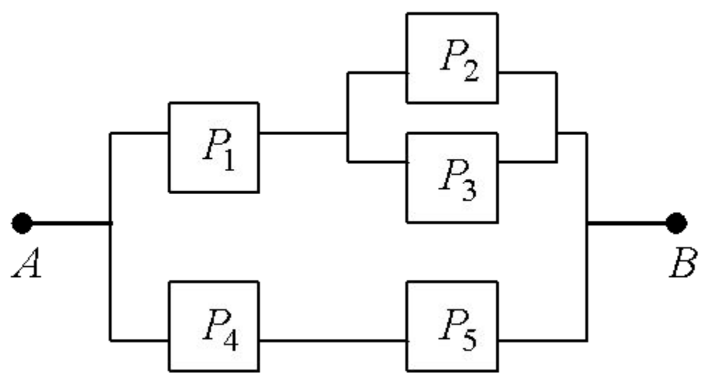
Переключательные схемы

Рассматриваются электрические ПС, представляющие собой соединенные проводниками переключатели и источники тока.

Условимся обозначать символом 1 протекание тока в проводниках и символом 0 – отсутствие тока в проводниках.



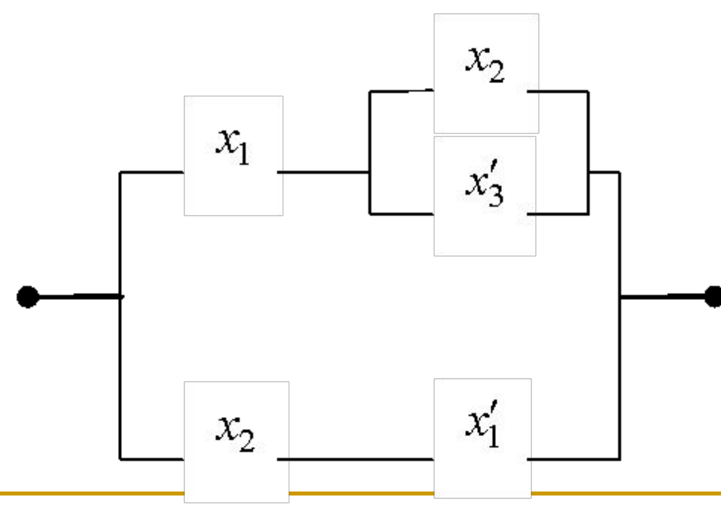
Переключатель - электромагнитное реле с контактами и индукционной катушкой, состояние которой моделируется булевой переменной x: $x=1$ - в катушке идет ток, и $x=0$ - в катушке тока нет.

Контакты реле – замыкающие или размыкающие.

Через *замыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $x=1$ - такой контакт моделируется булевой переменной x.

Через *размыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $x=0$ - такой контакт моделируется отрицанием булевой переменной x'.

Пример. Пусть в ПС на рис.1 переключатели P_1, P_5 имеют общую катушку реле с током x_1 и переключатели P_2, P_4 имеют общую катушку реле с током x_2, причем контакты P_1, P_2, P_4 – замыкающие и контакты P_3, P_5 – размыкающие. Тогда такая ПС с помощью булевых переменных x_1, x_2, x_3 изображается следующей диаграммой:



Переключатели p,q могут быть соединены последовательно или параллельно.

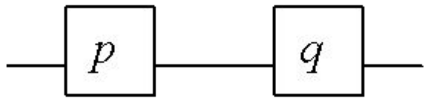


Рис.3

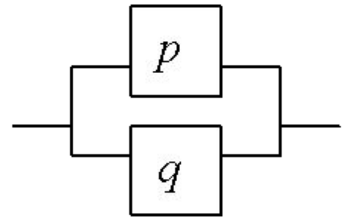


Рис.4

Через последовательно соединенные переключатели p,q ток проходит в том и только том случае, если $p=q=1$ - такое соединение моделируется булевым многочленом pq.

Через параллельно соединенные переключатели p,q ток не проходит в том и только том случае, если $p=q=0$ - такое соединение моделируется булевым многочленом $p+q$.

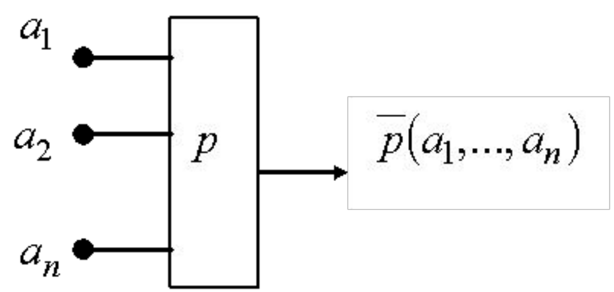
В результате любая электрическая ПС моделируется некоторым булевым многочленом p, который принимает значение 1 в том и только том случае, если в ПС идет ток.

Соответствующая такому многочлену p булева функция $\overline{p}$ называется *функцией проводимости ПС*, так как она показывает, при каких значениях булевых переменных (т.е. переключателей данной схемы) в ПС идет электрический ток.

С другой стороны, каждый булев многочлен $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ моделирует ПС с функцией проводимости $\overline{p}$: эта схема так конструируется из переключателей $x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n'$, что в ней при значениях $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ проходит ток в том и только том случае, если $\overline{p}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Переключательную схему, моделирующую булев многочлен $p = p(x_1,\dots,x_n)$, можно представлять в виде устройства с n входами и одним выходом, которое преобразует входные булевы значения $x_1 = a_1,\dots,x_n = a_n$ в выходное булево значение $\overline{p}(a_1,\dots,a_n)$.

Графически такое устройство изображается диаграммой:



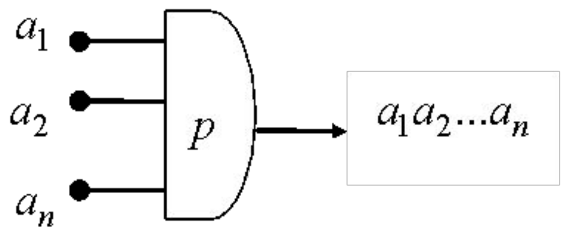
Простейшие булевы многочлены моделируют ПС, которые называются *логическими элементами* (или *вентилями*) и обозначаются специальными диаграммами.

<u>Примеры</u>.

Булев многочлен $p(x) = x'$ моделирует устройство с одним входом и одним выходом, которое изображается диаграммой

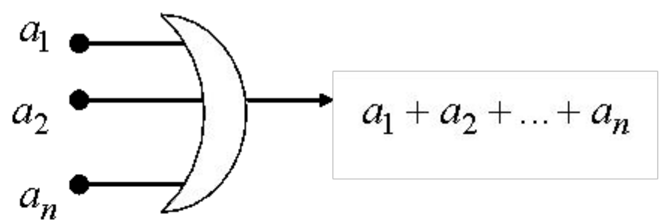
и называется *NOT-элементом.*

Булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)=x_1\ldots x_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *AND-элементом*.

Булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *OR-элементом.*

Примеры.

1. Построим ПС, которая моделирует сложение двух двоичных цифр и называется *полусумматором*. Такая ПС имеет два входа a_1, a_2 и два выхода $\bar{s}(a_1,a_2), \bar{c}(a_1,a_2)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2$. Таблица этих булевых функций имеет следующий вид:

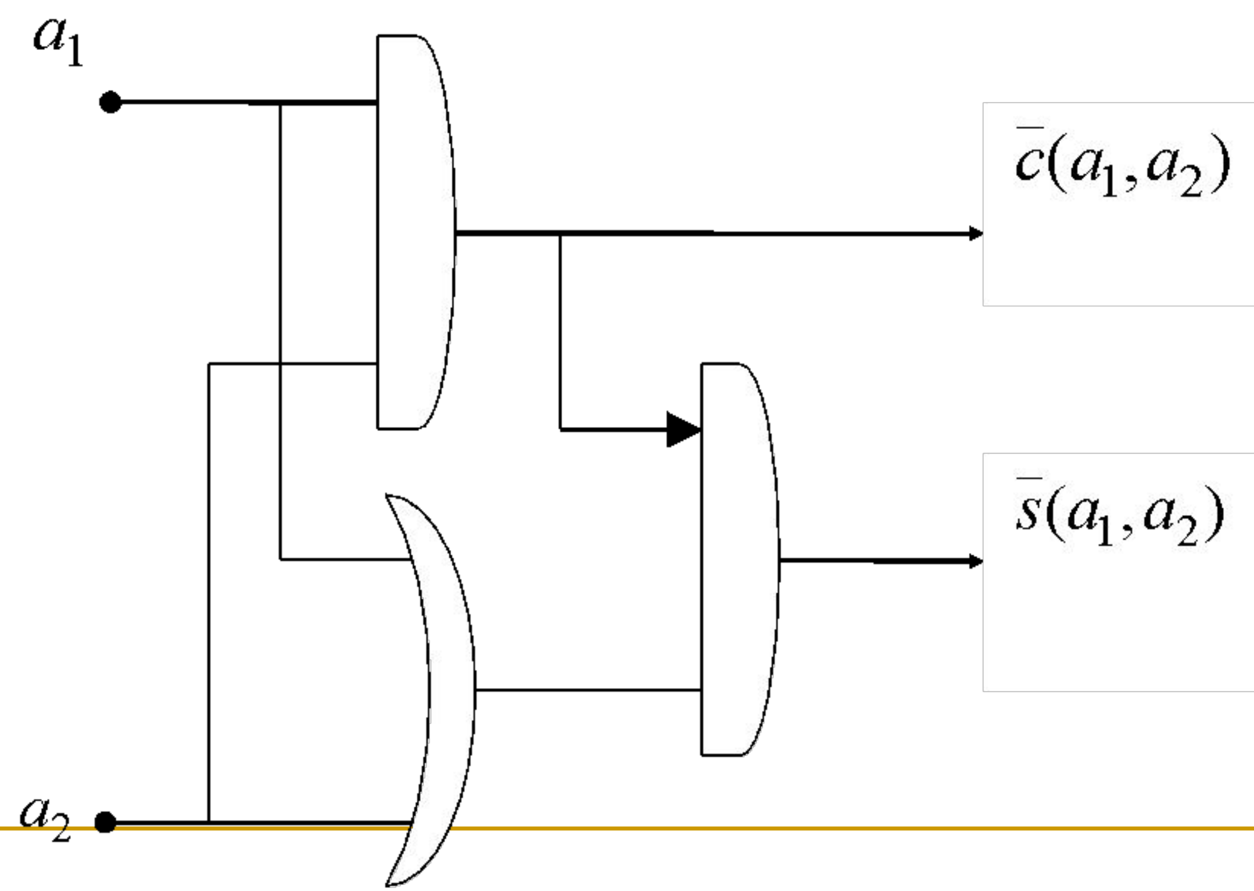
a_1	a_2	$\bar{s}(a_1,a_2)$	$\bar{c}(a_1,a_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

СДНФ функций: $c(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $s(x_1, x_2) = x_1' x_2 + x_1 x_2'$.

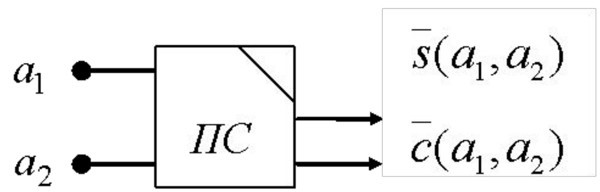
$$s(x_1, x_2) = x_1' x_2 + x_1 x_2' = (x_1 + x_2')' + (x_1' + x_2)' = \left((x_1 + x_2')(x_1' + x_2)\right)' =$$

$$= (x_1 x_1' + x_1 x_2 + x_2' x_1' + x_2' x_2)' = (x_1 x_2 + x_1' x_2')' = (x_1 x_2)'(x_1 + x_2) = c'(x_1 + x_2),$$

Полусумматор представляется диаграммой:



Символически полусумматор изображается диаграммой:



Минимизация булевых многочленов

Рассмотрим вопрос минимизации ДНФ p. Конъюнкт q называется *импликантом* формы p, если $pq = q$. Импликанты, минимальные по числу вхождений в них булевых переменных, называются *простыми импликантами*. Дизъюнкция всех простых импликант формы p называется *сокращенной ДНФ*.

Лемма 1. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой сокращенной ДНФ.

Сокращенную ДНФ формы p можно получить *методом Квайна* с помощью последовательного применения следующих двух видов операций:

1) *операция склеивания,* которая для конъюнктов q и булевых переменных x определяется по формуле:

$$qx + qx' = qx + qx' + q\,;$$

2) *операция поглощения,* которая для конъюнктов q, булевых переменных x и значений $\alpha \in \{0,1\}$ определяется по формуле:

$$qx^{\alpha} + q = q\,.$$

Пример. Найдем сокращенную ДНФ для булева многочлена

$$p = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz .$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена p получим ДНФ

$$x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz + x'y + yz' + yz + xz + xy + y .$$

В результате применения операции поглощения к различным парам конъюнктов последней ДНФ получим булев многочлен $xz + y$, который является сокращенной ДНФ булева многочлена p.

В общем случае сокращенная ДНФ формы p не является минимальной формой, так как она может содержать *лишние* импликанты, удаление которых не изменяет булеву функцию $\overline{p}$. В результате удаления таких лишних импликант получаются *тупиковые ДНФ*.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений в них булевых переменных называются *минимальными ДНФ*.

Лемма 2. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой минимальной ДНФ.

Минимальная ДНФ формы p получается с помощью *матрицы Квайна*:

– столбцы матрицы помечаются конъюнктами $p_1,\ldots,p_m$ формы p;

– строки матрицы помечаются импликантами $q_1,\ldots,q_k$ сокращенной ДНФ формы p;

– на пересечении строки q_i и столбца p_j ставится символ *, если импликант q_i является частью конъюнкта p_j.

Тупиковые ДНФ - дизъюнкции тех минимальных наборов импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений булевых переменных являются искомыми минимальными ДНФ формы p.

Пример. Найдем минимальную ДНФ для многочлена $p = x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz$.

В результате применения операции склеивания получим ДНФ $x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz + x'y' + y'z + xz$.

С помощью операции поглощения получим $x'y' + y'z + xz$ - сокращенная ДНФ булева многочлена p. Матрица Квайна:

	$x'y'z'$	$x'y'z$	$xy'z$	xyz
$x'y'$	*	*		
$y'z$		*	*	
xz			*	*

Минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов $x'y'$ и xz . Значит, $x'y' + xz$ - минимальная ДНФ формы p .

Следствие 3. Любая булева функция, не равная тождественно нулю, представима минимальной ДНФ и любая булева функция, не равная тождественно единице, представима минимальной КНФ.