



Идентификация и диагностика систем

Курс лекций для направления 27.03.04
«Управление в технических системах»

Планирование эксперимента

Под *экспериментом* будем понимать совокупность действий, к которым приходится обращаться, чтобы задавать объекту управления интересующие нас вопросы. Эта совокупность может быть очень сложной, но её всегда можно разложить на отдельные элементы, каждый из которых называется опытом.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленных задач с требуемой точностью.

При этом существенно следующее:

- 1) стремление к минимизации общего числа опытов;
- 2) одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;
- 3) использование математического аппарата, формализующего многие действия эксперимента;

Планирование эксперимента

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента (ПЭ), чрезвычайно разнообразны:

- 1) поиск оптимальных условий;
- 2) построение интерполяционных формул;
- 3) выбор существенных факторов;
- 4) уточнение констант теоретических моделей.

Задачи поиска оптимальных условий являются одними из наиболее распространенных научно-технических задач. Они возникают в тот момент, когда установлена возможность проведения процесса и необходимо найти наилучшие условия его реализации.

Параметры оптимизации

Пример задачи оптимизации

Пусть, например, у химика возникла гипотеза о том, что при взаимодействии 2^x веществ должен получиться интересующий его продукт. Чтобы убедиться в этом, он начинает проводить эксперимент. Будем считать, что ему повезло и он получил требуемый продукт. Однако, выход продукта очень низок, всего 2%. Вот здесь и возникает задача выбора оптимальных условий.

Необходимо подобрать концентрации реагирующих веществ, температуру, давление, время реакции и другие факторы, чтобы выход продукта составил около 100%.

В данном примере находятся условия проведения процесса, оптимальные в смысле максимизации выхода требуемого продукта. Однако, это далеко не единственная постановка задачи. Найденные условия могут оказаться другими, если бы ставилась, например, задача минимизации себестоимости продукта или минимизация вредных примесей в продукте. **Следует подчеркнуть, что всегда необходимо четко формулировать, в каком смысле условия должны быть оптимальными.**

Задачи, сформулированные таким образом, называются задачами оптимизации. Процесс их решения называется процессом оптимизации или просто оптимизацией. Выбор оптимального состава многокомпонентных смесей или сплавов, повышение производительности действующих установок, повышение качества продукции, снижение затрат на её получение – все это примеры задач оптимизации. **Эксперимент, который ставится для решения задачи оптимизации – называется экстремальным.**

Параметры оптимизации

- При планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Сделать это совсем не просто, как кажется на первый взгляд. Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и допускать количественную оценку. В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть очень разнообразными.
- Введем некоторую классификацию параметров оптимизации. Параметр оптимизации – это признак, по которому оптимизируется процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Его необходимо уметь измерять при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов. Множество значений, которые может принимать ПО, будем называть областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, выход реакции – это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100%. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе крови – это примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Параметры оптимизации



Параметры оптимизации

- Уметь измерять параметр оптимизации – это значит располагать подходящим прибором. В некоторых случаях такого прибора может не существовать либо он слишком дорог. Если нет способа количественного измерения результата, то приходится воспользоваться приемом, называем ранжированием (ранговым подходом). При этом П.О. присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: 2^{-х} бальной, 5^{-и} бальной и т.д. ранговый П.О. имеет дискретную ограниченную область определения. Ранг – это количественная оценка П.О., но она носит условный (субъективный) характер.
- П.О. должен быть:
 - 1) эффективным с точки зрения достижения цели;
 - 2) количественным и выражаться одним числом;
 - 3) статически эффективным (точные измерения);
 - 4) имеющим физический смысл, простым и легко вычисляемым;
 - 5) однозначным.

Факторы

- Для описания объекта исследования удобно воспользоваться понятием «черного ящика»



Рис.1'.

- На вход объекта воздействуют факторы $x_1 \dots x_k$, задаваемые в процессе исследования.
- На выходе объекта наблюдают случайные величины $y_1 \dots y_n$, которые являются исследуемыми характеристиками (параметрами) объекта. Случайные неуправляемые факторы вызывающие разброс выходных параметров объекта $y_1 \dots y_n$.

Факторы

- *Объект исследования* должен удовлетворять требованию *воспроизводимости*, т.е. многократно повторенные опыты должны давать результаты с разбросом значений, не превышающих некоторую заданную величину. Объект должен быть *управляемым* (следует помнить, что нет абсолютно управляемых объектов). На реальный объект действуют как управляемые, так и неуправляемые факторы. Последние влияют на воспроизводимость результатов эксперимента и могут служить причиной ее нарушения.
- *Фактором называют независимую переменную величину, влияющую на функции отклика $y_1 \dots y_n$. Каждый фактор имеет область определения - совокупность всех значений, которые может принимать фактор. Область определения всех факторов называется факторным пространством.*

Факторы

- После того как выбран объект исследования и П.О., нужно включить в рассмотрение все существующие факторы, которые влияют на процесс. Если какой-либо существующий фактор не учтен, то это может привести к неприятным последствиям. Чем больше факторов, то тем больше опытов необходимо провести, так как $N = p^k$. Если число факторов больше 15, нужно обратиться к методам отсеивания несущественных факторов.

Факторы

- Факторы должны быть:

- 1) управляемыми;

- 2) непосредственно воздействующими на объект исследования (трудно управлять фактором, который является функцией других факторов);

- 3) совместимыми, т.е. все комбинации уровней факторов должны быть осуществимы и безопасны;

- 4) независимыми, т.е. позволяющими экспериментатору устанавливать требуемые уровни любого фактора независимо от уровней других факторов.

Интервалы варьирования

При выборе области эксперимента (интервалов варьирования факторов) рассматриваются ограничения трех типов:

- 1) принципиальные ограничения, которые не должны быть нарушены ни при каких обстоятельствах (как правило, ограничения, связанные с техникой безопасности проведения эксперимента);
- 2) ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями (например, стоимость, время проведения эксперимента и т.п.);
- 3) ограничения, определяемые конкретными условиями проведения эксперимента (существующей аппаратурой, технологией, организацией работ и т.п.).

Интервалы варьирования

Основному или нулевому уровню факторов соответствует центр области варьирования факторов. Обозначим начальную точку для j -того фактора x_{oj} , значение при известных значениях верхней и нижней границы факторного пространства определится выражением:

$$x_{oj} = \frac{x_{j \max} + x_{j \min}}{2} .$$

Интервалом варьирования I_j называется половина разности между верхним и нижним значением фактора:

$$I_j = \frac{x_{j \max} - x_{j \min}}{2} .$$

Интервалы варьирования

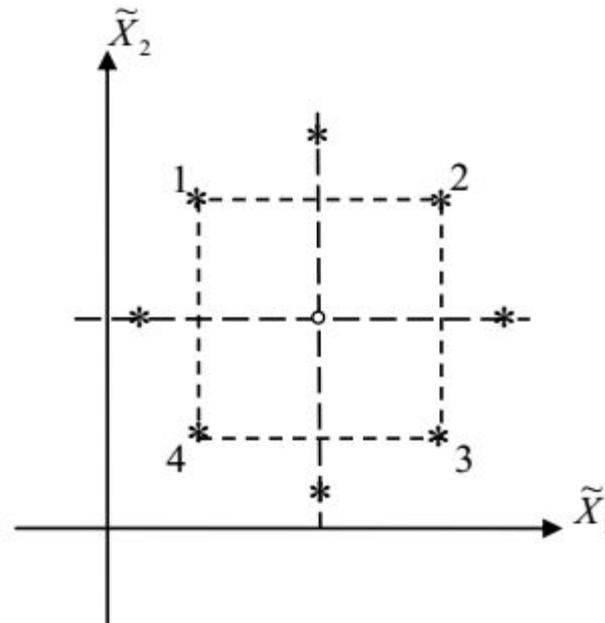
- Отметим еще, что для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, а основной нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования:

$$\bar{x}_j = \frac{x_j - x_{0j}}{I_j}$$

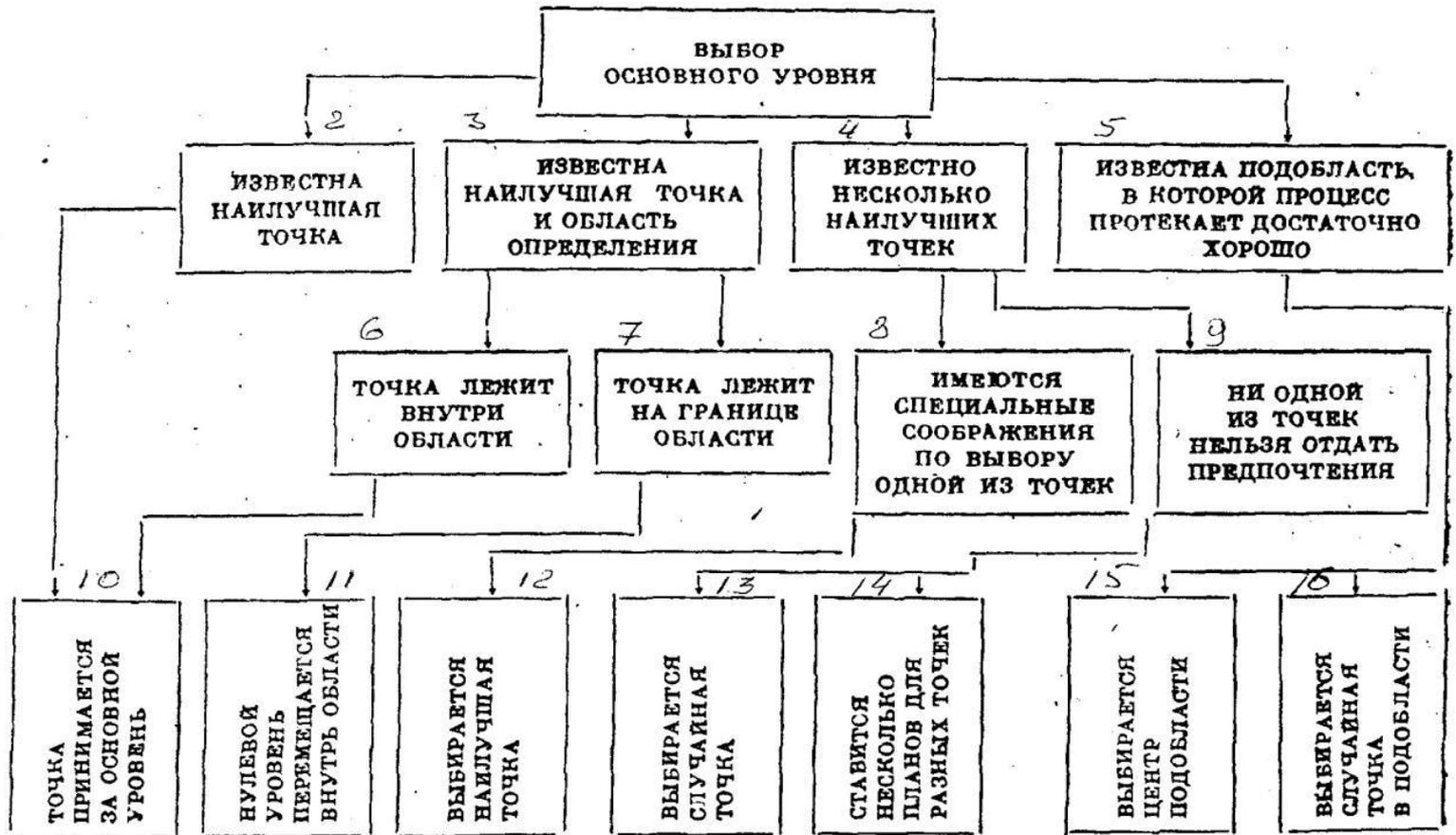
- где \bar{x}_j – значение фактора в кодированной системе координат, из выражений и следует, что в кодированной системе координат верхнему уровню фактора соответствует значение +1, а нижнему – -1.
- x_j – значение фактора в натуральной системе координат.

Выбор основного уровня

- Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации соответствует комбинация (или несколько комбинаций) уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Ее можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Назовем ее основным уровнем. Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня.



Выбор основного уровня



Матрица планирования эксперимента

- Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом. При числе уровней каждого фактора равного 2, имеем П.Ф.Э. типа 2^k .
- Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы — значениям факторов. Будем называть такие таблицы матрицами планирования эксперимента (МПЭ). МПЭ для 2^x факторов приведена ниже.

Таблица 2.

Факторы Опыты	X_1	X_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Вектор столбец

Вектор строка

Матрица планирования эксперимента

Свойства МПЭ

1) Симметричность относительно центра эксперимента – алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^N X_{ji} = 0$$

, где j - номер фактора, N - число опытов, $j = 1, 2, \dots, k$.

2) Нормированность - сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов

$$\sum_{i=1}^N X_{ji}^2 = N.$$

3) Сумма почленных произведений любых 2х вектор-столбцов МПЭ

$$\sum_{i=1}^N X_{ji} X_{ui} = 0, \quad j, U = 0, 1, 2, \dots, k.$$

4) ротатабельность, т.е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Матрица планирования эксперимента

Пример построения МПЭ

Вернемся к матрице 2^2 . для движения в точке оптимума воспользуемся линейной моделью $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$. Наша цель - по результатам эксперимента найти коэффициент модели. В данном случае эксперимент проводится для проверки гипотезы о том, что линейная модель $\eta = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2$ адекватна, где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ - истинные значения соответствующих неизвестных, а b_0, b_1, b_2 - оценки $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. Коэффициенты модели вычисляются по очень простой формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} Y_i}{N}, j=0, 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

Коэффициенты указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет значок +, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, -, то уменьшается.

Матрица планирования эксперимента

Пример построения МПЭ

Таблица 3

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	\bar{Y}
1	+	-	-	+	95
2	+	+	-	-	90
3	+	-	+	-	85
4	+	+	+	+	82

$$b_0 = \frac{95 + 90 + 85 + 82}{4} = 88$$

$$b_1 = \frac{-95 + 90 - 85 + 82}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$b_2 = \frac{-95 - 90 + 85 + 82}{4} = \frac{-18}{4} = -4.5$$

$$b_{12} = \frac{95 - 90 - 85 + 82}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$Y = 88 - 2X_1 - 4.5X_2 + 0.5X_1X_2$$

Ошибки параллельных опытов.

Метод Стьюдента

Наличие отклонения результата любого опыта от среднего арифметического свидетельствует об изменчивости, вариации значений повторных опытов. Для измерения этой изменчивости чаще всего используют дисперсию. Дисперсией называется среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения. Дисперсия обозначается s^2 и выражается формулой:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2$$

где $(n - 1)$ – число степеней свободы, равное количеству опытов минус единица. Одна степень свободы использована для вычисления среднего.

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется средним квадратическим отклонением, стандартом или квадратичной ошибкой.

Очень важно исключить из экспериментальных данных грубые ошибки, так называемый брак при повторных опытах. Для отброса ошибочных опытов существуют правила. Для определения брака используют, например, критерий Стьюдента

$$\frac{y - \bar{y}}{s} \geq t$$

Значение t берут из таблицы t -распределения Стьюдента. Опыт считается бракованным, если экспериментальное значение критерия t по модулю больше табличного значения.

Ошибки параллельных опытов. Метод Стьюдента



Проверка однородности дисперсий. Критерий Фишера

Для проверки гипотезы об однородности двух дисперсий используется критерий Фишера F , который представляет собой отношение максимальной дисперсии к минимальной для соответствующих чисел степеней свободы и уровней значимости

$$F = \frac{D_{\max}}{D_{\min}}$$

Если полученное расчётом по результатам испытаний значение критерия Фишера F меньше табличного значения F_{τ} , то две дисперсии однородны.

Распределение критерия Фишера зависит от двух степеней свободы:
– для n_1 параллельных опытов, в которых дисперсия оказалась максимальной, и
– для n_2 параллельных опытов, в которых дисперсия оказалась минимальной.

Проверка однородности дисперсий. Критерий Кохрена

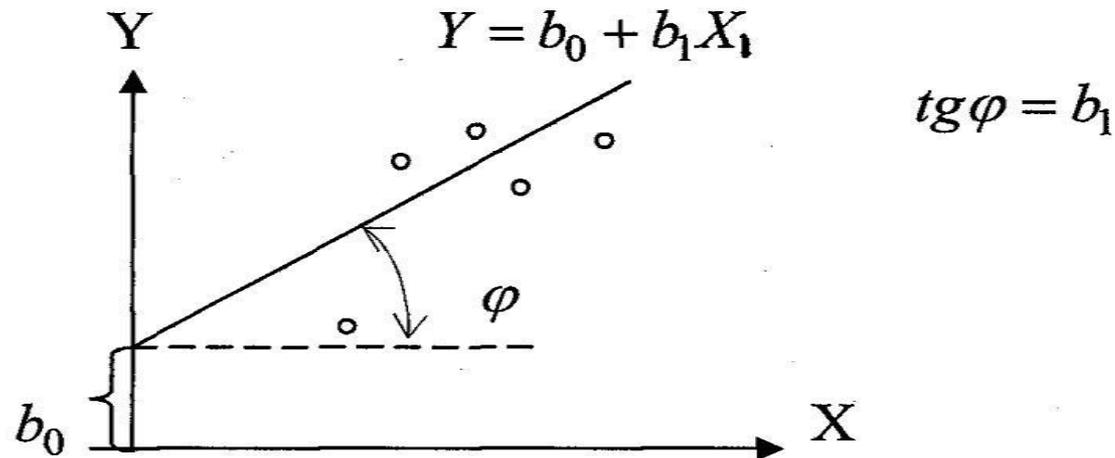
При равномерном дублировании опытов (одинаковое число опытов в каждой точке плана эксперимента) однородность дисперсий проверяется с помощью критерия Кохрена G , который определяется как отношение максимальной дисперсии к сумме всех других дисперсий

$$G = \frac{s_{1\max}^2}{\sum_{j=1}^N s_j^2}$$

Дисперсии однородны, если расчётное значение критерия Кохрена G_p не превышает табличное значения критерия G_T .

Метод наименьших квадратов

- Суть метода рассмотрим на простом примере: один фактор, линейная модель.



Наша цель — вычисление неизвестных коэффициентов b_0 и b_1 .

Если бы все экспериментальные точки лежали строго на прямой линии, то для каждой из них было бы справедливо равенство

$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = 0$, где $i = 1, 2, \dots, N$ — номер опыта. Тогда не было бы никакой проблемы. На практике это равенство нарушается и вместо него приходится писать

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = \xi_i$$

где ξ_i — разность между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y в i -ой экспериментальной точке. Эту величину иногда называют невязкой.

Метод наименьших квадратов

- Невязка возникает по двум причинам: из-за ошибки эксперимента и из-за непригодности модели. Причем эти причины смешаны и мы не можем, не получив дополнительной информации, сказать, какая из них преобладает.
- Необходимо найти такие коэффициенты регрессии, при которых невязки будут минимальны.
- Коэффициенты определяются по формуле:

$$b_0 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i - b_0 \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Оценка значимости коэффициентов

- После нахождения оценок коэффициентов производится оценка их значимости, которая проводится путём сопоставления абсолютной величины коэффициента $|b_j|$ с его доверительным интервалом его определения, рассчитываемым по формуле:

$$\Delta b_j = t_\alpha s_{b_j};$$

где t_α – значение критерия Стьюдента, который берется из таблиц его распределения в зависимости от уровня значимости α ($\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$) и числа степеней свободы $f_1 = n_0 - 1$ (где n_0 – число дублирующих опытов, обычно, в центре плана). Для технических измерений α чаще всего принимается равным 0,05. Для меньших значений величины α доверительный интервал определения получается больше (см. табл. 3.3).

s_{b_j} – среднеквадратичная ошибка в определении коэффициента регрессии b_j , которая определяется в зависимости от величины дисперсии воспроизводимости $D_y = s_y^2$.

Оценка значимости коэффициентов

- Коэффициент считается статистически значимым, когда его абсолютная величина больше доверительного интервала его определения или равна ему

$$|b_j| \geq \Delta b_j \text{ или } |b_j| \geq t_\alpha s_{b_j};$$

- Смысл последнего неравенства заключается в том, что абсолютная величина значимого коэффициента должна быть в раз больше, чем ошибка его определения.

Оценка адекватности модели

- После оценивания коэффициентов модели проводится оценка адекватности модели, которая состоит в оценке однородности дисперсии воспроизводимости и дисперсии неадекватности с использованием критерия Фишера
- Дисперсию неадекватности определяют по формуле:

$$s_{\text{неад}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_{i,m} - y_i)^2}{f_2},$$

где $y_{i,m}$ – значение y , определенное по модели для i -тых условий эксперимента;

y_i – значение y , определенное в i -том опыте;

f_2 – число степеней свободы определения дисперсии неадекватности.

$$f_2 = N - k',$$

- где k' – число найденных коэффициентов в модели.

Оценка адекватности модели

При оценке адекватности модели по критерию Фишера оценивается отношение

$$F = \frac{S_{\text{неад}}^2}{S_y^2}, \quad (3.31)$$

которое сопоставляется с табличным значением F_m , определяемом при степени свободы дисперсии воспроизводимости f_1 и степени свободы дисперсии неадекватности f_2 . Если $F \leq F_m$, то модель считается адекватной, в противном случае модель неадекватна.

По сути дела, модель считается адекватной, если погрешности расчета функции отклика y по модели не превышают погрешности ее экспериментального определения.

Дифференциальные уравнения объектов регулирования

- Дифференциальное уравнение объекта регулирования аналитически выражает связь между входными и выходными величинами объекта. Различают 2 вида уравнений объекта:

1) уравнение статики, отражающее связь между входными и выходными величинами в установившемся режиме.

Порядок объекта	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция
нулевой	$y=kx$	k
1-ый	$(Tp+1)y= kx$	$\frac{k}{Tp+1}$
2-ой	$(T_2p^2+ T_1p+1)y= kx$	$\frac{k}{T_2p^2+ T_1p+1}$
3-ий и более	$(T_3p^3+T_2p^2+ T_1p+1)y= kx$	$\frac{k}{T_3p^3+ T_2p^2+ T_1p+1}$
1-ый с запазданием	$(Tp+1)y= ke^{-p\tau} x$	$\frac{k \cdot e^{-p\tau}}{Tp+1}$
2-ой с запазданием	$(T_2p^2+ T_1p+1)y= ke^{-p\tau} x$	$\frac{k \cdot e^{-p\tau}}{T_2p^2+ T_1p+1}$

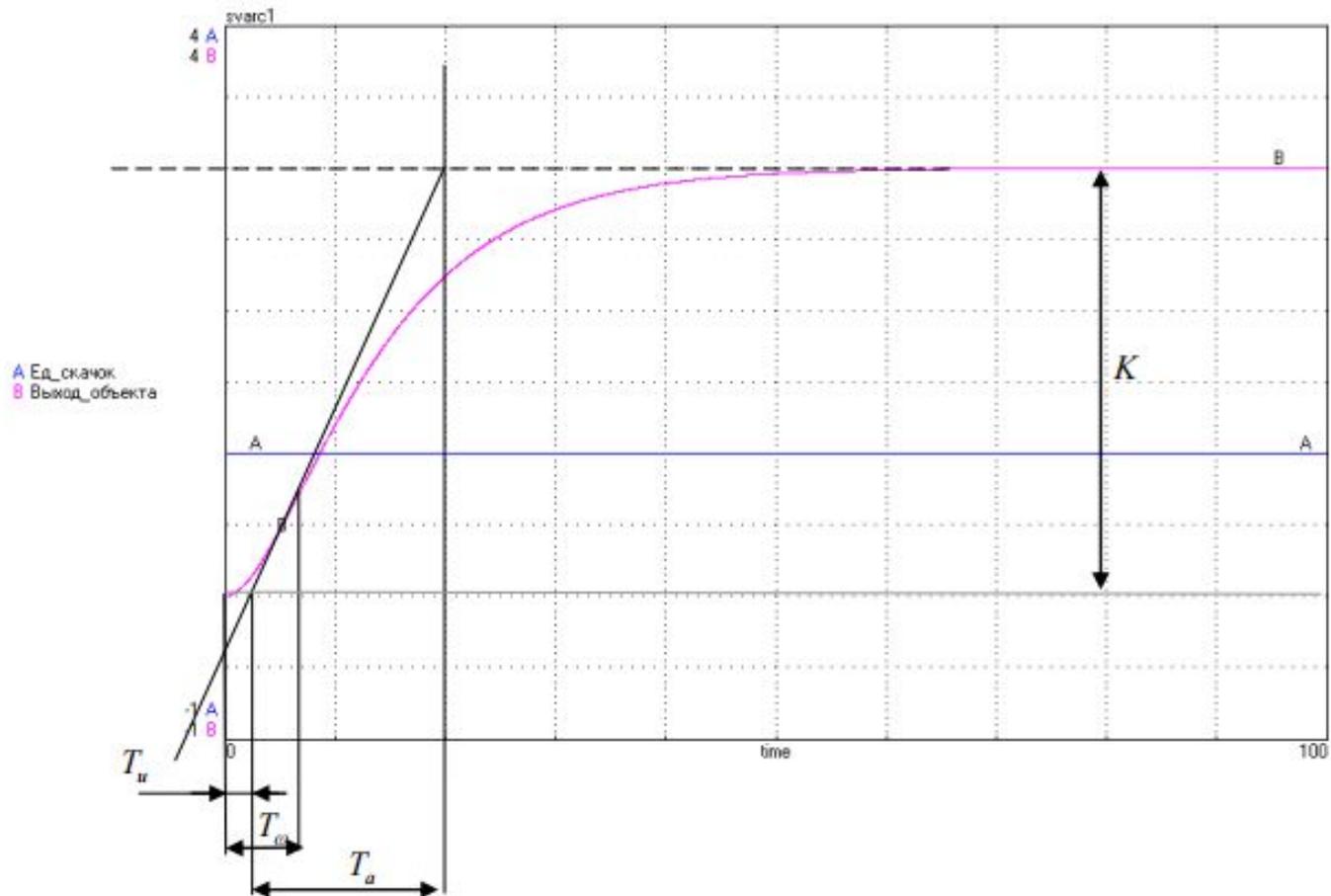
Дифференциальные уравнения объектов регулирования

2) Уравнение динамики, характеризующее связь между входными и выходными величинами в переходных режимах.

Порядок объекта	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция
1-ый	$py = kx$	$\frac{k}{p}$
2-ой	$p(Tp+1)y = kx$	$\frac{k}{p(Tp+1)}$
3 и более	$p(\dots T_3p^3 + T_2p^2 + T_1p + 1)y = kx$	$\frac{k}{p(T_3p^3 + T_2p^2 + T_1p + 1)}$
объект с запозданием	$p(\dots T_3p^3 + T_2p^2 + T_1p + 1)y = ke^{-p\tau} x$	$\frac{k}{p(T_3p^3 + T_2p^2 + T_1p + 1)} * e^{-p\tau}$

Метод Шварца

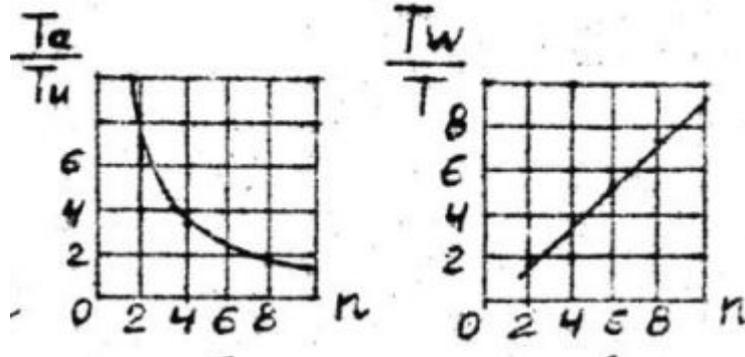
$$W(p) = \frac{K}{(1+Tp)^n}$$



$$T_u = 2,4, T_\omega = 6,9, T_a = 23,7, K=3$$

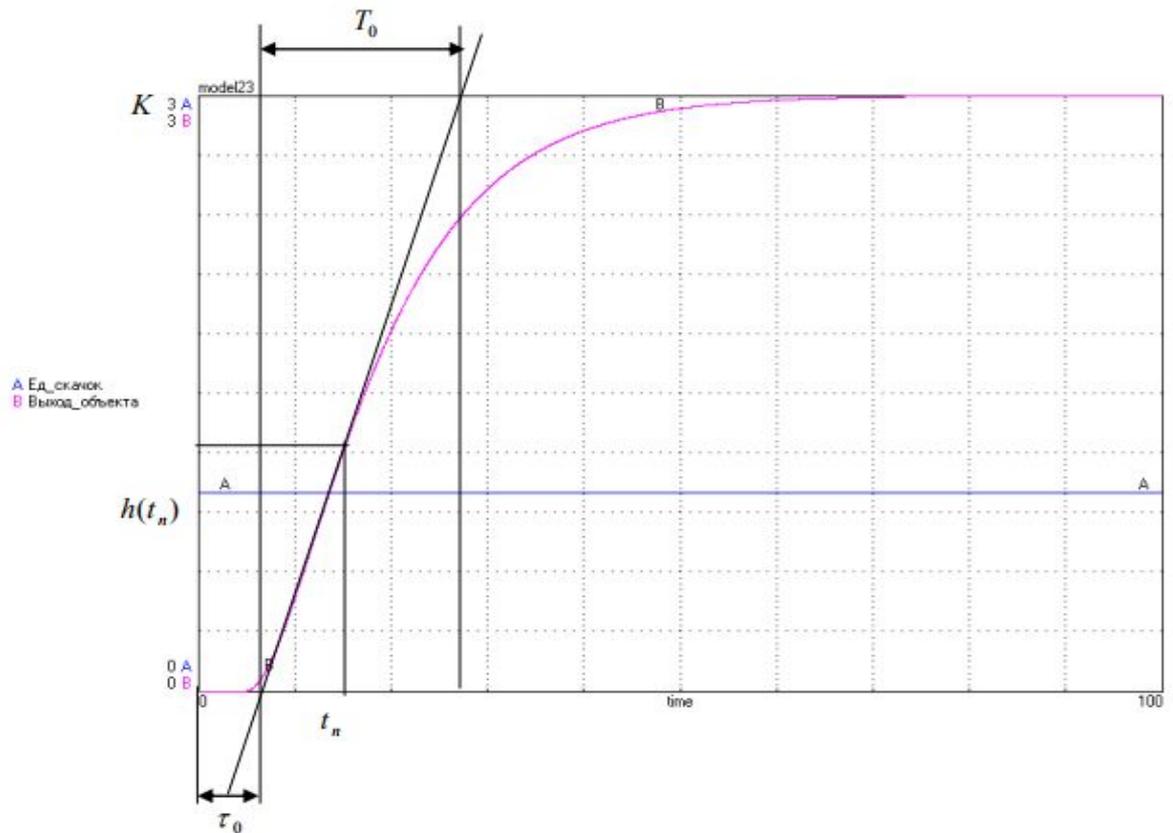
Метод Шварца

Номограммы для определения кривой разгона по методу Шварца



Метод Ротача

$$W(p) = \frac{Ke^{-\varphi}}{(1+T_{a1}p)(1+T_{a2}p)}$$



$$T_0 = 20,7, \quad h(t_n) = 1,225, \quad \tau = 6,4, \quad k = 3, \quad t_n = 15,2$$

Метод Ротача

Сначала находим отношение

$$b = \frac{h(t_n)}{k}$$

Затем по номограмме

(по коэф. b) определим отношение

$$\frac{T_{a1}}{T_0}$$

И найдём параметр T_{a1}

Затем по номограмме

(по коэф. b) определим отношение

$$\frac{T_{a2}}{T_{a1}}$$

И найдём параметр T_{a2}

