Дискретная математика

Замкнутый класс

- Система функций Σ называется ***замкнутым классом***, если любая суперпозиция функций системы Σ снова принадлежит системе Σ.

Пример 1

- Множество всех конъюнкций K_1 – замкнутый класс.

$$f(x,y)=xy\in K_1,\ g(x,z)=xz\in K_1,$$

$$h(x,y,t)=xyt\in K_1.$$

$$w(x,y,z,t)=f\bigl(g(x,z),h(x,y,t)\bigr)=$$

$$=(xz)\cdot(xyt)=xzxyt=xyzt\in K_1$$

Пример 2

- Множество всех дизъюнкций K2 – замкнутый класс.

$$f(x,z)=x\vee z\in K_2,\ g(y,z)=y\vee z\in K_2,$$

$$h(y,z,t)=y\vee z\vee t\in K_2.$$

$$v(x,y,z)=h\big(y,g(y,z),f(x,z)\big)=$$

$$=y\vee(y\vee z)\vee(x\vee z)=y\vee y\vee z\vee x\vee z=$$

$$=x\vee y\vee z\in K_2$$

Пример 3

- Множество всех полиномов Жегалкина K_3 – замкнутый класс.

$$f(x,z) = x \oplus z \oplus 1 \in K_3,\ g(y,z) = y \oplus z \in K_3,$$

$$h(x,z,t) = x \oplus z \oplus t \in K_3.$$

$$w(x,y,z,t) = f\big(h(x,z,t), g(y,z)\big) =$$

$$= (x \oplus z \oplus t) \oplus (y \oplus z) \oplus 1 =$$

$$= x \oplus y \oplus z \oplus z \oplus t \oplus 1 =$$

$$= x \oplus y \oplus t \oplus 1 \in K_3$$

Замыкание

- ***Замыканием системы функций Σ*** называется система [Σ], состоящая из всех функций системы Σ и всех суперпозиций функций системы Σ.

Функционально полные системы

Система функций Σ называется функционально полной (ФП), если через суперпозиции функций этой системы можно выразить любую логическую функцию.

Замечание 1

Если система функций Σ

является замкнутым классом,

то есть Σ=K,

тогда она равна своему

замыканию:

$$K = [K]$$

Замечание 2

Если система функций Σ является функционально полной, тогда ее замыкание равно всему множеству логических функций:

$$[\Sigma] = P_2$$

Пример 1

Пусть система $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$ - множество булевых операций

(базис Буля).

Σ_0 – ФП, так как любая логическая

функция может быть выражена

Булевой формулой (БФ).

Пример 2

Система Σ_0 является ***избыточной***.

Дизъюнкцию можно выразить через

конъюнкцию и отрицание:

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$$

Конъюнкцию можно выразить через

дизъюнкцию и отрицание:

$$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$$

Продолжение примера 2

Откуда:

$$\Sigma_1 = \{\wedge, ФИЛ\} -$$

$$\Sigma_2 = \{\vee, ФИЛ\} -$$

Замечание:

- За не избыточность системы приходится платить избыточностью формул.

Пример 3

Пусть булева формула имеет вид:

$$F_0(x, y, z) = \overline{xy} \vee x\overline{z}$$

Тогда, в системе Σ1 она

принимает вид:

$$F_1(x, y, z) = \overline{\overline{\overline{xy}} \cdot \overline{x\overline{z}}} = \overline{xy \cdot \overline{x\overline{z}}}$$

Пример 4

$$F_0(x, y, z) = \overline{xy} \vee x\overline{z}$$

Тогда, в системе Σ_2 она

принимает вид:

$$F_2(x, y, z) = \overline{\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}} \vee \overline{\overline{x} \vee z} =$$

$$= \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{x} \vee z}$$

Пример 6

Система $\Sigma_4 = \{\,|\,\}$

- функционально полна.

Это следует из того, что через штрих Шеффера можно выразить функции ФП системы:

$$\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}.$$

Продолжение примера 6

Отрицание выразим по формуле:

$$\overline{x} = x \mid x$$

Конъюнкцию выразим по формуле:

$$x \wedge y = \overline{x \mid y} = \left(x \mid y \right) \Big| \left(x \mid y \right).$$

Продолжение примера 6

Убедимся в истинности равенства:

$$\overline{x} = x | x$$

$$\overline{0} = 1,\ \ 0|0 = 1$$

$$\overline{1} = 0,\ \ 1|1 = 0.$$

Пример 7

Система $$\Sigma_4 = \{\downarrow\}$$

- функционально полна.

Это следует из того, что через стрелку Пирса можно выразить функции ФП системы:

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}.$$

Продолжение примера 7

Отрицание выразим по формуле:

$$\overline{x} = x \downarrow x$$

Дизъюнкцию выразим по формуле:

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

Продолжение примера 7

Убедимся в истинности равенства:

$$\overline{x} = x \downarrow x$$

$$\overline{0} = 1,\ 0 \downarrow 0 = 1$$

$$\overline{1} = 0,\ 1 \downarrow 1 = 0.$$

Теорема 1

Если через функции системы Σ можно выразить функции булева базиса $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$,

то система Σ - функциональна полна.

Тогда говорят, что система Σ - сводится к системе Σ_0: $\Sigma \Rightarrow \Sigma_0$.

Следствие

$$\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\} \Rightarrow \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\} \Rightarrow \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$\Sigma_3 = \{\,|\,\} \Rightarrow \Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$$

$$\Sigma_4 = \{\downarrow\} \Rightarrow \Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$$

Теорема 2

Если через функции системы Σ можно выразить функции некоторой функционально полной системы

$$\Sigma^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\},$$

то система Σ - функциональна полна.

$$\Sigma \Rightarrow \Sigma^*.$$

Следствие

Таким образом, доказательство функциональной полноты произвольной системы функций можно строить путем сведения ее к некоторой системе, функциональная полнота которой доказана.

Функциональная полнота в слабом смысле

Система функций Σ называется ***функционально полной в слабом смысле*** (сФП),

если она будет функционально полной после добавления констант 0 и 1.

$$\Sigma \cup \{0,1\} \Rightarrow \text{ФП.}$$

Функциональная полнота в слабом смысле

Система функций

$$\Sigma = \{\wedge, \oplus\}$$

Среди функций, образующей AG, нет константы 1.

Но ровно половина всех полиномов содержит слагаемое 1.

$$\Sigma_5 = \{\wedge, \oplus, 1\} \Rightarrow$$