Cap. 2 Sisteme determinate de ecuaţii algebrice liniare

2.1 Formularea problemei

☞ se consideră sistemul de *n* ecuaţii algebrice liniare cu *n* necunoscute:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

☞ <u>problema de calcul</u> → determinarea unei soluţii $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ care să verifice sistemul dat

Definiţie:

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ - *<u>inversabilă</u> (nesingulară) dacă există o matrice* $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ *astfel încât să*

fie îndeplinită relaţia: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$ $(\boldsymbol{A}^{-1} \xleftrightarrow{\text{notație}} \boldsymbol{X})$

Teoremă de existenţă şi unicitate:

Dacă matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă, atunci oricare ar fi vectorul $\underline{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ există şi este unică soluţia sistemului dat: $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

➢ <u>Observaţii</u>:

1. În practică nu se recomandă calculul matricei inverse şi apoi aplicarea relaţiei $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$ din cauza erorilor ce afectează operaţia de inversare;

2. Nu se recomandă rezolvarea ecuaţiei prin regula Cramer din cauza numărului mare de operaţii în virgulă mobilă.

☞ Exemplu: $n = 20$ $\rightarrow$ de calculat 21 determinanţi → 20! termeni

19 înmulţiri/ termen

3.46 ani ← i7-8086k (423.2 GFLOPS)

METODE NUMERICE – curs 3

☞ *__Metodele numerice de rezolvare__* a unui sistem determinat de ecuaţii algebrice liniare

__metode directe__:

- sistem echivalent, direct rezolvabil prin mijloace elementare □ eliminarea progresivă a necunoscutelor (*eliminare gaussiană)*
- prin transformări elementare de echivalenţă, se aduce matricea A la anumite forme tipice:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice superior triunghiulară — *matrice inferior triunghiulară*

- procedura de transformare □ *__triangularizare__*

__metode iterative (indirecte)__:

- construirea unui şir de aproximaţii pentru soluţia sistemului, convergent la aceasta:

$$\left\{\underline{x}^{[k]}\right\}_{k\geq 0} \xrightarrow{k\to\infty} \underline{x}$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \| \underline{x} - \underline{x}^{[k]} \|_{\alpha} = 0$$

- calculele se opresc la un index de iterare [s], când este îndeplinită condiţia:

$$\| \underline{x}^{[s]} - \underline{x}^{[s-1]} \|_{\alpha} \leq \varepsilon_{impus}$$

2.2 Rezolvarea sistemelor prin triangularizare directă

2.2.1 Principiul metodei

☞ se consideră sistemul de *n* ecuaţii algebrice liniare cu *n* necunoscute:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

☞ notaţie: $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$

☞ matricile: $[a_{11}]$, …, $[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n-1 \\ 1\le j\le n-1}}$ - *submatrici principale* (*minori principali directori*) *ale lui A*

Teoremă:

Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *are toate submatricele principale inversabile (nesingulare), atunci există matricele* $L, D, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *astfel încât*:

$$A = L \cdot D \cdot U$$

unde L este o matrice inferior triunghiulară, D este o matrice diagonală şi U este o matrice superior triunghiulară.

<u>Observaţii</u>:

1. uzuale sunt factorizările: $A = L \cdot U$ (factorizare L-U);
2. demonstraţia teoremei enunţate este constructivă, constituind însuşi algoritmul de descompunere L-U a matricei A;
3. algoritmul de descompunere → procedeul de eliminare gaussiană a necunoscutelor

   - matricea A este adusă la forma superior triunghiulară în urma unui şir de transformări de asemănare → se "acumulează" într-o matrice inferior triunghiulară, cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 (*<u>descompunere Doolittle</u>*);
4. considerând descompunerea L-U a matricei sistemului A, <u>rezolvarea sistemului</u> implică două subetape:

   a) *<u>substituţie înainte</u>*: rezolvarea sistemului $L \cdot \underline{y} = \underline{b}$

   - din aproape în aproape: y_1 din prima ecuaţie → y_2 din a doua ecuaţie → ... y_n din ultima ecuaţie ($\underline{y} = [y_i]_{i=\overline{1,n}}$)

   b) *<u>substituţie inversă</u>*: rezolvarea sistemului U$\cdot \underline{x} = \underline{y}$

   - din aproape în aproape: x_n din ultima ecuaţie → x_{n-1} din penultima ecuaţie → ... x_1 din prima ecuaţie ($\underline{x} = [x_i]_{i=\overline{1,n}}$)

Propoziţie:

Dacă matricea A *admite o descompunere L-U, atunci această descompunere este unică.*

- procedura de triangularizare directă necesită un număr de operaţii în virgulă mobilă de ordinul lui ${n^3}/{3}$;
- dacă matricea A este simetrică ($A = A^T$) şi pozitiv definită ($\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \underline{x} \neq \underline{0}_{n\times 1}, \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} > 0$ şi $\rightarrow \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}_{n\times 1}$), A se descompune sub forma $A = L \cdot L^T$ (*descompunerea Cholesky*).

2.2.2 Procedura de triangularizare directă a unei matrice

- *algoritmul triangularizării directe*:

atribuie $A_1 \longleftarrow A$

pentru $k = 1, n-1$ execută

- determinare matrice M_k astfel încât $A_{k+1} = M_k \cdot A_k$ să aibă elementele:

  $a_{i,k}^{[k+1]} = 0, i = k+1, \dots, n$ şi $a_{i,j}^{[k+1]} = a_{i,j}^{[k]}, i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, k-1$

  atribuie $A_{k+1} \longleftarrow M_k \cdot A_k$

¤

atribuie $U \longleftarrow A_n$

☞ algoritmul parcurge (n – 1) etape în care se zerorizează elementele unei coloane, situate sub diagonala principală, lăsând nemodificate coloanele transformate la etapele anterioare

☞ notaţie: $\underline{\xi} = \underline{c}_k(A_k)$; $\underline{c}_k(A_k)$ - coloana k a matricii $A_k = \left[a_{i,j}^{[k]}\right]_{i,j=1,\dots,n}$

$$\underline{\xi} = [\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_k \quad \xi_{k+1} \quad \cdots \quad \xi_n]^T = [a_{1,k}^{[k]} \quad \cdots \quad a_{k,k}^{[k]} \quad a_{k+1,k}^{[k]} \quad \cdots \quad a_{n,k}^{[k]}]^T$$

☞ M_k se construieşte încât $M_k \cdot \underline{\xi} = [\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_k \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$

☞ se consideră *vectorul de multiplicatori*: $\underline{m}_k = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mu_{k+1.k} \quad \cdots \quad \mu_{n,k}]^T$

Definiţie:
Matricea M_k se numeşte matrice de transformare elementară de ordin n şi indice k sau matrice Gauss şi este definită prin:

$$M_k = I_n - \underline{m}_k \cdot \underline{e}_k^T$$

unde $\underline{e}_k$ este coloana k a matricii unitate de ordin n, I_n.

☞ proprietăţi ale matricilor Gauss:

- sunt inferior triunghiulare;
- elementele diagonalei principale sunt egale cu 1;
- sunt nesingulare, având inversa:

$$M_k^{-1} = I_n + \underline{m}_k \cdot \underline{e}_k^T$$

☞ efectul aplicării matricei M_k asupra vectorului $\underline{\xi}$:

$$M_k \cdot \underline{\xi} = (I_n - \underline{m}_k \cdot \underline{e}_k^T) \cdot \underline{\xi} = \underline{\xi} - \underline{m}_k \cdot \underline{e}_k^T \cdot \underline{\xi} = \underline{\xi} - \underline{m}_k \cdot \xi_k$$

$$= [\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_k \quad \xi_{k+1} - \mu_{k+1,k} \cdot \xi_k \quad \cdots \quad \xi_n - \mu_{n,k} \cdot \xi_k]^T$$

trebuie zerorizate

☞ presupunând $\xi_k \neq 0$, se aleg multiplicatorii Gauss: $\mu_{i,k} = \xi_i / \xi_k , i = k+1, \ldots, n$

pivot

$$M_k \cdot \underline{\xi} = [\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_k \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$$

METODE NUMERICE – curs 3

Observaţii:

1. În practică, pe calculator, etapa k descrisă mai sus se poate realiza testând condiţia:

$$|a_{k,k}^{[k]}| > \varepsilon$$

   în loc de a verifica $a_{k,k}^{[k]} \neq 0$, unde ε este o constantă impusă, de valoare mică sau foarte mica (de exemplu, epsilonul-maşină); aceasta se realizează datorită faptului că, dacă în aritmetica exactă pivotul este nul, în aritmetica virgulei mobile, datorită erorilor de calcul, această situaţie este echivalentă cu: $|a_{k,k}^{[k]}| \leq \varepsilon$;

2. Când pivotul este în modul mai mic sau egal cu ε, eliminarea gaussiană eşuează; aceasta corespunde situaţiei când matricea iniţială A are submatricea principală de ordin k singulară, deci conform teormei enunţate anterior, descompunerea L-U a matricei A nu există.

☞ efectul aplicării transformării M_k asupra celorlaltor coloane ale matricei A_k:

- se consideră un vector $\underline{\eta} \neq \underline{\xi}$, cu $\underline{\eta} = [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_n]^T$

$$M_k \cdot \underline{\eta} = [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_k \quad \eta_{k+1} - \mu_{k+1,k} \cdot \eta_k \quad \cdots \quad \eta_n - \mu_{n,k} \cdot \eta_k]^T$$

Concluzii:

1. Matricea M_k lasă nemodificate primele k – 1 coloane ale matricei A_k:

$$\underline{\eta} = \underline{c}_j(A_k) = [\underset{1}{*} \quad \cdots \quad \underset{j}{*} \quad \underset{j+1}{0} \quad \cdots \quad \underset{k}{0} \quad \cdots \quad \underset{n}{0}]^T, \quad j < k,\ j = 1,\ldots,k-1$$

$$M_k \cdot \underline{c}_j(A_k) = [\underset{1}{*} \quad \cdots \quad \underset{j}{*} \quad \underset{j+1}{0} \quad \cdots \quad \underset{k}{0} \quad \underset{k+1}{0 - \mu_{k+1,k} \cdot 0} \quad \cdots \quad \underset{n}{0 - \mu_{n,k} \cdot 0}]^T$$
$$= \underline{c}_j(A_k)$$

2. Matricea M_k transformă coloana k a matricei A_k zerorizând liniile $k+1, \cdots, n$;
3. Matricea M_k transformă coloanele $k+1, \cdots, n$ ale matricei A_k în liniile $k+1, \cdots, n$:

$$\underline{\eta} = \underline{c}_j(A_k), \quad j = k+1,\ldots,n$$

$$M_k \cdot \underline{c}_j(A_k) = [* \quad \cdots \quad * \quad a_{k+1,j}^{[k]} - \mu_{k+1,k} \cdot a_{k,j}^{[k]} \quad \cdots \quad a_{n,j}^{[k]} - \mu_{n,k} \cdot a_{k,j}^{[k]}]^T$$

(notaţia * semnificând faptul că elementele implicate rămân nemodificate)

☞ tabloul general al transformărilor:

$$M_{n-1} \cdot \cdots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A = U$$

$$\Downarrow$$

$$A = \underbrace{M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \cdots \cdot M_{n-1}^{-1}}_{L} \cdot U \quad \Longrightarrow \quad A = L \cdot U$$

$$\boxed{L = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \cdots \cdot M_{n-1}^{-1} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \underline{m}_k \cdot \underline{e}_k^T}$$

<u>Observaţie</u>:

1. Matricea L este inferior triunghiulară unitate şi conţine în fiecare coloană, sub elementul unitar de pe diagonala principală, subvectorii Gauss;
2. Prima sub-etapă de rezolvare a sistemului $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ este <u>substituţia înainte</u> aplicată sistemului de ecuaţii $L \cdot \underline{y} = \underline{b}$:

$$\underline{y} = L^{-1} \cdot \underline{b} = M_{n-1} \cdot \cdots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot \underline{b}$$

Concluzie:

La triangularizarea simplă, unde elementele matricei A se modifică corespunzător relaţiei:

$$a_{ij}^{[k+1]} = a_{ij}^{[k]} - \mu_{ik} \cdot a_{kj}^{[k]}, \quad i = k+1,\ldots,n; \quad j = k,\ldots,n$$

multiplicatorii μ_{ik} pot avea, în principiu, orice valoare

- dacă aceste valori sunt ***mari sau foarte mari***, atunci:
  - pot apare fenomenele de omitere catastrofală şi/sau de neutralizare a termenilor;
  - amplifică erorile prezente în termenii $a_{kj}^{[k]}$.

<u>triangularizarea simplă este instabilă numeric</u>

☞ stabilizarea algoritmului triangularizării unei matrici □ multiplicatori Gauss cu modul subunitar

☞ Exemplu numeric:

```
a =

     1    -2     1
     3     2    -4
    -1     5     3
```

matricea iniţială, A_1

iteraţiile triangularizării

```
k =

     1
```

```
k =

     2
```

multiplicatorii Gauss

```
M =

     1     0     0
    -3     1     0
     1     0     1
```

```
M =

    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0   -0.3750    1.0000
```

```
U =

    1.0000   -2.0000    1.0000
         0    8.0000   -7.0000
         0         0    6.6250
```

```
a =

     1    -2     1
     0     8    -7
     0     3     4
```

A_2

```
a =

    1.0000   -2.0000    1.0000
         0    8.0000   -7.0000
         0         0    6.6250
```

A_3

```
L =

    1.0000         0         0
    3.0000    1.0000         0
   -1.0000    0.3750    1.0000
```

2.3 Rezolvarea sistemelor prin triangularizare cu pivotare parţială

☞ <u>principiu</u>: la pasul k se caută pivotul printre elementele din coloana k, pornind de la elementul de pe diagonala principală în jos, alegându-se elementul care are cea mai mare valoare în modul:

$$|\, a_{i_k,k}^{[k]} \,| = \max_{k \le i \le n} \{ |\, a_{i,k}^{[k]} \,| \} = \xi_k$$

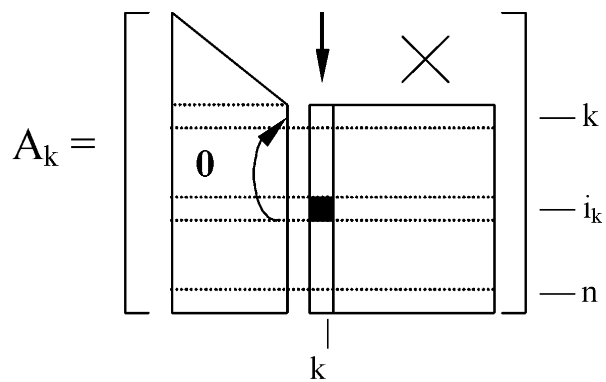

Fig. 2.1 Principiul triangularizării cu pivotare parţială a unei matrice: pivotul se găseşte în coloana k, liniile k ÷ n; k = 1, …, n - 1

☞ dacă $i_k \neq k$ → se permută liniile k şi i_k cu ajutorul matricii de permutare de linii P_k

$$P_k \cdot A_k \longrightarrow A_{k+1} = M_k \cdot (P_k \cdot A_k)$$