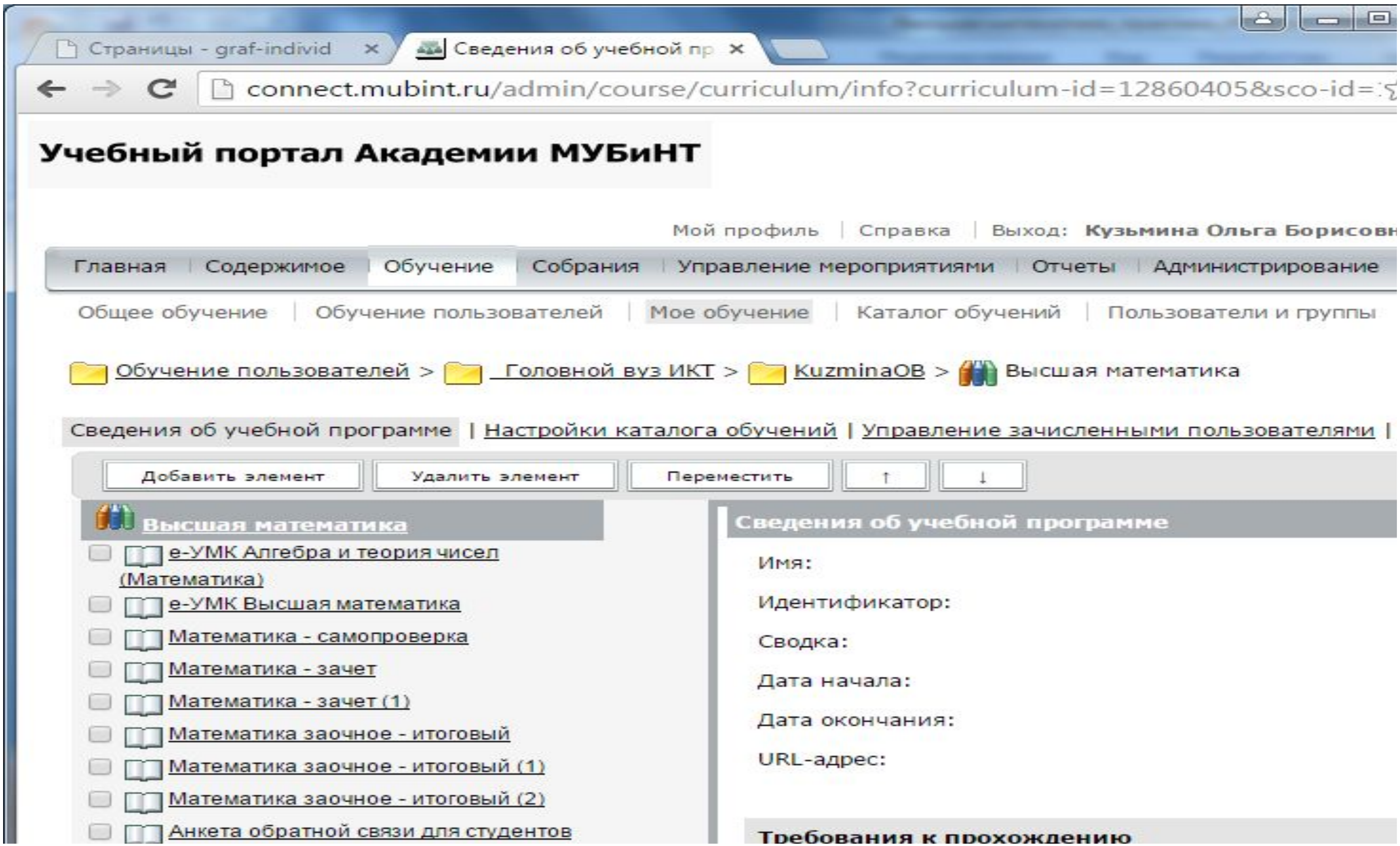
График учебных вебинаров и мероприятий для студентов заочной формы обучения (дистанционная)

Для просмотра учебных мероприятий нажмите "+" напротив своего курса.

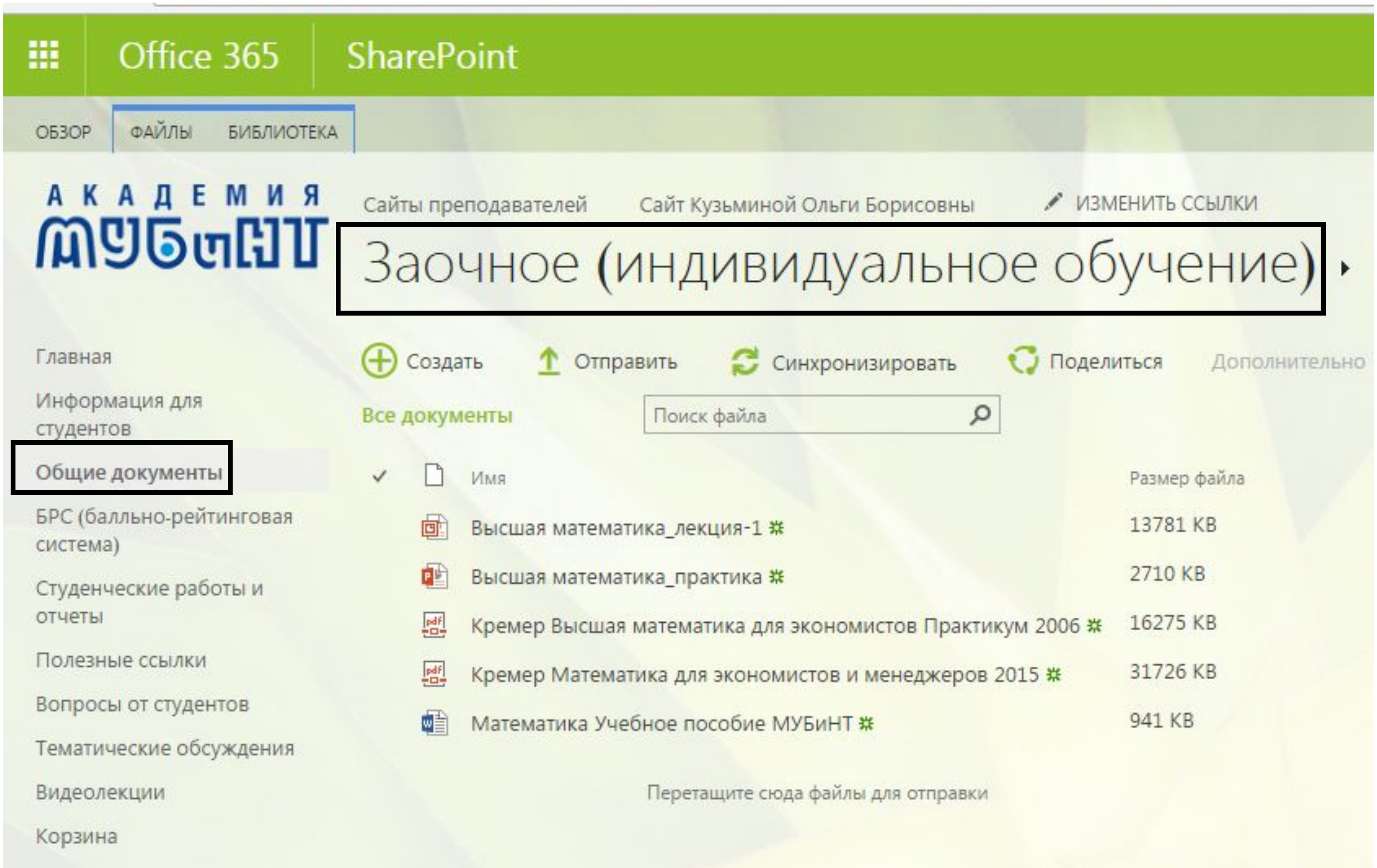
Специальность	Дисциплина	Дата открытия дисциплины	Дата закрытия дисциплины	Преподаватель
Курс : 1 курс (11)				
Экономика	Микроэкономика	03.12.2015 0:00	12.01.2016	Леженина Л.А.
Все специальности	Ин.яз (немецкий)	10.11.2015 0:00	10.01.2016	Румянцева И.В.
Все специальности, кроме ЮР	Высшая математика	07.11.2015 0:00	26.12.2015	Кузьмина О.Б.
Все специальности кроме ЭК	Экономическая теория	06.11.2015 0:00	12.01.2016	Леженина Л.А.
Все специальности	Ин. Яз (английский)	02.11.2015 0:00	20.12.2015	Козлова О.Г.
Все специальности	Безопасность жизнедеятельности	31.10.2015 0:00	30.11.2015	Соловьев В.В.

Порядок изучения дисциплины

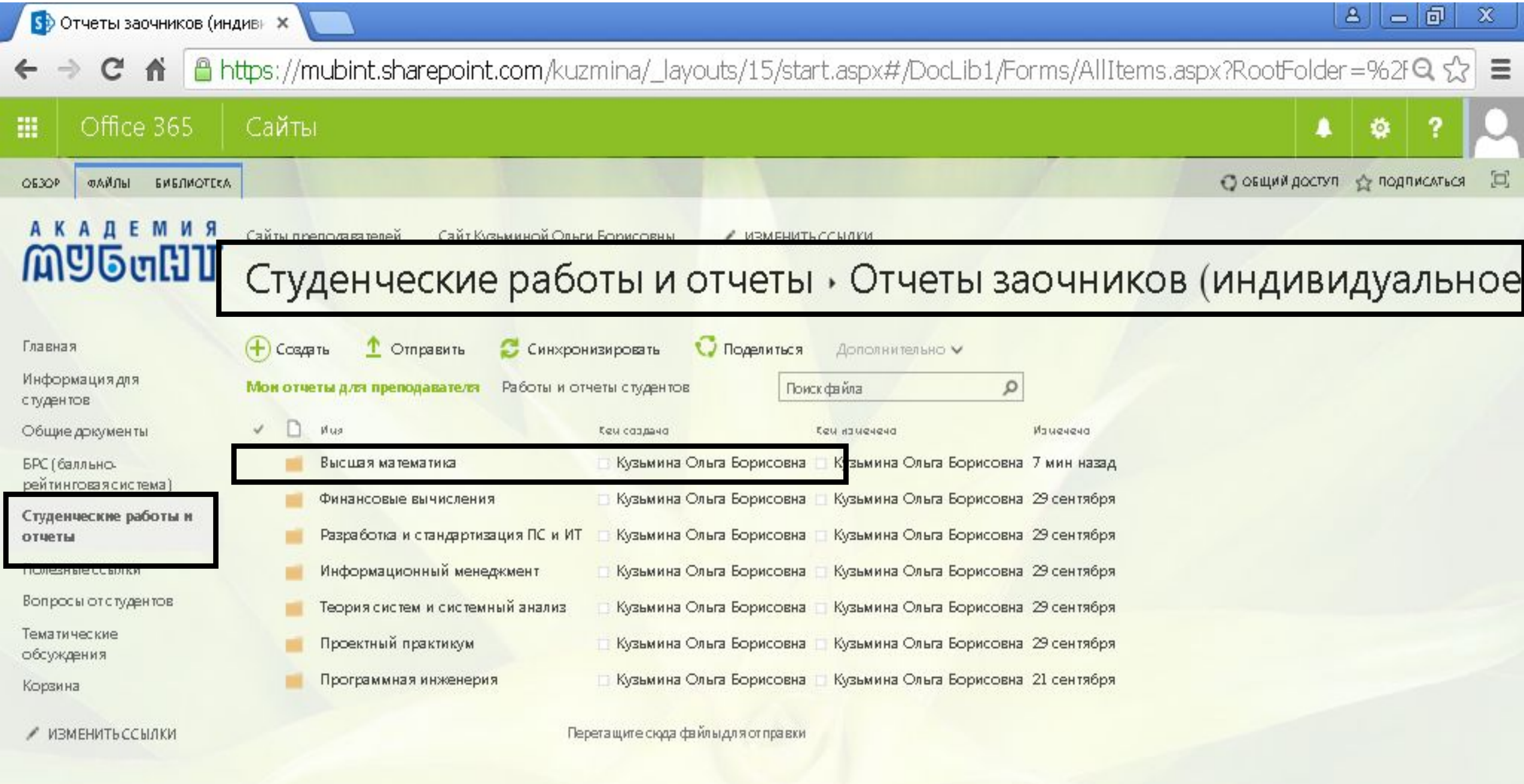
Адрес ресурса:
http://connect.mubint.ru



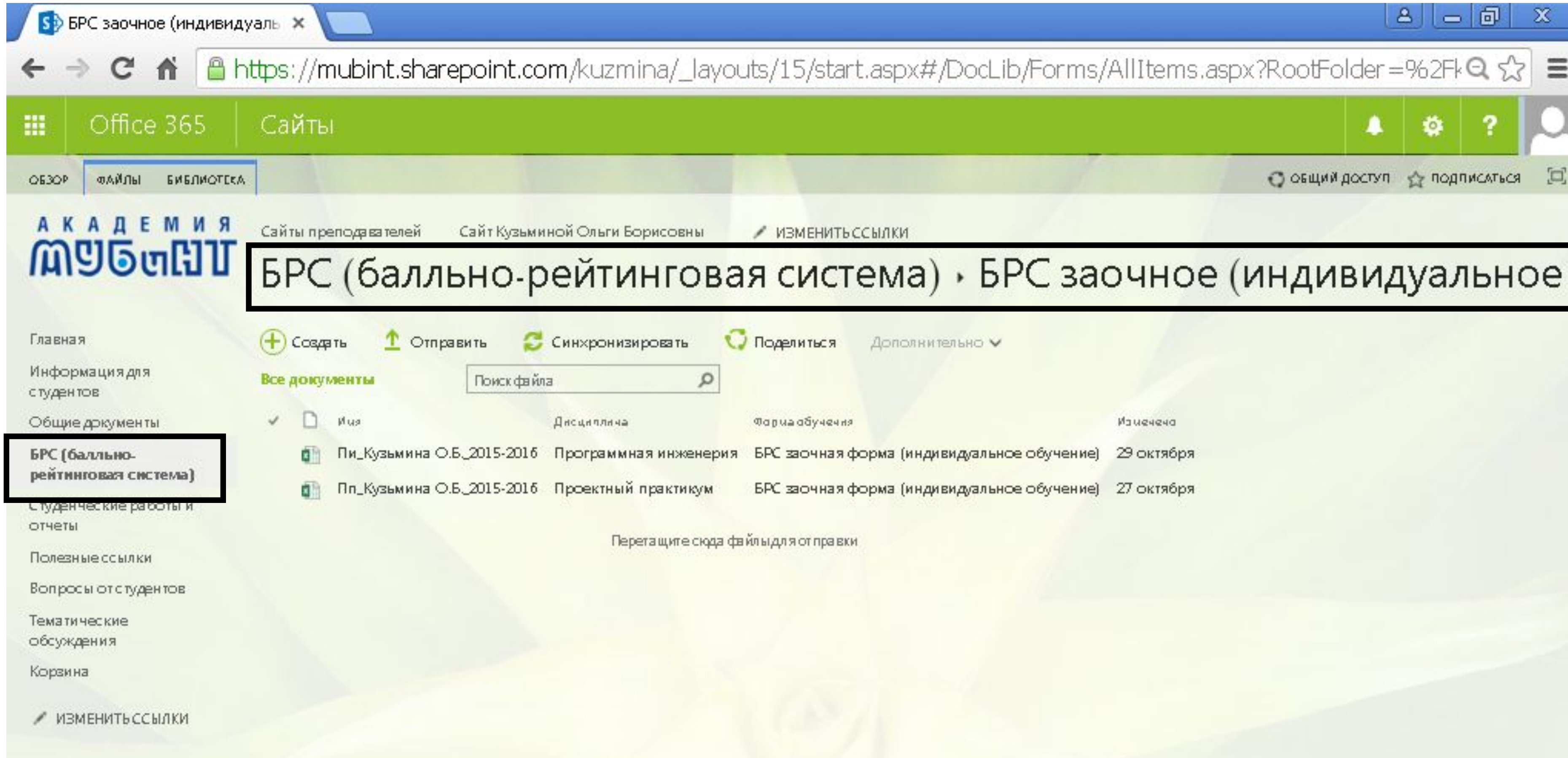
Работа на сайте преподавателя Кузьминой О.Б.:



Работа на сайте преподавателя Кузьминой О.Б.: Отчеты по практическим работам



Работа на сайте преподавателя Кузьминой О.Б.: Ведомость БРС



Литература:

1. Н.Ш. Кремер Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям/Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003-2015 г.г.

2. Н.Ш. Кремер Высшая математика для экономистов: практикум, 2006 г.

3. Учебно-методическое пособие «Математика», МУБиНТ

Учебно-методические пособия, задания на практические занятия, презентации с лекций-вебинаров и практических работ выложены на сайте преподавателя Кузьминой О.Б. в разделе «Общие документы: / Заочное (индивидуальное) обучение / Высшая математика».

1. Матрицы и определители

1.1. Матрицы и действия над ними

Матрицей размера **m × n** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк и **n** столбцов

Числа, составляющие матрицу, называются <u>элементами</u> матрицы

Обозначение:

$\underset{m\times n}{A}$ **- матрица размерности *m* х *n***

a_{ij} **- элемент матрицы *i* –ой строки и *j* -го столбца**

где

$$i=1,2\dots m$$
$$j=1,2\dots n$$

Матрица размерности m × n

$$\underset{m\times n}{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Две матрицы называются <u>равными,</u> если у них одинаковая размерность и совпадают строки и столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется <u>квадратной.</u>

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица размерности 3х3

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются диагональными.

Если в квадратной матрице все диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, то она называется единичной.

Единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица любого размера называется <u>нулевой</u>, если все ее элементы равны 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица

Матрица, состоящая из одной строки, называется <u>матрицей-строкой</u> или <u>вектором-строкой</u>.

$$\underset{1\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Матрица-строка

Матрица, состоящая из одного столбца, называется <u>матрицей-столбцом</u> или <u>вектором-столбцом</u>.

$$\underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец

С помощью матриц удобно описывать различного рода зависимости.

<u>Например:</u>

Распределение ресурсов по отраслям экономики:

Ресурсы	***Промышленность***	***с/хозяйство***
Эл. энергия	***8***	***7.2***
Труд. ресурсы	***5***	***3***
Водные ресурсы	***4.5***	***5.5***

Эту зависимость можно представить в виде матрицы:

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Где элемент a_{ij} показывает сколько i – го ресурса потребляет j – отрасль.

Например, a_{32} показывает, сколько воды потребляет сельское хозяйство.

1.2. Действия над матрицами

1.2.1. Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Полученные произведения образуют итоговую матрицу.

Пусть дана матрица $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$

Умножаем ее на число λ: $\lambda \cdot A = B$

Где каждый элемент матрицы B:

$$\boxed{b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}}$$

Где: $i = 1,2\ldots m$

$j = 1,2\ldots n$

Например:

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot 2 & 0\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 0\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Сложение матриц

Складываются матрицы одинаковой размерности. Получается матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.

Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

Складываем их:

$$A + B = C$$

Где каждый элемент матрицы *С*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Аналогично проводится вычитание матриц.

Пример:

Найти сумму и разность матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i – ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй.

Пусть даны матрицы $\underset{m\times k}{A} = (a_{ij})$

$$\underset{k\times n}{B} = (b_{ij})$$

Умножаем их:

$$\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

Где каждый элемент матрицы *C*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}}$$

$$i = 1,2\ldots m$$

$$j = 1,2\ldots n$$

Пример:

Найти произведение матриц:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times 3}{A}\cdot \underset{3\times 2}{B}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 4+0\cdot 2\\ 1\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4+4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

Теперь перемножим матрицы в обратном порядке:

$$\underset{3\times2}{B}\cdot\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4\\ 1\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot0+4\cdot4\\ 0\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot3+4\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 3 & 16\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}}$$

Умножение матриц в общем случае некоммутативно:

$$\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

1.2.4. Транспонирование матриц

Матрица A^T называется <u>транспонированной</u> к матрице А, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример:

Транспонировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.3. Определитель матрицы

Определитель ***– это число, характеризующее квадратную матрицу.***

Обозначается:

$$|A| \qquad \Delta \qquad \det A$$

Определителем первого порядка матрицы

$$A = (a_{11})$$

называется число a_{11}

То есть: $\boxed{|A| = |a_{11}| = a_{11}}$

<u>Определителем второго порядка</u> **называется число, которое определяется по правилу:**

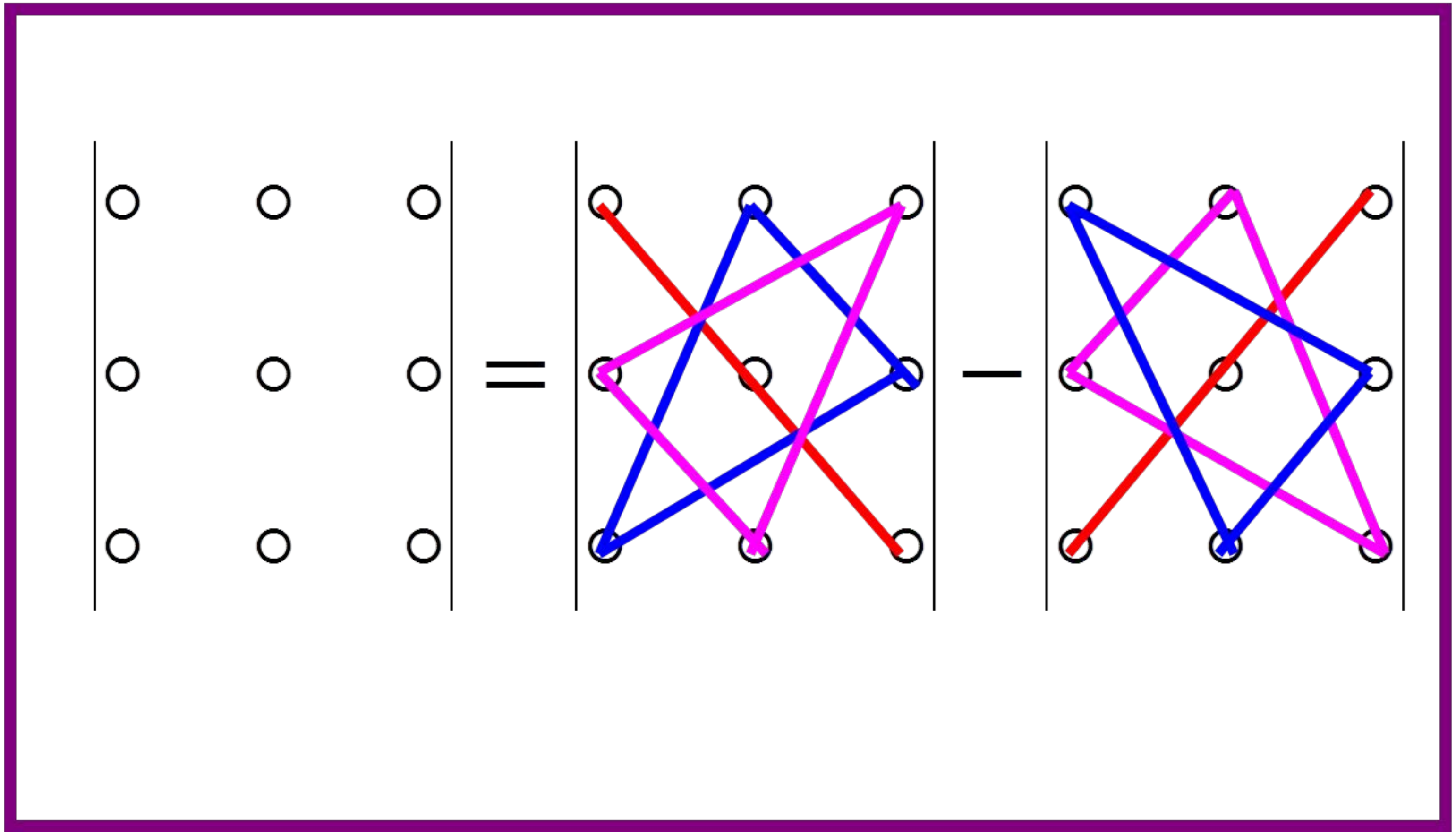
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Определителем третьего порядка</u> **называется число, которое определяется по правилу:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться <u>правилом треугольников:</u>



Пример:

Вычислить определители матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 5-(-3)\cdot 2=11$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1=5$$

<u>Минором</u> некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Минор элемента определителя a_{ij}

обозначается как M_{ij}

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}$$

$$S = i + j$$

В частности, минор элемента a_{11}

определителя третьего порядка найдется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

Свойства определителей:

1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$\boxed{|A| = |A^T|}$$

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5$$

2

Перестановка двух строк или столбцов определителя эквивалентна умножению его на (–1).

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = -5$$

3

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$

4

Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-2+2-2+4-2=4$$

Выносим из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(2-1+1-1+2-1) = 2\cdot 2 = 4$$

5

Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответственные элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Первую строку умножаем на 2 и складываем со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$

6

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik}$$

Пример:

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33}$$

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+6+16-24-3-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+12-16-2-3 = -3$$

Подставляем полученный результат:

$$= \; 6 + (-3) = 3$$

1.4. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

где E – единичная матрица

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1

Определяем, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.

2

Находим определитель матрицы. Если он равен нулю, то обратной матрицы не существует.

3

Заменяем каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением.

4

Полученную матрицу транспонируем.

5

Каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы. Получаем матрицу, обратную к данной.

6

Делаем проверку. Для этого перемножаем полученную и исходную матрицы. Должна получиться единичная матрица.

Пример:

Найти матрицу, обратную к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Применяем алгоритм нахождения обратной матрицы.

1. **Матрица квадратная, следовательно обратная матрица для нее существует.**

2. **Находим определитель:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

3 **Находим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы:**

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^2 \cdot M_{22} = 2$$

Составляем из полученных значений матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 **Транспонируем ее:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5 **Каждый элемент матрицы делим на определитель Δ=1 и получаем обратную матрицу:**

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

6 **Проверяем:**

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

2. Системы линейных алгебраических уравнений

2.1. Понятие системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n переменными в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Где числа $a_{ij} \quad (i = 1,2...m, \quad j = 1,2...n)$

называются коэффициентами при переменных;

b_i **- свободные члены;**

x_j **- переменные.**

Иначе систему (1) можно записать:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2...m)}$$

Решением системы линейных уравнений называется такая совокупность чисел

$k_1, k_2, \ldots k_n$

при подстановке которых каждое уравнение обращается в верное равенство.

Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Система называется определенной, если она имеет ровно одно решение.

Система называется неопределенной, если она имеет более одного решения.

Система называется несовместной, если она не имеет решений.

Запишем систему уравнений в матричной форме.

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов при переменных или матрица системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

–матрица-столбец переменных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

–матрица-столбец свободных членов

Рассмотрим произведение:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

- матрица-столбец, элементами которой являются левые части системы (1).

Тогда в матричной форме систему (1) можно записать:

$$\boxed{AX=B}$$

2.2. Решение систем линейных уравнений

2.2.1. Метод Гаусса

Этот метод заключается в последовательном исключении переменных из системы уравнений.

Дана система из трех уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Матрица системы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Если включить в нее столбец свободных членов, то она будет называться <u>расширенной:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ \boxed{2} & 3 & -1 & 4 \\ \boxed{3} & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)(-2)(-3)$$

Исключим переменную x_1 из всех уравнений, кроме первого. Это эквивалентно получению нулей во 2-й и 3-ей строке первого столбца.

Для этого умножим первое уравнение на (-2) и (-3) и сложим соответственно, со 2-м и 3-м уравнением:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & \boxed{-5} & -13 & -18 \end{array}\right) (-5) \Rightarrow$$

Теперь исключим переменную x_2 из третьего уравнения (получим ноль в 3-ей строке 2-го столбца).

Для этого умножим 2-е уравнение на (-5) и сложим его с третьим:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{array}\right)$$

Запишем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \\ 22x_3 = 22 \end{cases}$$

Последовательно находим:

$$x_3 = 1 \Rightarrow -x_2 - 7 = -8 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

2.2.2. Метод Крамера

Пусть дана система (1). Рассмотрим частный случай, когда число неизвестных равно числу уравнений.

Найдем определитель матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Пусть Δ_J – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j–го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \cdots$$

Тогда, если определитель матрицы системы не равен 0, то система уравнений (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

Формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2 \ldots n)$$

Решим систему из предыдущего примера.

Матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Находим ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 6 + 6 - 27 + 16 + 1 = -22$$

Найдем определители Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -72 + 0 + 12 - 0 + 6 + 32 = -22$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 18 + 0 - 36 + 48 + 0 = -22$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 24 + 12 - 54 - 0 - 4 = -22$$

Используем формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Замечание:

Если $\Delta=0$ при том, что хотя бы один из определителей Δ_j не равен нулю, то система (1) несовместна.

Если $\Delta=0$ и все Δ_j тоже равны нулю, то система неопределенная, так как она имеет бесконечное множество решений.

2.2.3. Метод обратной матрицы

Пусть дана система (1). Снова рассмотрим случай, когда число неизвестных равно числу уравнений.

В матричной форме система имеет вид:

$$A \cdot X = B$$

Пусть существует обратная матрица A^{-1} к матрице системы A.

Тогда решением матричного уравнения будет матрица-столбец X:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Проверяем:

$$A \cdot A^{-1} \cdot B = E \cdot B = B$$

Решим систему из предыдущего примера.

Матрица системы и столбец свободных членов имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

Ранее был найден определитель матрицы А:

$$|A| = -22$$

Находим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы А :

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 1 = -11$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8 + 3) = 5$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-8 - 3) = 11$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 6) = 5$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

Составляем матрицу из найденных алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} -11 & 5 & -7 \\ 11 & -13 & 5 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -11 \\ 5 & -13 & 7 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Транспонируем ее и делим на определитель. Получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -11 & 11 & -11 \\ 5 & -13 & 7 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Находим решение системы уравнений:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -11 & 11 & -11 \\ 5 & -13 & 7 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} (-11)\cdot 6 + 11\cdot 4 + (-11)\cdot 0 \\ 5\cdot 6 + (-13)\cdot 4 + 7\cdot 0 \\ (-7)\cdot 6 + 5\cdot 4 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ -22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

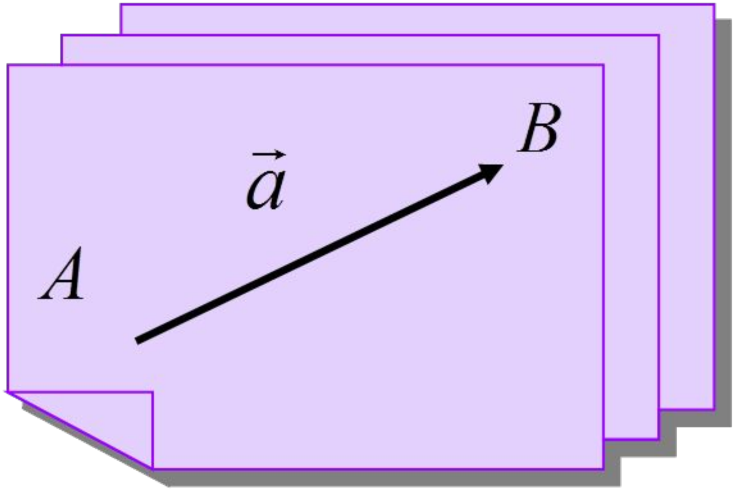
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Векторы и действия над ними

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Направленный отрезок, на котором заданы начало, конец и направление, называется вектором.

Обозначается: $\vec{a}\ ;\ \overrightarrow{AB}$



<u>Длиной</u> или <u>модулем</u> вектора называется расстояние между его началом и концом.

Обозначается: $\left|\vec{a}\right|;\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются <u>коллинеарными.</u>

Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется <u>нулевым</u>.

В любой системе отсчета вектор характеризуется своими координатами.

Пусть в системе отсчета XYZ заданы координаты начала и конца вектора:

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

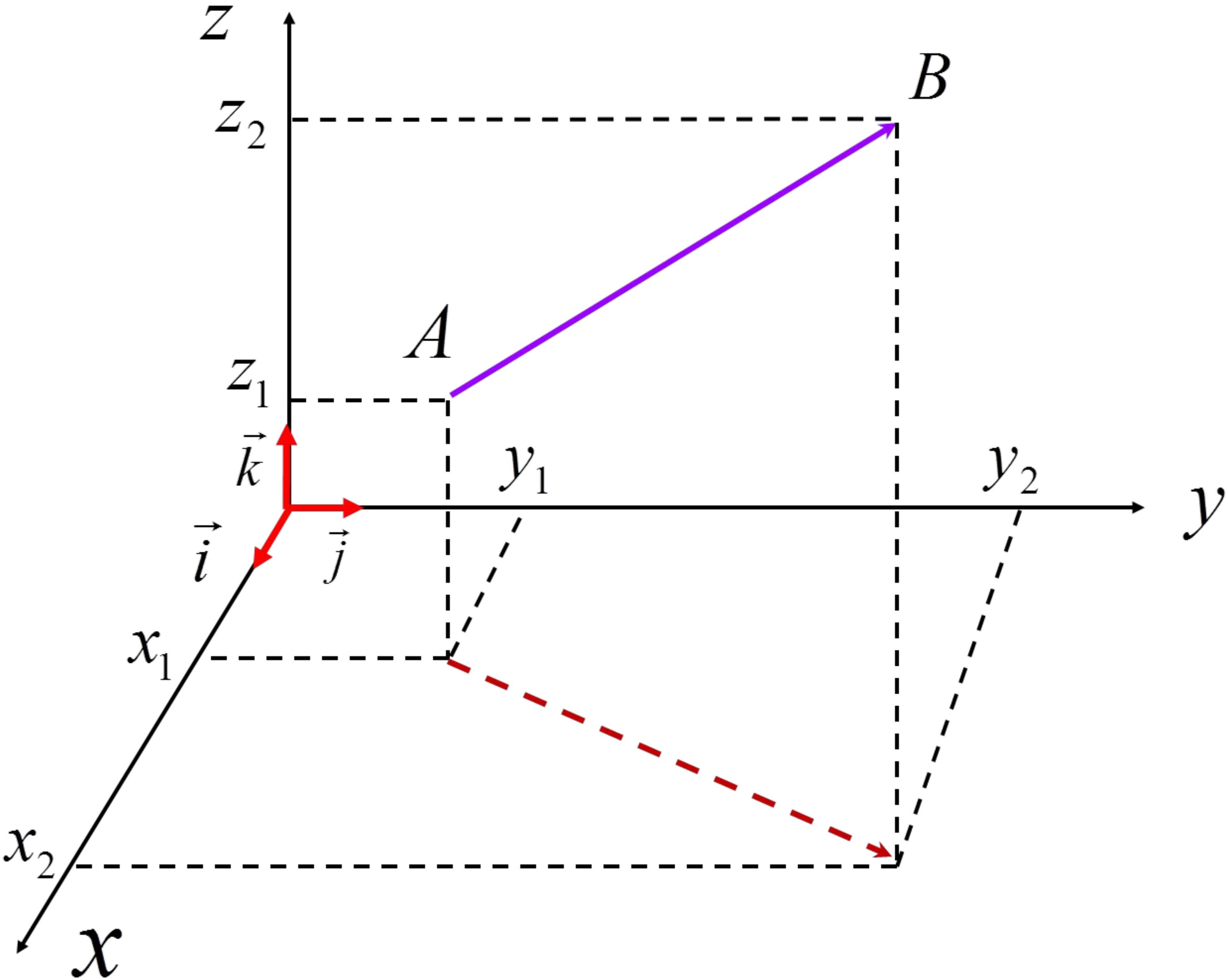
Тогда координаты вектора будут:

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

Где: $x = x_2 - x_1$ **Или:** $\overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

$$y = y_2 - y_1$$

$$z = z_2 - z_1$$


z
B
z2
A
z1
k
y1
y2
y
i
j
x1
x2
x

Длина вектора определяется по формуле:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Условие коллинеарности векторов

Пусть два вектора заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Если эти вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты должны быть пропорциональны:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$$

***Суммой** двух векторов будет вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат исходных векторов.*

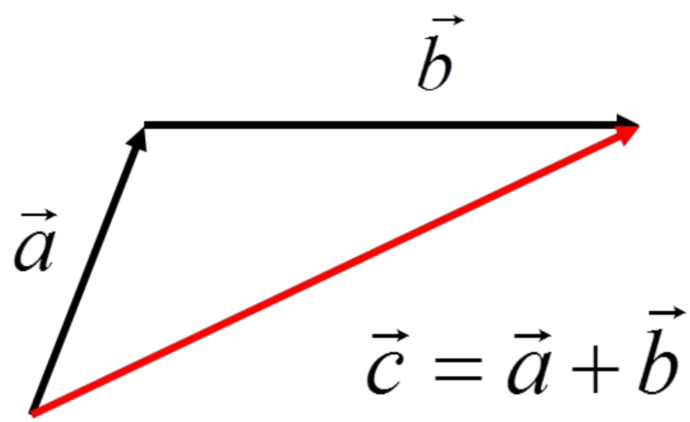
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$c_1 = a_1 + b_1 \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad c_3 = a_3 + b_3$$

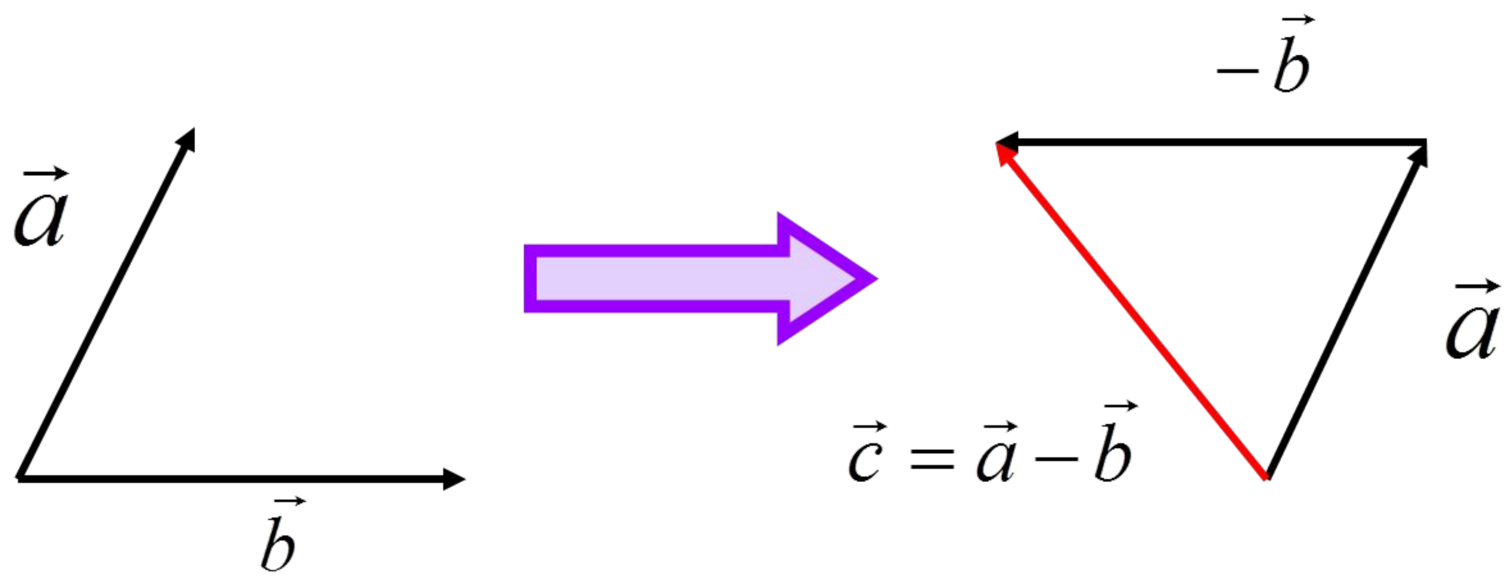
Для построения суммы векторов, нужно совместить конец первого вектора с началом второго. Тогда вектор их суммы будет направлен от начала первого вектора к концу второго:



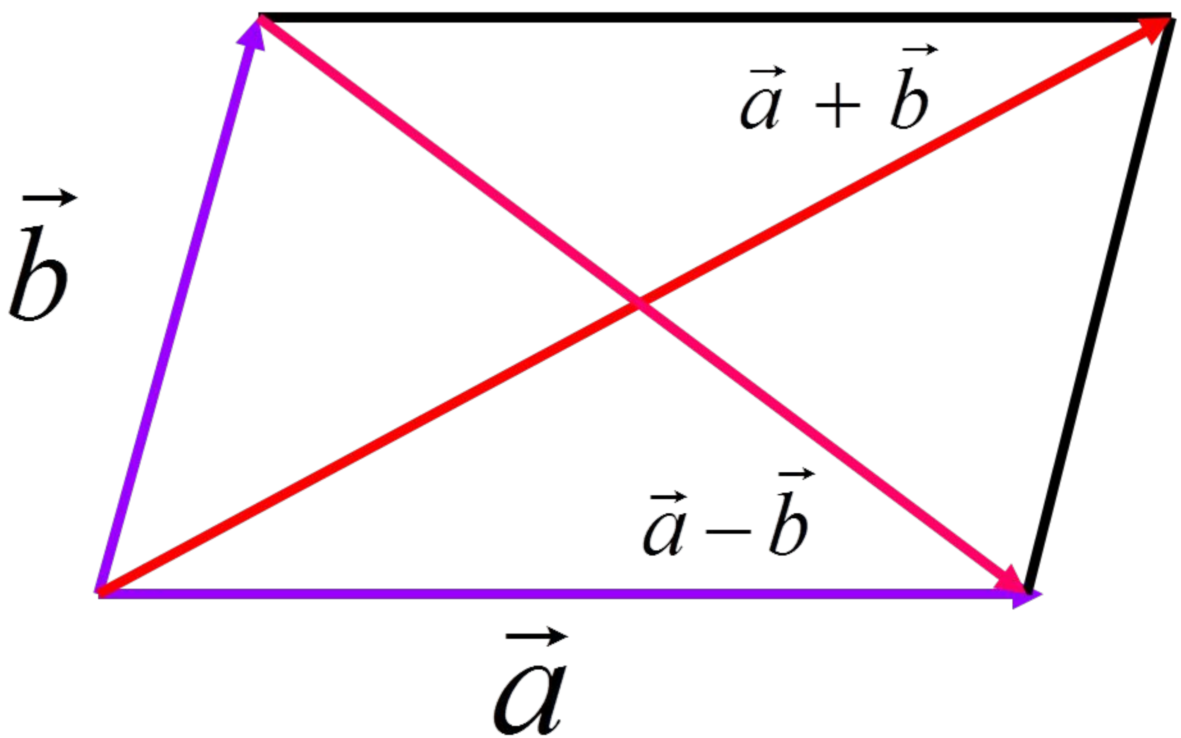
Аналогично определяется сумма нескольких векторов.

<u>Разностью</u> двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$

называется сумма векторов $\vec{a}+(-\vec{b})$



В параллелограмме, построенном на двух векторах, одна диагональ представляет собой сумму этих векторов, а другая – разность:



Произведением ***вектора на число будет вектор, координаты которого равны произведению соответствующих координат исходного вектора на это число.***

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{a} \cdot \lambda = \vec{c}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$c_1 = a_1 \cdot \lambda \quad c_2 = a_2 \cdot \lambda \quad c_3 = a_3 \cdot \lambda$$

Геометрически смысл умножения вектора на число заключается в увеличении его длины в λ раз, если $|\lambda|>1$, и в ее сокращении во столько же раз при $|\lambda|<1$.

<u>Скалярным произведением</u> двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a} \stackrel{\wedge}{;} \vec{b}\right)$$

Если два вектора заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

То скалярное произведение выразится следующим образом:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Отсюда можно выразить угол между двумя векторами:

$$\boxed{\cos\left(\vec{a} \stackrel{\wedge}{;} \vec{b}\right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

Условие перпендикулярности векторов

Если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

4. Уравнение линии

4.1. Уравнение прямой на плоскости

Уравнением линии на плоскости XOY называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде

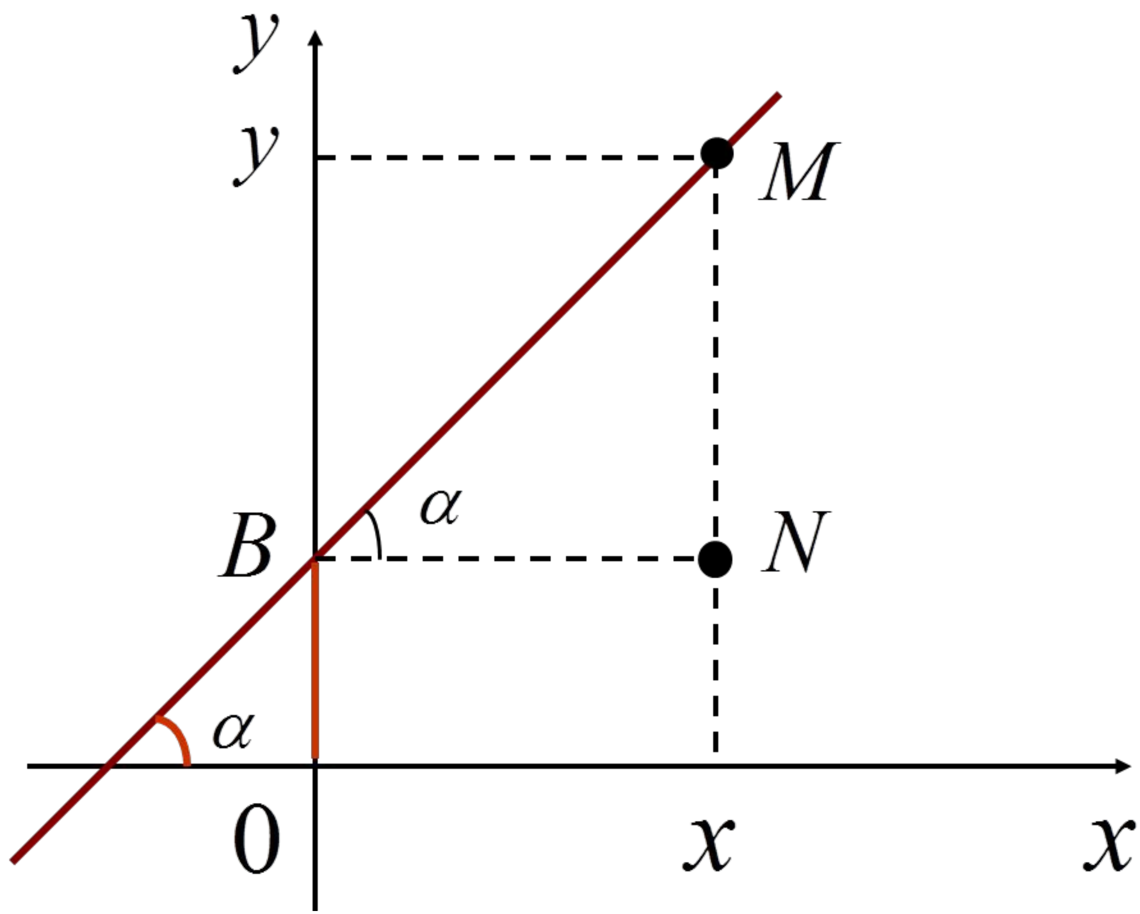
$$\boxed{F(x, y) = 0} \quad \textbf{или} \quad \boxed{y = f(x)}$$

Способы задания прямой на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть задана прямая, пересекающая ось *y* в точке В *(0,в)* и образующая с осью х угол α $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Выберем на прямой произвольную точку *M(x,y)*.



y
y
M
α
B
N
α
0
x
x

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Координаты точки N *(x,в)*. Из треугольника *BMN*:

$$tg\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x} = k$$

k **– угловой коэффициент прямой.**

$$\boxed{y = kx + b}$$

1

Рассмотрим частные случаи:

1) $b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = kx$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.

2) $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad y = b$

- уравнение прямой, параллельной оси *x*.

3 $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad tg\,\dfrac{\pi}{2}$ **- не существует**

т.е. у вертикальной прямой нет углового коэффициента.

Уравнение прямой, параллельной оси *y*, в этом случае имеет вид

$$x = a$$

где *a* – отрезок, отсекаемый прямой на оси *x*.

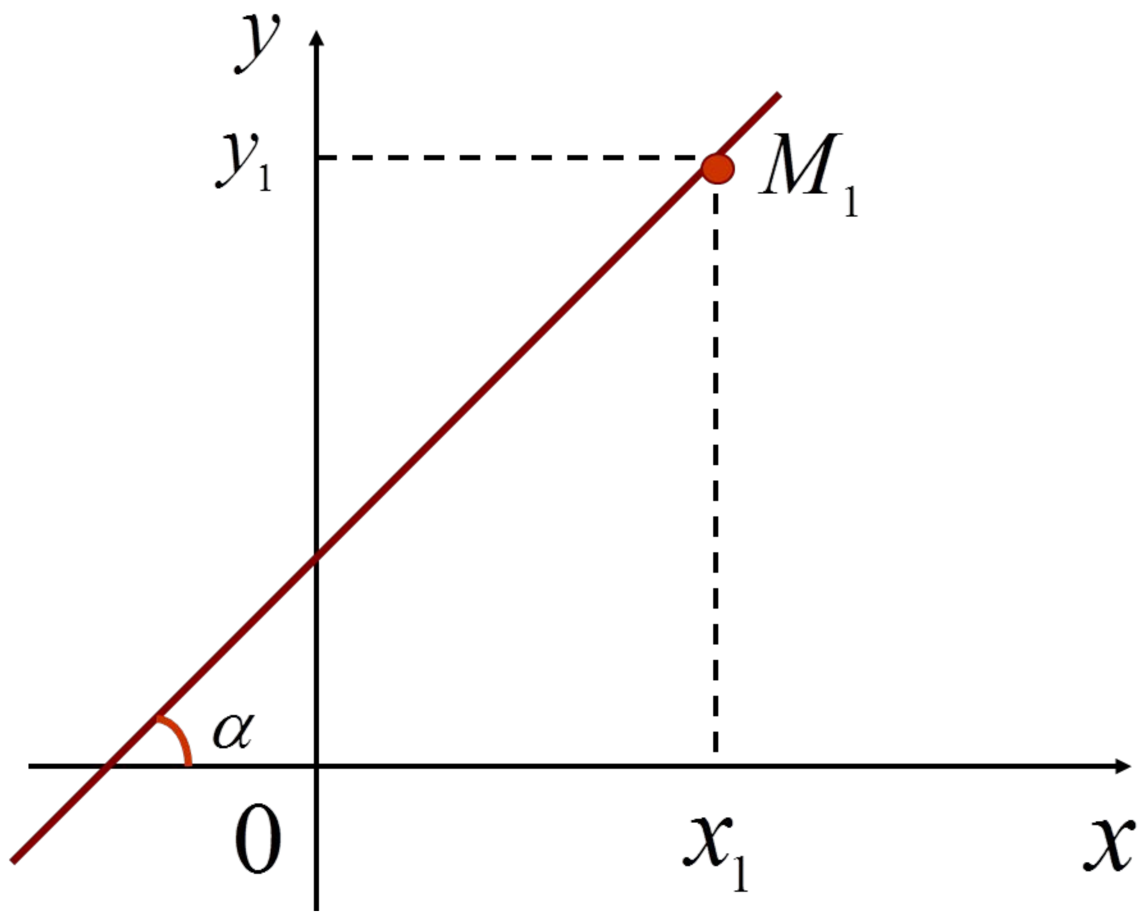
2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Пусть задана прямая, проходящая через заданную точку

$$M_1(x_1, y_1)$$

и образующая с осью *x* угол α

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$



y
y_1
M_1
α
0
x_1
x

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

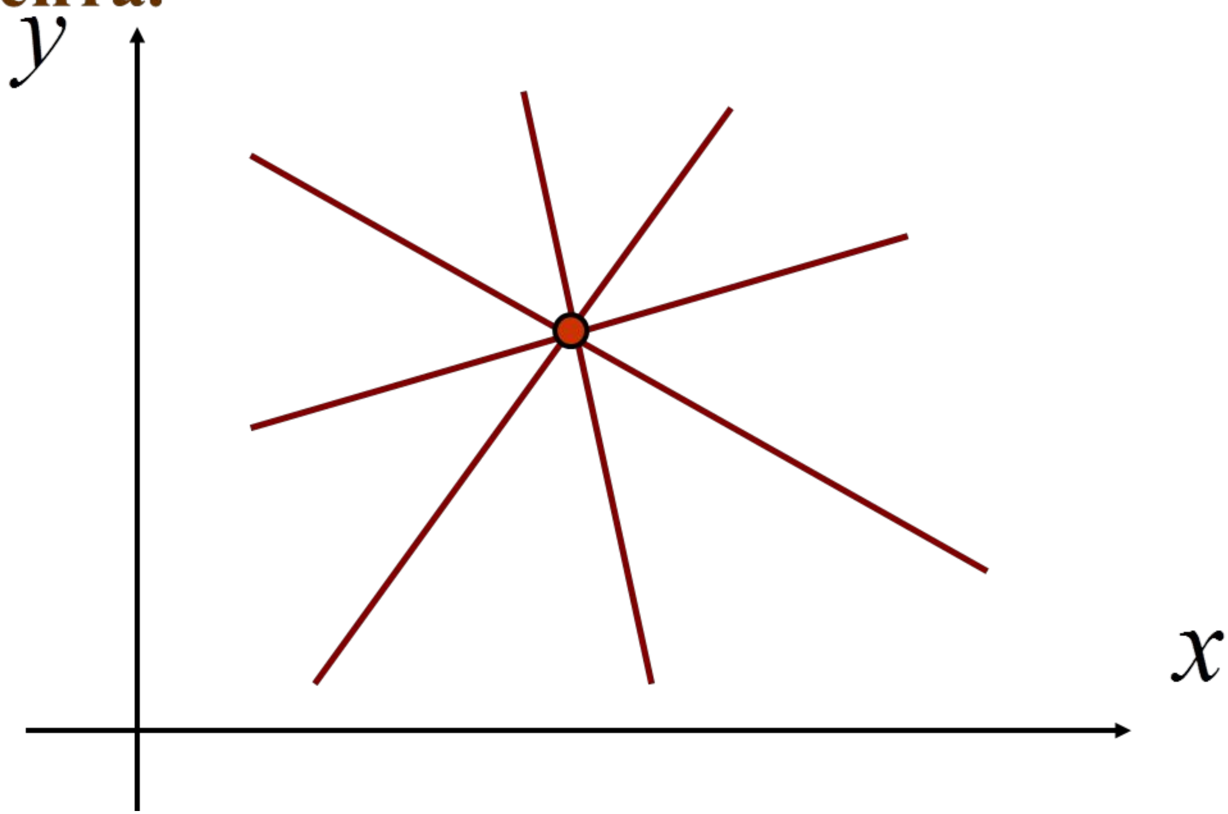
Т.к. точка M_1 лежит на прямой, ее координаты должны удовлетворять уравнению (1):

$$y_1 = kx_1 + b$$

Вычитаем это уравнение из уравнения (1):

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)} \qquad 2$$

Если в этом уравнении угловой коэффициент не определен, то оно задает пучок прямых, проходящих через данную точку, кроме прямой, параллельной оси y, не имеющей углового коэффициента.



3. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть задана прямая, проходящая через две точки:

$$M_1(x_1, y_1) \qquad M_2(x_2, y_2)$$

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Т.к. точка M_2 лежит на данной прямой, подставим ее координаты в уравнение пучка прямых:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Подставляем *k* в уравнение пучка прямых. Тем самым мы выделяем из этого пучка прямую, проходящую через две данные точки:

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (3)$$

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки A(–5,4) и B(3,–2).

<u>РЕШЕНИЕ.</u>

Подставляем координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{y-4}{-2-4}=\frac{x+5}{3+5}$$

$$y-4=-\frac{6}{8}(x+5)$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$$

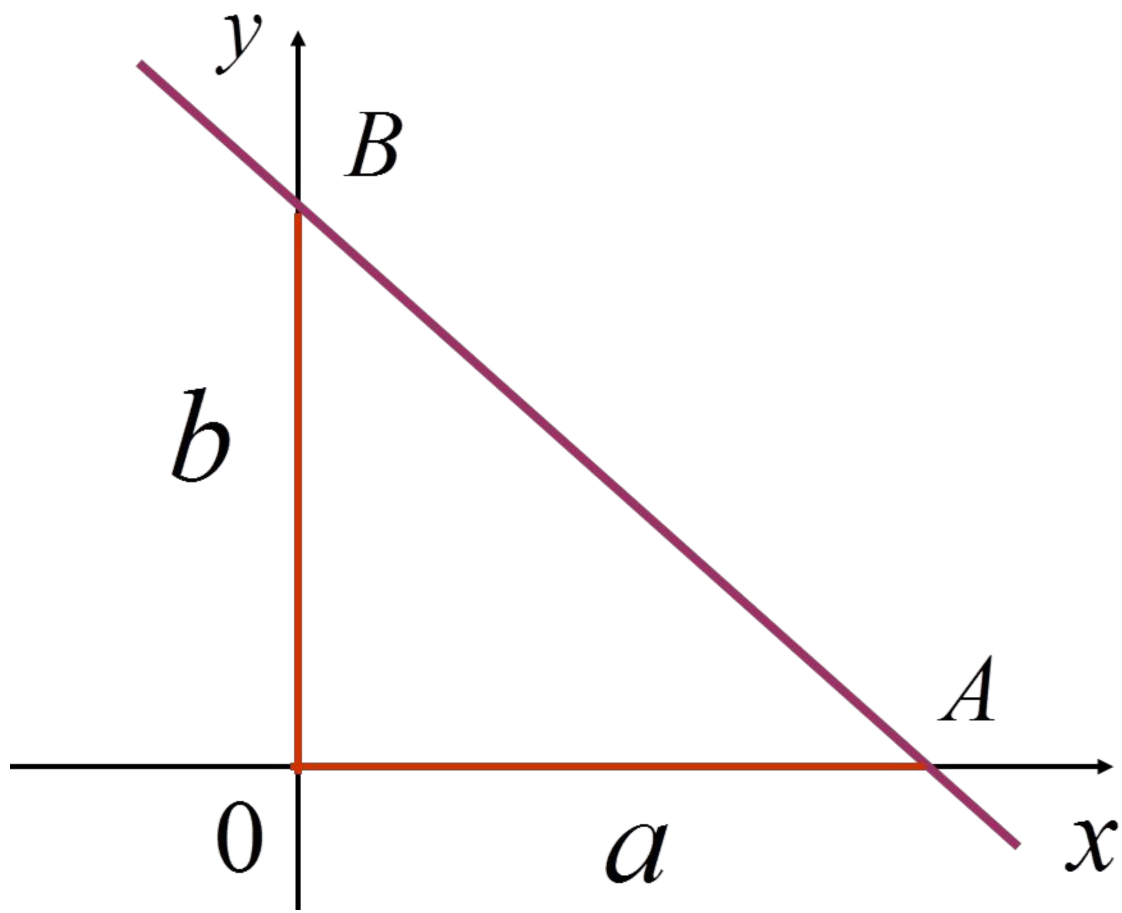
4. Уравнение прямой в отрезках

Пусть задана прямая, отсекающая на осях координат отрезки, равные *а* и *в*.

Это значит, что она проходит через точки

$$A(a,0) \qquad B(0,b)$$

Найдем уравнение этой прямой.


y
B
b
A
0
a
x

Уравнение прямой в отрезках

Подставим координаты точек А и В в уравнение прямой, проходящей через две точки (3):

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a} \Rightarrow \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a} \Rightarrow \frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (4)$$

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ если она отсекает от положительной полуоси y отрезок, вдвое больший, чем на положительной полуоси x.

РЕШЕНИЕ.

По условию задачи, $b = 2a$

Подставляем в уравнение (4): $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$

Точка *A(2,-1)* лежит на этой прямой, следовательно ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$\frac{2}{a} + \frac{-1}{2a} = 1$$

$$\frac{-1+4}{2a} = 1 \qquad a = \frac{3}{2} \qquad \frac{x}{1.5} + \frac{y}{3} = 1$$

5. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

5

Рассмотрим частные случаи этого уравнения и покажем, что при любых значениях коэффициентов *A*, *B* (не равных нулю одновременно) и *C*, это уравнение есть уравнение прямой на плоскости.

1

$$\boxed{B \neq 0}$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Обозначим: $-\dfrac{A}{B} = k$ $\quad -\dfrac{C}{B} = b$

Тогда получаем уравнение (1):

$$y = kx + b$$

2

$$B \neq 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид: $y = -\dfrac{A}{B}x$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.

3

$$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C \neq 0$$

Получаем уравнение: $y = -\dfrac{C}{B}$

- уравнение прямой, параллельной оси *x*.

4

$$\boxed{B \neq 0 \quad A = 0 \quad C = 0}$$

Тогда уравнение имеет вид: $y = 0$

- уравнение оси *x*.

5

$$\boxed{B = 0 \quad A \neq 0 \quad C \neq 0}$$

Получаем уравнение: $x = -\dfrac{C}{A}$

- уравнение прямой, параллельной оси *y*.

Общее уравнение прямой

6

$$\boxed{B = 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0}$$

Тогда уравнение имеет вид: $x = 0$

- уравнение оси *y*.

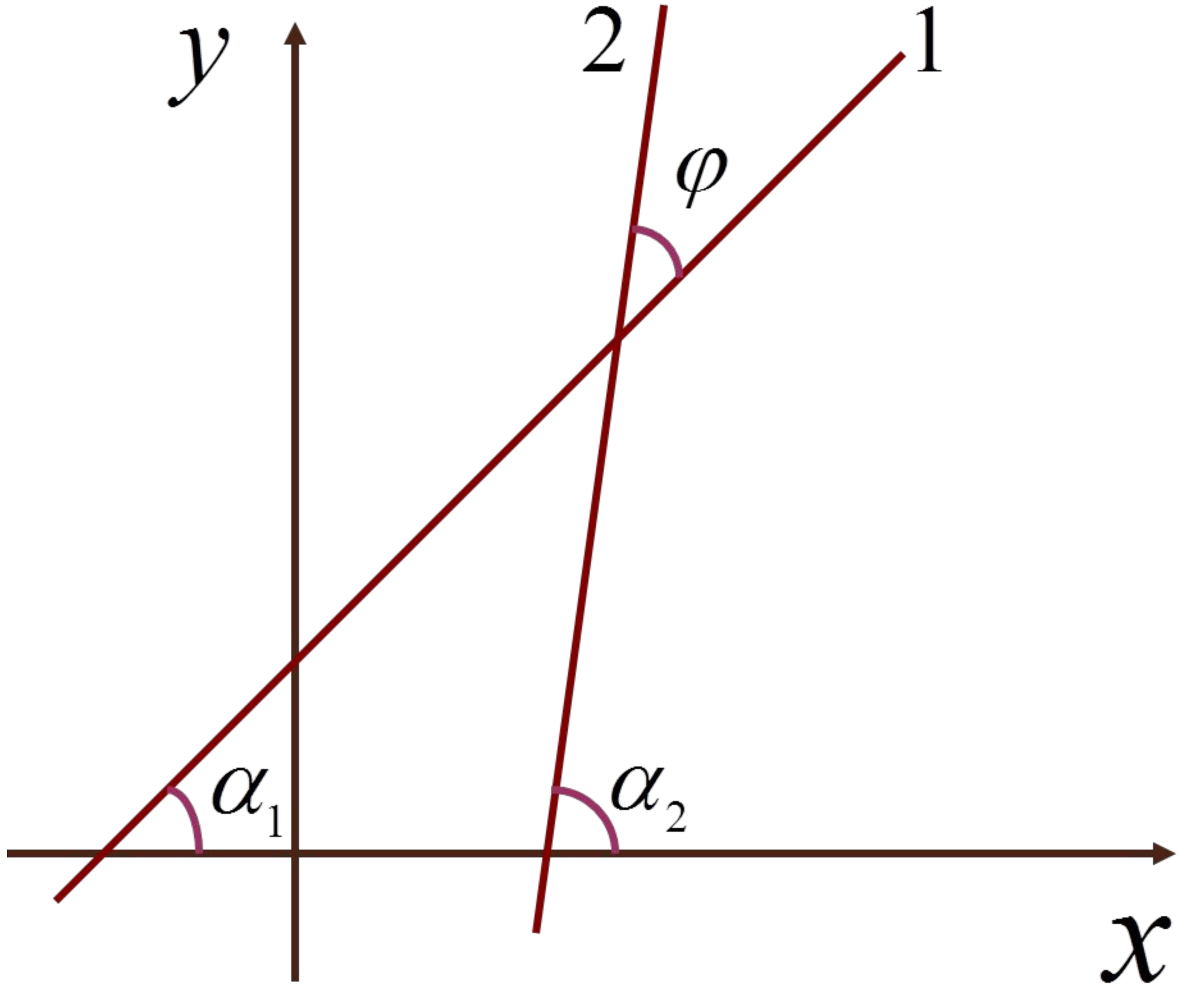
Таким образом, при любых значениях коэффициентов *A*, *B* (не равных нулю одновременно) и *C*, уравнение (5) есть уравнение прямой на плоскости.

4.2. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть заданы две прямые

$$y = k_1 x + b_1 \qquad\qquad y = k_2 x + b_2$$

Выразим угол между этими прямыми через их угловые коэффициенты.



y
2
1
φ
α_1
α_2
x

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$k_1 = tg\alpha_1 \qquad\qquad k_2 = tg\alpha_2$$

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

угол между двумя прямыми

Стрелка указывает, что угол отсчитывается против часовой стрелки от прямой 1 к прямой 2.

Если прямые 1 и 2 параллельны, то

$$\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad tg\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{k_1 = k_2}}$$

необходимое и достаточное условие параллельности прямых

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны.

Если прямые 1 и 2 перпендикулярны, то

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow ctg\varphi = ctg\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow ctg\varphi = \frac{1}{tg\varphi} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{k_1 = -\frac{1}{k_2}}}$$

необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

ПРИМЕР.

Составить уравнения прямых, проходящих через точку А(2,1), одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой

$$3x - 2y + 2 = 0$$

РЕШЕНИЕ:

1. По условию параллельности прямых

$$k_1 = k_2$$

Найдем угловой коэффициент заданной прямой:

$$3x - 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{3}{2}$$

Тогда

$$k_2 = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + b$$

Т.к. точка А лежит на искомой прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$1 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

И уравнение искомой прямой будет:

$$y = \frac{3}{2}x - 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2y - 3x - 4 = 0}$$

2. По условию перпендикулярности прямых

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Найдем угловой коэффициент искомой прямой:

$$k_3 = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + b$$

Снова координаты точки А удовлетворяют этому уравнению:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7}{3}$$

И уравнение искомой прямой будет:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{3y + 2x - 7 = 0}$$

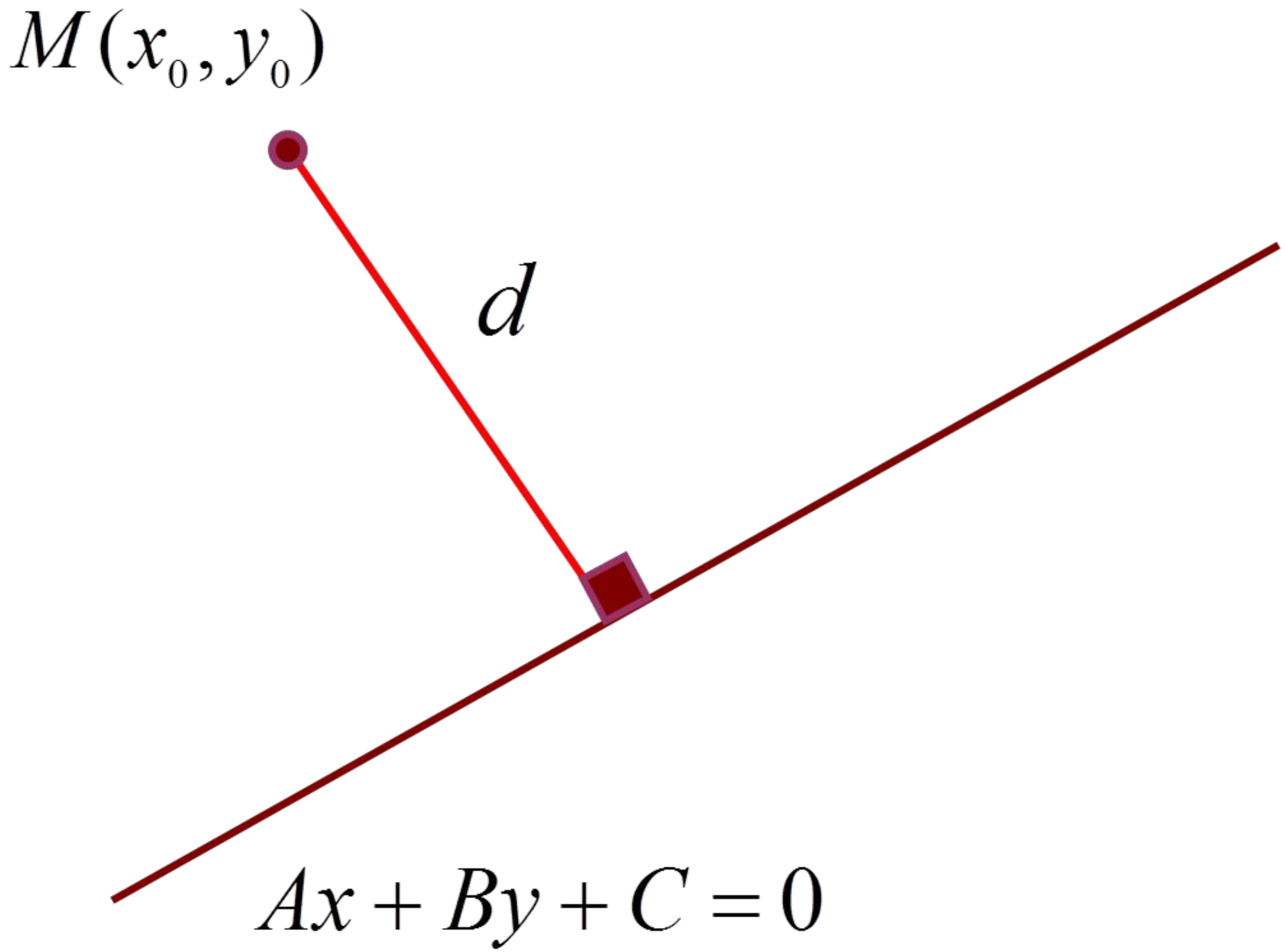
Пусть дана точка $M(x_0,y_0)$ и прямая

$$Ax + By + C = 0$$

Под расстоянием от точки M до прямой понимается длина перпендикуляра d, опущенного из точки M на данную прямую.

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

расстояние от точки до прямой

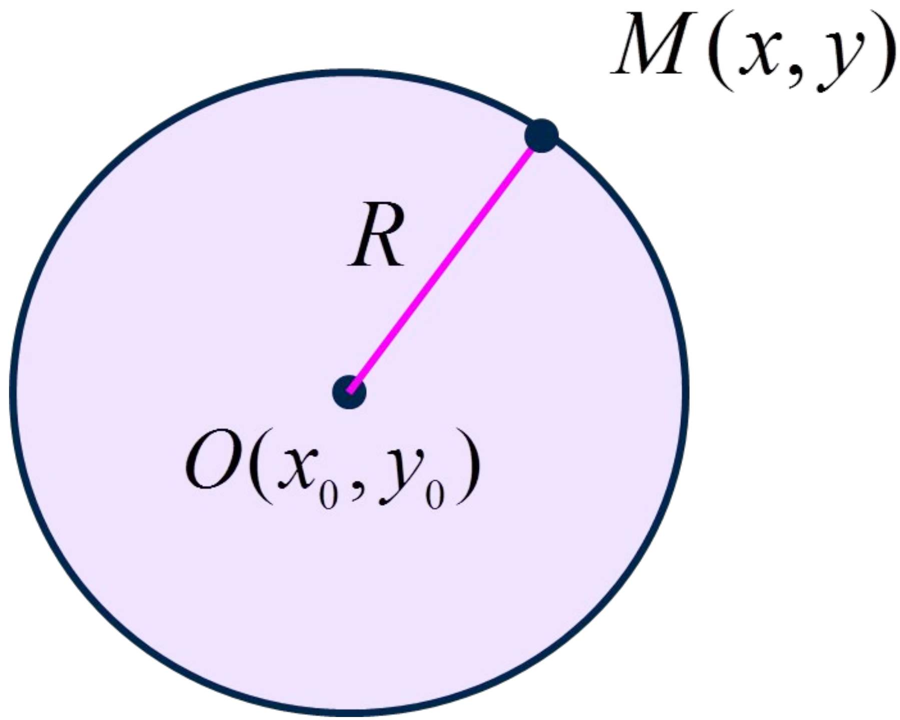

$M(x_0, y_0)$
d
$Ax + By + C = 0$

4.3. Окружность и эллипс

Окружность и эллипс относятся к кривым второго порядка, которые описываются уравнениями второй степени с двумя переменными.

Пусть дана окружность радиуса *R* с центром в точке $O(x_0,y_0)$. Найдем ее уравнение.

Выберем на окружности произвольную точку *M(x,y)*.


$M(x, y)$
R
$O(x_0, y_0)$

Нормальное уравнение окружности

Для точки *M* выполняется равенство:

$$OM = R$$

Используем формулу расстояния между двумя точками:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$$

Возводим обе части выражения в квадрат:

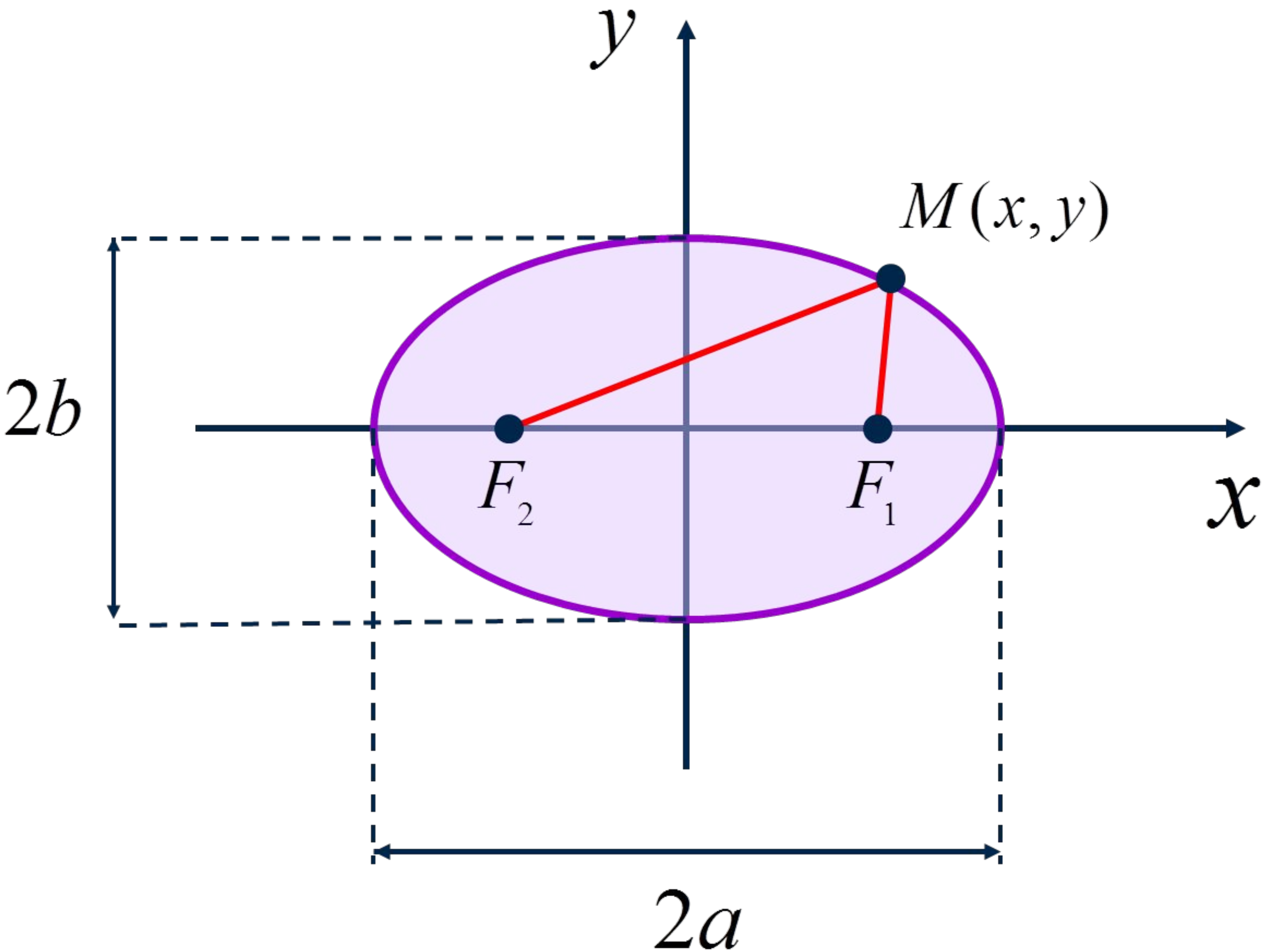
$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$$

Каноническое уравнение окружности

Если центр окружности лежит в начале координат (0,0):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ЭЛЛИПСОМ называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.



y
M (x, y)
2b
F2
F1
x
2a

Введем обозначения:

$$F_1(c;0) \qquad F_2(-c;0)$$

$$|F_1F_2| = 2c$$

a **– большая полуось эллипса**

b **– малая полуось эллипса**

Для любой точки *M(x,y)*, принадлежащей эллипсу, по определению выполняется равенство:

$$|F_1M| + |MF_2| = 2a$$

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Отношение фокусного расстояния к длине большой оси эллипса называется ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Для эллипса $c < a$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

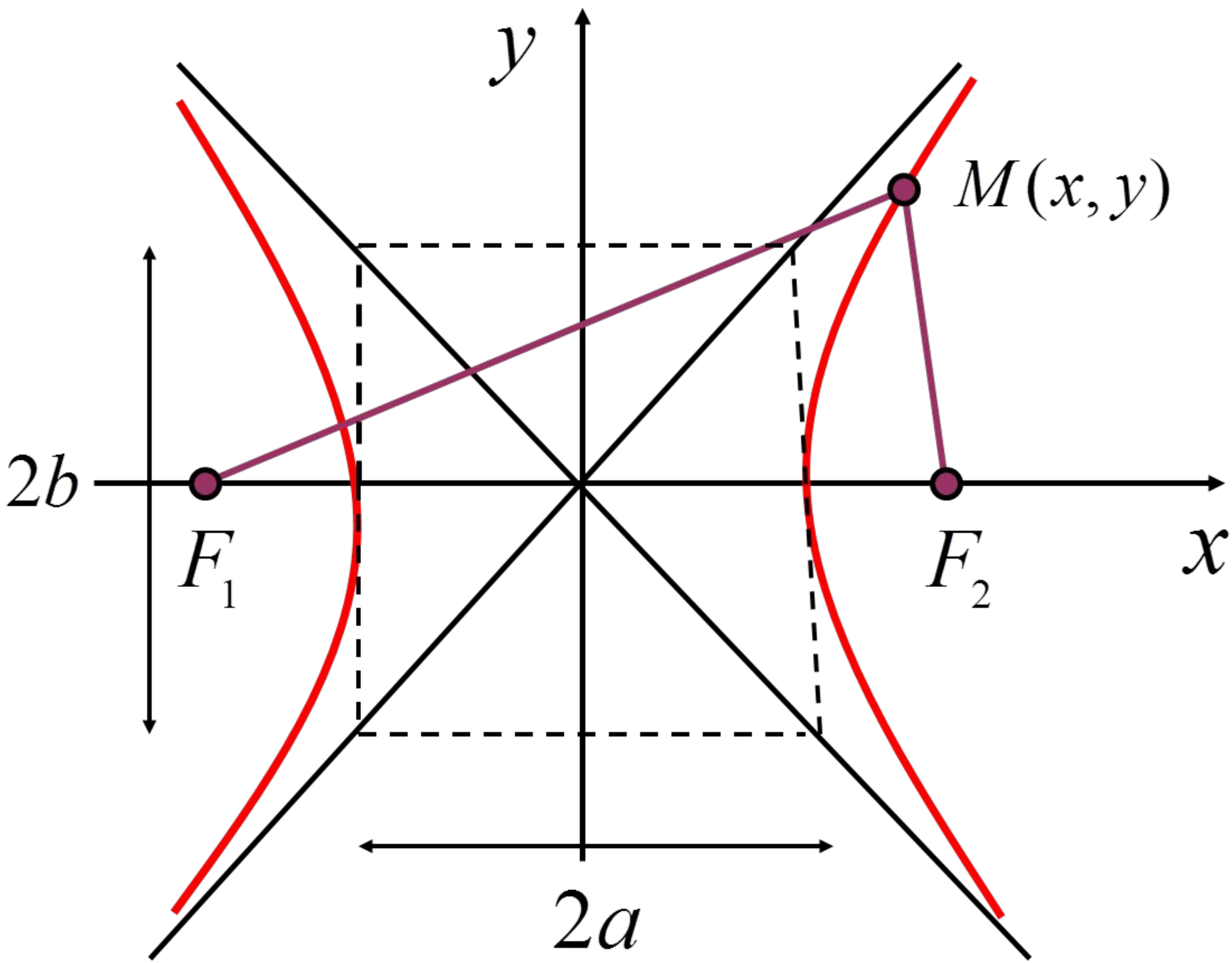
Следовательно, для эллипса $0 < \varepsilon < 1$

Чем меньше отношение малой и большой полуосей, тем больше эксцентриситет и тем более вытянутым будет эллипс вдоль оси *x*, и наоборот.

При $b = a \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0$ **имеем окружность.**

4.4. Гипербола

ГИПЕРБОЛОЙ ***называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (меньшая, чем расстояние между фокусами)***



y
M(x, y)
2b
F1
F2
x
2a

Введем обозначения:

$$F_1(c;0) \qquad F_2(-c;0)$$

$$|F_1F_2| = 2c$$

a **– действительная полуось гиперболы**

b **– мнимая полуось гиперболы**

Для любой точки *M(x,y)*, принадлежащей гиперболе, по определению выполняется равенство:

$$|F_1M - MF_2| = 2a$$

Прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты

$$\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad -\frac{b}{a}$$

называются <u>асимптотами</u> гиперболы.

Асимптоты делят плоскость на 4 области, в двух из которых расположена гипербола.

Точки гиперболы по мере удавления от оси y приближаются к асимптотам, т.е. расстояние между точками гиперболы и асимптотой при увеличении х уменьшается и стремится к нулю.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Отношение фокусного расстояния к длине действительной оси гиперболы называется ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Для гиперболы $c > a$

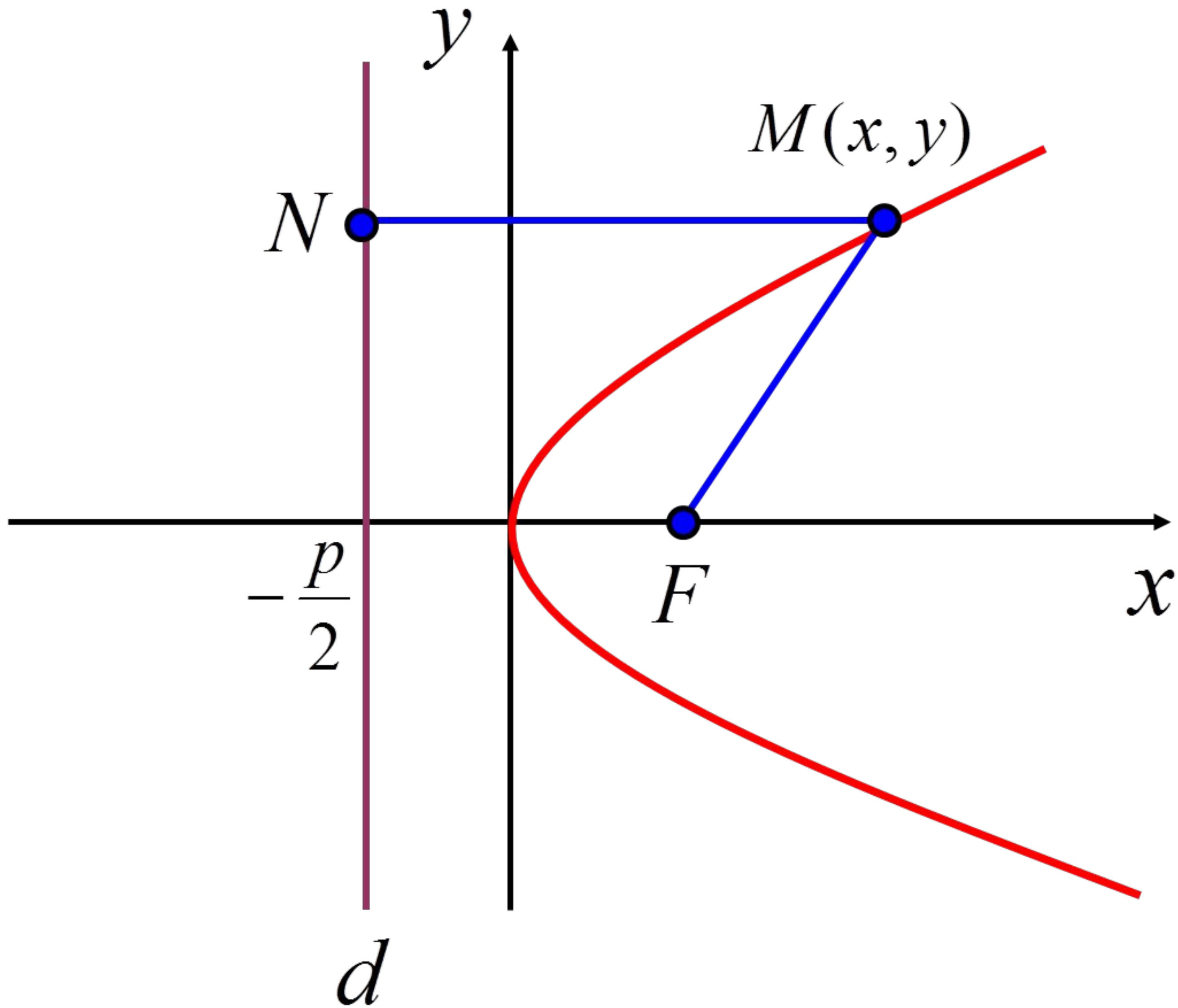
$$\Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

Следовательно, для гиперболы $\varepsilon > 1$

Чем меньше отношение мнимой и действительной полуосей, тем меньше эксцентриситет и тем более гипербола будет прижата к оси *x*, и наоборот.

4.5. Парабола

***ПАРАБОЛОЙ* называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом параболы и данной прямой, называемой директрисой.**


y
M(x, y)
N
F
x
$-\frac{p}{2}$
d

Введем обозначения: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

Расстояние между фокусом и директрисой параболы равно *p*.

Для любой точки *M(x,y)*, принадлежащей параболе, по определению выполняется равенство:

$$|FM| = |NM|$$

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px$$

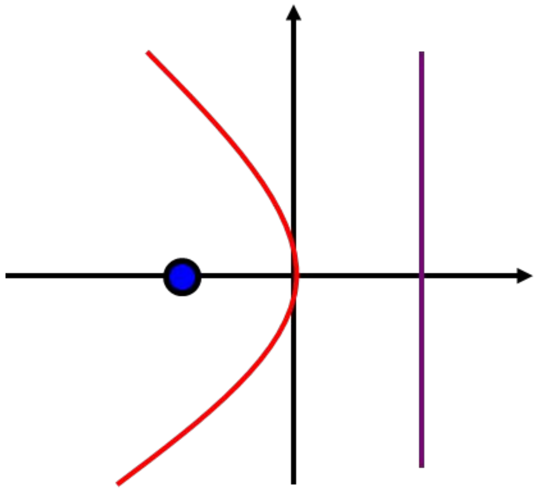
Уравнение директрисы параболы имеет вид:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Расстояние $|FM|$

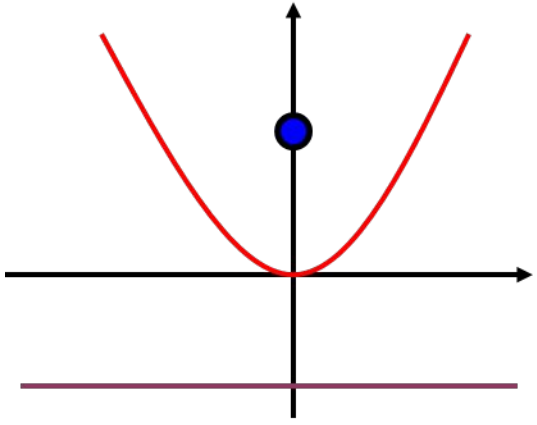
называется <u>фокальным радиусом</u> точки M, p называется <u>параметром</u> параболы.

В зависимости от значения этих параметров, возможны различные способы ориентации параболы на плоскости.



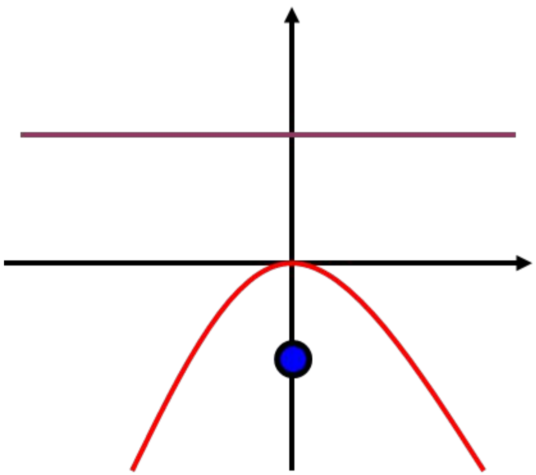
$$F\left(-\frac{p}{2};0\right) \qquad x=\frac{p}{2}$$

$$\boxed{y^2=-2px}$$



$$F\left(0; \frac{p}{2}\right) \qquad y = -\frac{p}{2}$$

$$\boxed{x^2 = 2py}$$



$$F\left(0;-\frac{p}{2}\right) \qquad y=\frac{p}{2}$$

$$\boxed{x^2=-2py}$$