

---

Тема 15.  
Фильтр оценки состояния для  
непрерывных систем  
(наблюдатель вектора состояния)

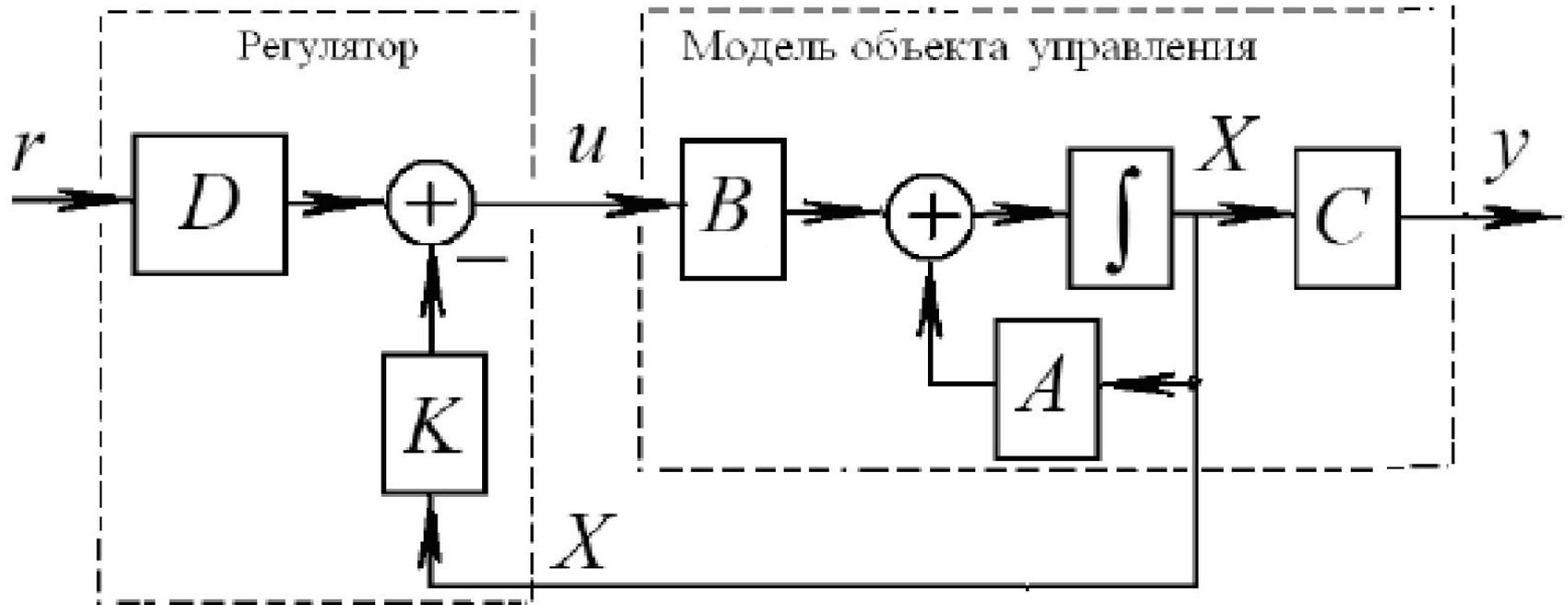
---

# Обсуждаемые вопросы

---

- 1. Реализация регулятора в модальном методе синтеза*
- 2. Фильтр оценки вектора состояния (наблюдатель вектора состояния)*
- 3. Уравнения наблюдателя вектора состояния*
- 4. Расчет наблюдателя вектора состояния*
- 5. Условие наблюдаемости системы*
- 6. Теорема разделения в модальном методе синтеза*

# Реализация регулятора в модальном методе синтеза при доступном для измерения векторе состояния



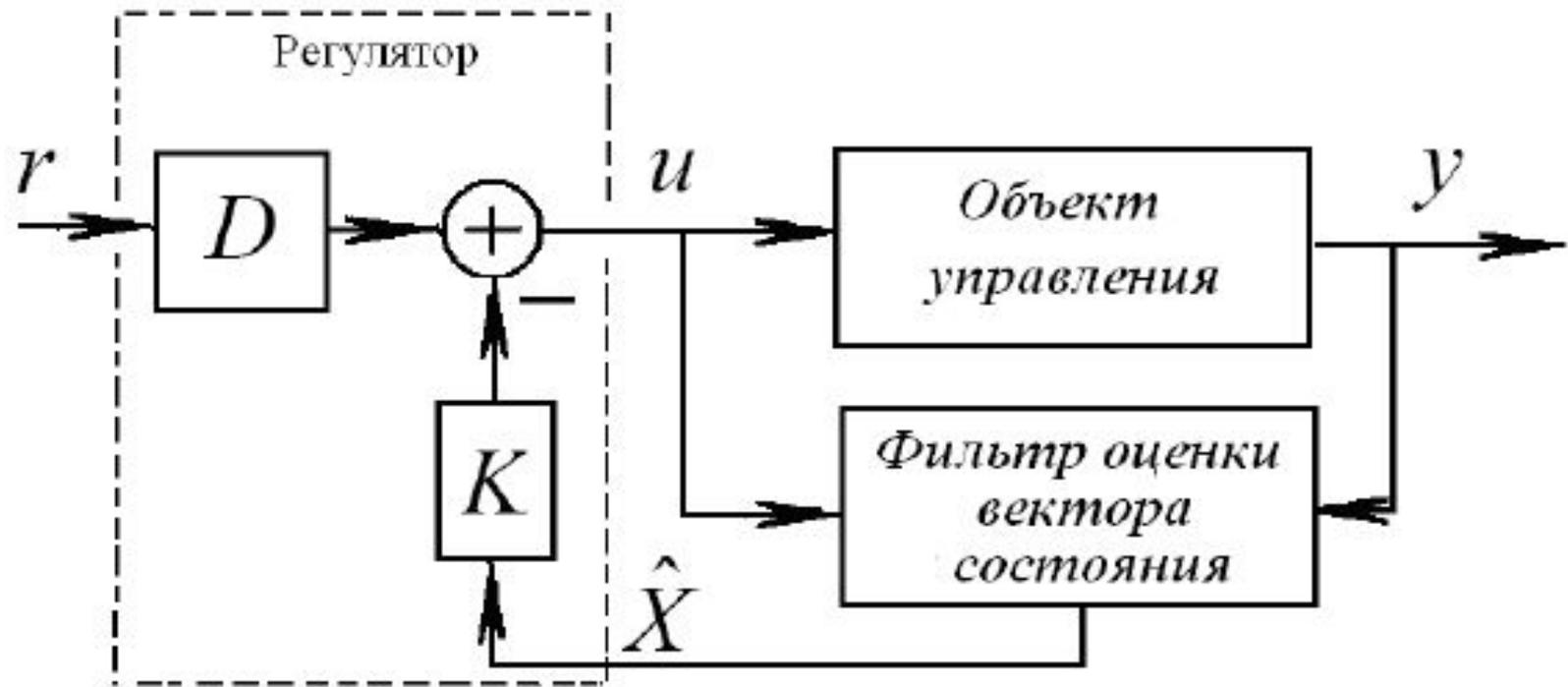
$$u = -KX + Dr$$

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$K \in R^{l \times n}, D \in R^1, r \in R^1$$

$$y = CX$$

# Реализация регулятора в модальном методе синтеза при недоступном для измерения векторе состояния



Фильтр оценки вектора состояния (наблюдатель вектора состояния) проектируется таким образом, чтобы

$$\text{выполнялось свойство } \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \hat{X}(t) - X(t) \} = 0$$

## Наблюдатель вектора состояния

---

### Модель объекта управления

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X(t=0) = X^0$$

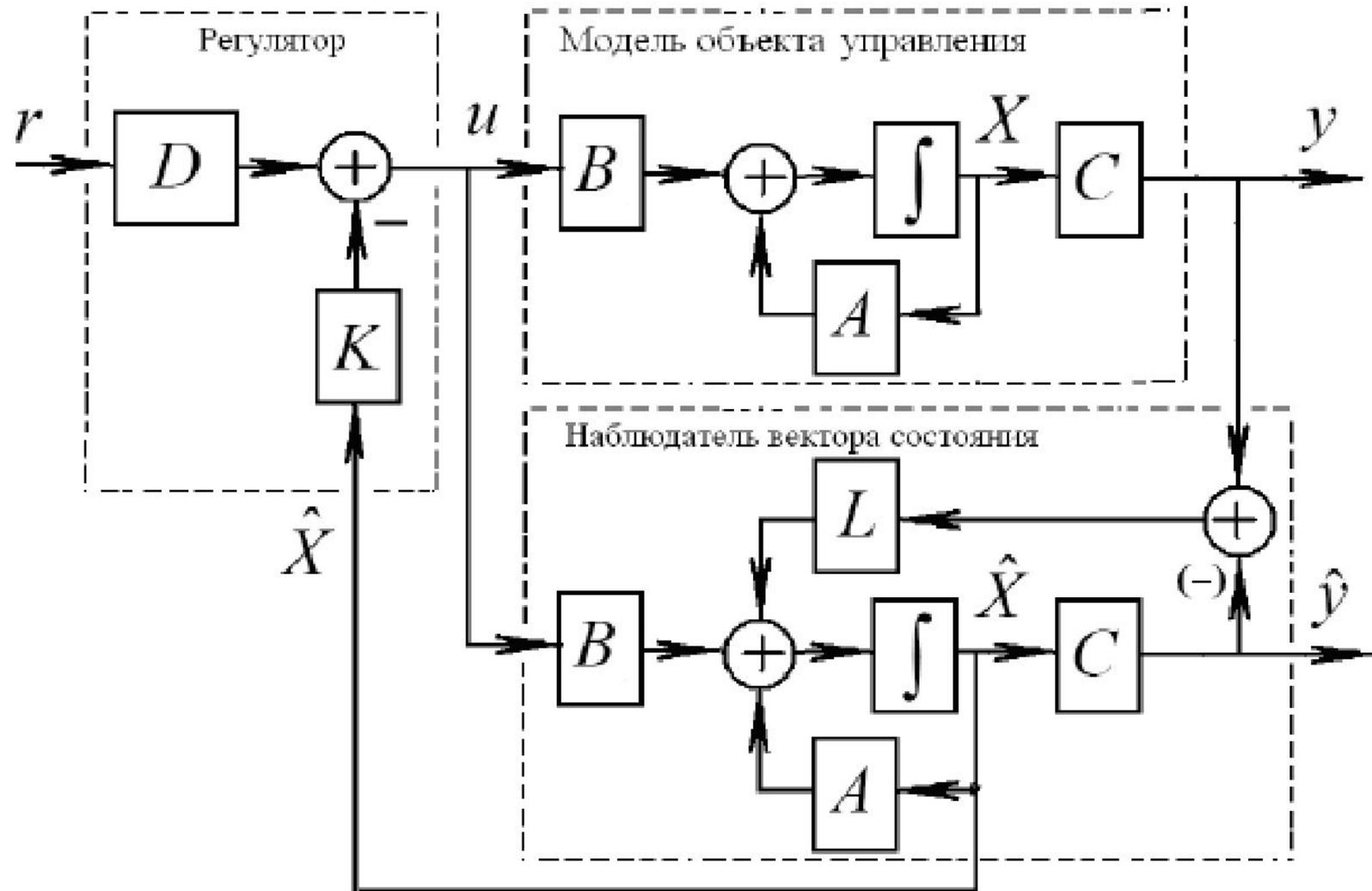
$$y = CX$$

### Наблюдатель вектора состояния

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad \hat{X}(t_0=0) = \hat{X}_0$$

$$\hat{y} = C\hat{X}$$

# Структурная схема системы управления с наблюдателем вектора состояния



# Уравнение для ошибки наблюдения вектора состояния

---

## Модель объекта управления

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X(t=0) = X^0$$

$$y = CX$$

## Наблюдатель вектора состояния

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad \hat{X}(t_0=0) = \hat{X}_0$$

$$\hat{y} = C\hat{X}$$

## Уравнение для ошибки наблюдения

$$E = X - \hat{X} \Rightarrow \dot{E} = \dot{X} - \dot{\hat{X}} \Rightarrow \dot{E} = (A - LC)E$$

## Расчет наблюдателя состояния

---

$$\dot{E} = (A - LC)E \quad \Rightarrow \quad L = ? \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

Характеристический полином уравнения для ошибки наблюдения

$$A_{\text{набл}}(p, L) = \det(pI_n - A + LC)$$

Желаемый характеристический полином уравнения для ошибки наблюдения

$$A_{\text{набл}}^{\text{жел}}(p) = (p - p_1^{\text{набл}})(p - p_2^{\text{набл}}) \cdots (p - p_n^{\text{набл}})$$

Основное расчетное соотношение для вычисления  $L$

$$A_{\text{набл}}(p, L) = A_{\text{набл}}^{\text{жел}}(p)$$

# Пример структурной схемы наблюдателя вектора состояния для системы 2-го порядка

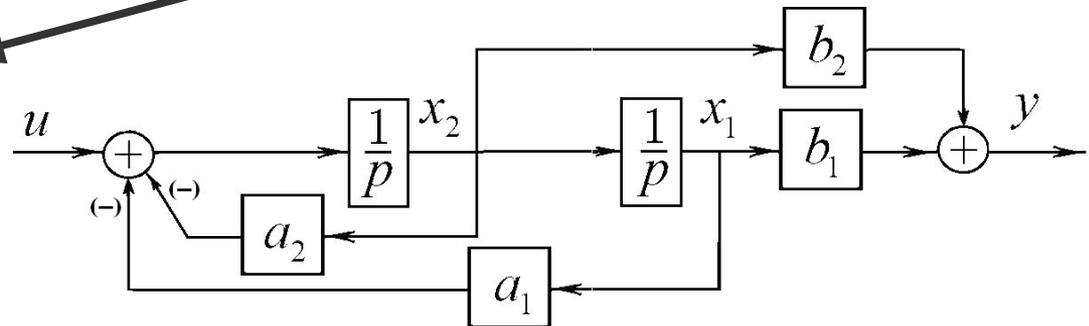
Модель объекта управления

$$\dot{X} = AX + Bu, y = CX$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2 + u$$

$$y = b_1x_1 + b_2x_2$$



Модель наблюдателя вектора состояния

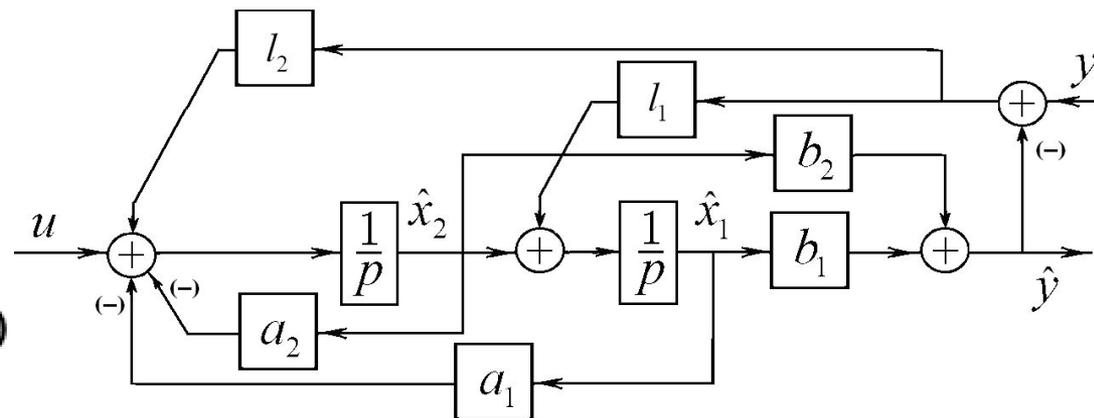
$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{X}$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + l_1(y - \hat{y})$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -a_1\hat{x}_1 - a_2\hat{x}_2 + u + l_2(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2$$



# Пример: Система управления на основе модального метода синтеза при доступном векторе состояния

$$W(p) = \frac{b_2 p + b_1}{p^2 + a_2 p + a_1}$$

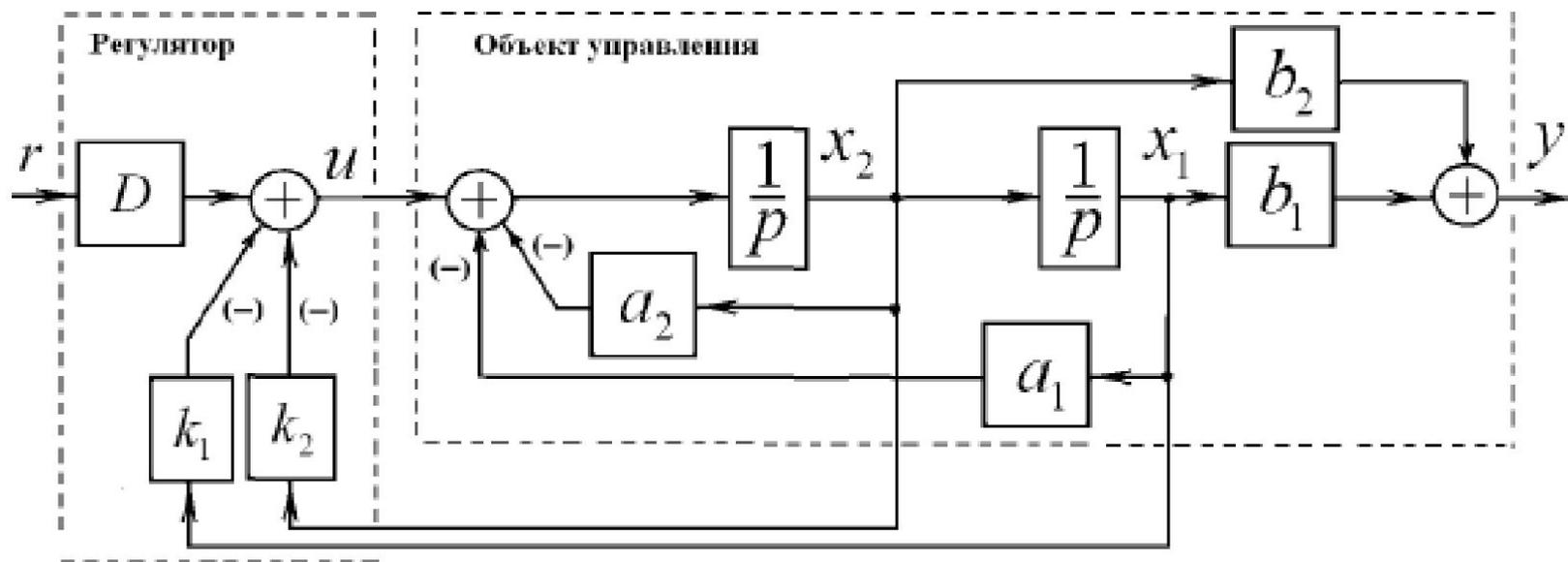
$\Rightarrow$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

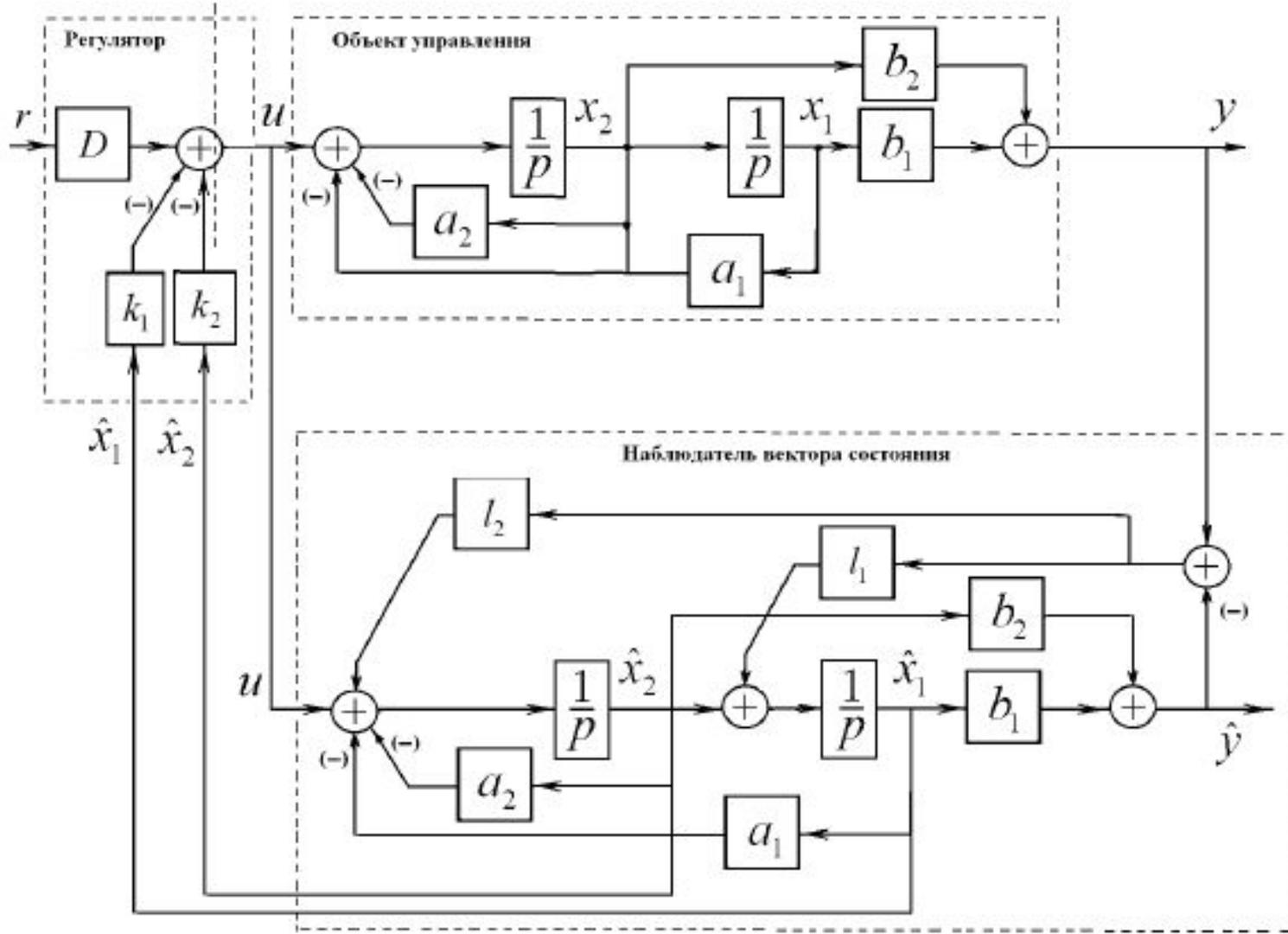
$$\dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + u$$

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + D r$$

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2$$



# Пример: Система управления на основе модального метода синтеза с наблюдателем вектора состояния



## Условие наблюдаемости системы

**Определение:** Линейная система называется полностью наблюдаемой, если по известным функциям  $y(t)$ ,  $u(t)$  можно восстановить вектор состояния  $X(t)$  модели объекта

Если система является полностью наблюдаемой, тогда существует матрица  $L$ , позволяющая обеспечить произвольное размещение на комплексной плоскости корней характеристического полинома для уравнения ошибки наблюдения  $\dot{E} = (A - LC)E$

**Критерий полной наблюдаемости:**

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

# Уравнения замкнутой системы управления с наблюдателем вектора состояния

---

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX$$

$$u = -K\hat{X} + Dr$$

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{X}$$

$$\Rightarrow E = X - \hat{X}$$

$$\dot{E} = \dot{X} - \dot{\hat{X}}$$

$$\dot{X} = AX - BK\hat{X} + BDr$$

$$\dot{E} = (A - LC)E$$

---

$$\hat{X} = X - E \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = (A - BK)X + BKE + BDr$$

$$\dot{E} = (A - LC)E$$

# Характеристический полином замкнутой системы с наблюдателем вектора состояния

$$\dot{X} = (A - BK)X + BKE + BD r$$

$$\dot{E} = (A - LC)E$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ O & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD \\ O \end{bmatrix} r$$

$$\det \left\{ p \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ O & A - LC \end{bmatrix} \right\} =$$
$$\det \{ pI_n - A + BK \} \cdot \det \{ pI_n - A + LC \}$$

# Теорема разделения в модальном методе синтеза<sup>15</sup>

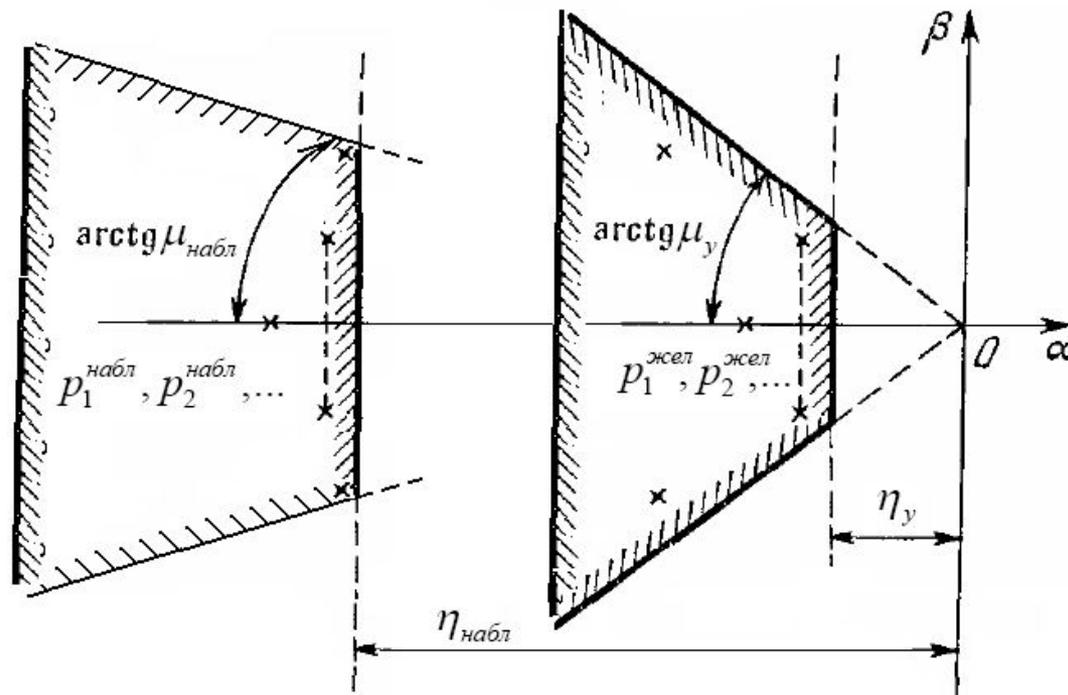
---

**Теорема разделения:** Характеристический полином замкнутой системы управления в модальном методе синтеза с наблюдателем состояния равен произведению характеристического полинома системы с управлением по вектору состояния на характеристический полином системы для ошибки наблюдения.

**Следствие теоремы разделения:** В модальном методе синтеза расчет параметров регулятора и наблюдателя может быть выполнен независимо друг от друга.

# Разделение темпов процессов в объекте управления и наблюдателе вектора состояния

Желаемое время переходных процессов в наблюдателе состояния задается в 5-8 раз меньше по отношению к желаемому времени переходных процессов в объекте управления (с целью уменьшения погрешности оценки вектора состояния объекта).



---

## Тема 16.

# Модальный метод синтеза непрерывных астатических систем управления

---