Лекция 9. Производные основных элементарных функций, сложных, обратных, функций, заданных неявно, параметрически.

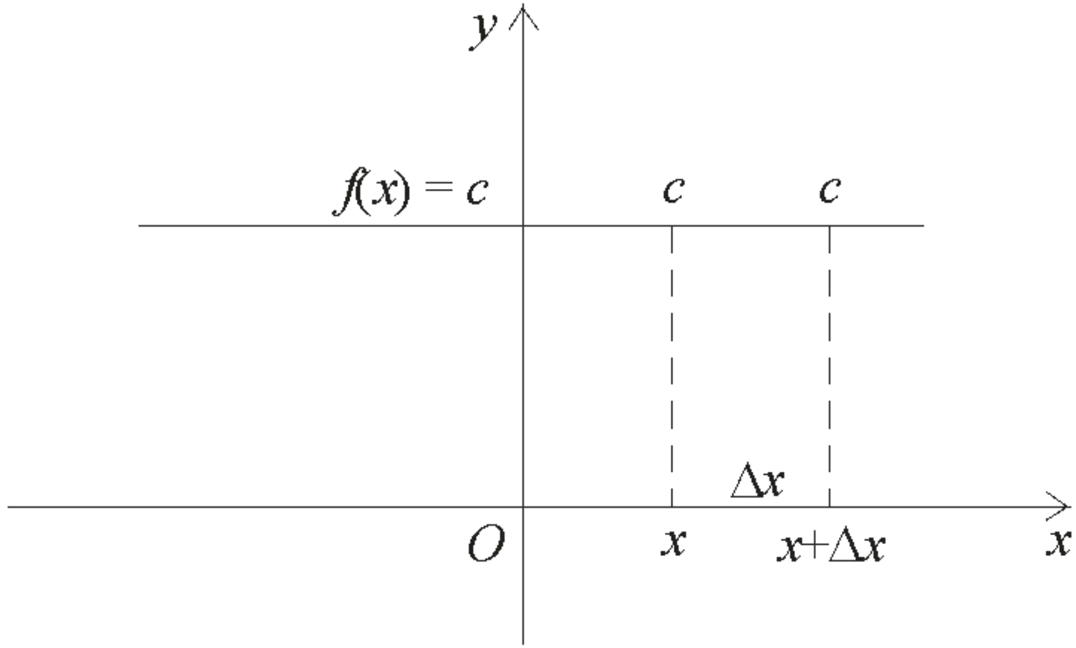
Таблица производных

1. $y = c$	$y' = 0$ (производная постоянной величины = 0)
2. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
2a. $y = x^2$	$y' = 2x$
2b. $y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
2c. $y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
3a. $y = e^x$	$y' = e^x$
4. $y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$
4a. $y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
5. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
6. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
7. $y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $y = \mathrm{arcctg}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Th (О производной константы). Производная постоянной функции тождественно равна 0.

Доказательство

Пусть $f(x) = c$.



Возьмем произвольную точку x. Придадим аргументу в этой точке некоторое приращение Δx. Найдем соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Поэтому

.

Ч.т.д.

Th (О производной суммы, произведения и частного). Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $u \pm v$, $u \cdot v$, $\dfrac{u}{v}$ $(v \neq 0)$ также дифференцируемы в точке x_0 и при этом:

1. $y = u \pm v$ $\qquad y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $y = u \cdot v$ $\qquad y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. $y = \dfrac{u}{v}$ $\qquad y' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Эти формулы называют также правила нахождения производных.

Доказательство

Докажем правило 1.

Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение $\Delta x \neq 0$. Функции u и v при этом получат некоторые приращения

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$$
$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0),$$

а функция $y = u \pm v$ получит некоторое приращение

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = [u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)] =$$
$$= [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] \pm [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)] = \Delta u \pm \Delta v.$$

Поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$$

Ч.т.д.

Мы воспользовались тем, что по условию теоремы указанные пределы существуют и равны соответствующим производным.

Докажем правило 2.

Все приращения функций в точке используем из доказательства правила 1. Так как $y = u \cdot v$, то

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)\cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\cdot v(x_0) =$$

$$= u(x_0 + \Delta x)\cdot v(x_0 + \Delta x) \underline{- u(x_0)\cdot v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)\cdot v(x_0 + \Delta x)} - u(x_0)\cdot v(x_0) =$$

$$= v(x_0 + \Delta x)\cdot[\, u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + u(x_0)\cdot[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)] =$$

$$= v(x_0 + \Delta x)\cdot \Delta u \pm u(x_0)\cdot \Delta v.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x_0 + \Delta x)\Delta u + u(x_0)\Delta v}{\Delta x} \qquad (1)$$

Прежде, чем переходить к пределу в равенстве (1), заметим следующее:

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} v(x_0) = v(x_0)$$

Последний шаг справедлив, поскольку v непрерывна в точке x_0. Непрерывность вытекает из дифференцируемости функции в этой точке.

По условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0); \;\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0).$$

Перейдем теперь к пределу в равенстве (1)

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x)\Delta u + u(x_0)\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x_0 + \Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v(x_0)u'(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

или, короче

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Ч.т.д.

Докажем правило 3.

Все приращения функций в точке используем из доказательства правила 1. Так как $y = \dfrac{u}{v}$, то

$$\Delta y = \frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - v(x_0+\Delta x)u(x_0)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) + u(x_0)v(x_0) - v(x_0+\Delta x)u(x_0)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{v(x_0)\left[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)\right] - u(x_0)\left[v(x_0+\Delta x) - v(x_0)\right]}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x_0)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} \qquad (2)$$

Переходя к пределу в равенстве (2), получаем:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x_0)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \frac{v(x_0)u'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)}{v^2(x_0)}$$

или, короче

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

Ч.т.д.

Замечание. Нами доказана формула для производной суммы двух слагаемых. Она оказывается справедливой и для любого конечного числа слагаемых:

$$[u_1(x) \pm u_2(x) \pm \ldots \pm u_n(x)]' = u_1'(x) \pm u_2'(x) \pm \ldots \pm u_n'(x)$$

Мы доказали формулу $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, рассмотрим, как будет выглядеть формула для трех сомножителей:

$$(u \cdot v \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w' = (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot w + u \cdot v \cdot w' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

Окончательно:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot (v \cdot w) + v' \cdot (u \cdot w) + w' \cdot (u \cdot v)$$

Аналогично можно доказать и для n сомножителей:

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' \cdot (u_2 \cdot \ldots \cdot u_n) + u_2' \cdot (u_1 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot \ldots \cdot u_n) + \ldots + u_n' \cdot (u_1 \cdot \ldots \cdot u_{n-1})$$

Следствие. Постоянную можно выносить за знак производной (свойство однородности производной).

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

Действительно: $[k \cdot f(x)]' = k' \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = 0 + k \cdot f'(x) = k \cdot f'(x)$.

<u>Th</u> (О производной обратной функции). Пусть имеется функция $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – обратная ей функция. Обе функции предполагаются непрерывными. Пусть, далее существует производная $f'(x_0) \neq 0$ в некоторой точке x_0. Тогда в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ существует производная обратной функции и она равна:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

т.е. производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции.

Доказательство

Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0); \quad \Delta y \neq 0.$$

Придадим y в точке y_0 некоторое приращение $\Delta y \neq 0$, тогда x получит соответствующее приращение

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0); \quad \Delta x \neq 0.$$

(Если бы $\Delta x = 0$, тогда было бы $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Leftrightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$, что не так)

Составим отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (3)$$

Перейдем к пределу в равенстве (3) при $\Delta y \to 0$, что $\Leftrightarrow$ $\Delta x \to 0$. Это справедливо потому, что функции f и g непрерывны по условию (бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции).

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow x'_y\left(y_0\right) = \frac{1}{y'\left(x_0\right)}$$

или, в исходных обозначениях

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$

Ч.т.д.

Докажем некоторые из формул таблицы производных.

Доказательство формулы 2.

Для случая $n \in N$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n.$$

Перейдем к пределу отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

Ч.т.д.

Для случая $n \in R$. Обозначим $n = \alpha$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{x^\alpha \alpha \dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

При вычислении предела мы воспользовались следующей эквивалентной бесконечной малой: $(1 + x)^\alpha \sim \alpha x + 1$.

Ч.т.д.

Доказательство формулы 5 $y = \sin x$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Ч.т.д.

Аналогично доказывается формула $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство формулы 2 $y = x^n$,

$$y' = nx^{n-1}.$$

Для случая $n \in N$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n.$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\dots+(\Delta x)^n}{\Delta x}=$$

$$=nx^{n-1}$$

Ч.т.д.

Для случая $n \in R$. Обозначим $n = \alpha$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha}\alpha\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \alpha\frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

При вычислении предела мы воспользовались следующей эквивалентной бесконечной малой: $(1 + x)^{\alpha} \sim \alpha x + 1$.

Ч.т.д.

Доказательство формулы 5 $y = \sin x$.

Придадим аргументу в точке x некоторое приращение $\Delta x \neq 0$, тогда y получает соответствующее приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Перейдем к пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

Ч.т.д.

Аналогично доказывается формула

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Доказательство формулы 7 $y = \operatorname{tg} x$,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Действительно

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ч.т.д.

Аналогично доказывается формула

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доказательство формулы 9 $y = \arcsin x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Обратная к ней функция $x = \sin y$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ выполняются условия теоремы о производной обратной функции. Действительно $x_y{}' = \cos y \neq 0$.

Таким образом, по указанной теореме:

$$y'_x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ч.т.д.

В последнем выражении квадратный корень берется со знаком «+», поскольку $\cos x$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ положительный.

Аналогично доказывается формула

$$y = \arccos x,\ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство формулы 11 $y = \operatorname{arctg} x$,

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Рассмотрим обратную функцию $x = \operatorname{tg} y$. При $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяет условиям теоремы о производной обратной функции. Действительно $x_y{}' = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В силу указанной теоремы

$$y'_x = \frac{1}{x'} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ч.т.д.

Здесь использовано тригонометрическое соотношение: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

Аналогично доказывается формула

$$y = \operatorname{arcctg} x,\ y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

<u>Th</u> (О производной сложной функции). Пусть имеется композиция функций

$$X \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} Y$$

$$x_0 \in X;\ u_0 \in U;\ y_0 \in Y;$$

$$u_0 = \varphi(x_0);\ y_0 = f(u_0);$$

По сути дела имеем сложную функцию

$$y = f(\varphi(x)).$$

Пусть функция φ дифференцируема в точке x_0 (т.е. существует $\varphi'(x_0)$), а функция f дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$ (т.е. существует $f\,'(u_0)$), тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также дифференцируема в точке x_0 и при этом

$$y'_x(x_0) = y'_u(u_0)\cdot u'_x(x_0)$$

или, короче

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Без доказательства

<u>Понятие функции, заданной параметрически.</u>

<u>Определение.</u> Пусть заданы уравнения:

$$\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \quad (2),$$

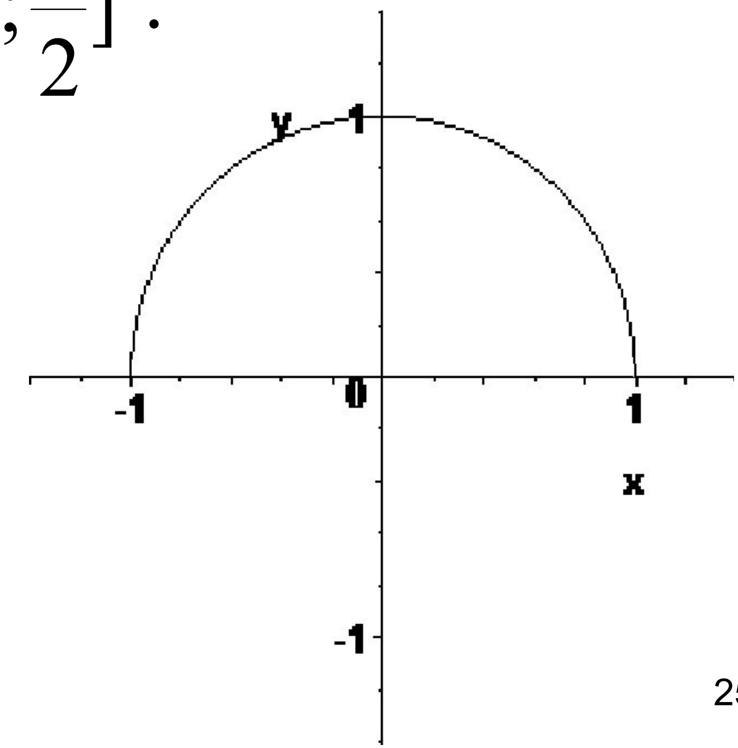
где $t \in T$– промежутки, причём функция $x = \Phi(t)$ имеет обратную функцию $x = \Phi^{-1}(x)$, тогда определена функция $y = \Psi(\Phi^{-1}(x)) = \phi(x)$ – эта функция называется функцией , заданной параметрически уравнениями (2).

Пример. Пусть $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,

t= arcsin x , т.к. на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sin имеет обрыв

y= cos(arcsin x) $= \sqrt{1 - x^2}$ (…), т.к.

y > cos(arcsin x) > 0 на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



Теорема (*о производной функции, заданной параметрически*). Пусть функция $y = \Psi(\Phi^{-1}(x))$ задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \Phi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases}, \; t \in T$$

, причём функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t_0 и

$\Phi'(t_0) \neq 0$. Тогда функция $y = \Psi(\Phi^{-1}(x))$ дифференцируема в точке x_0 и её производная может быть найдена по формуле:

$$y'_x(x_0) = \left(\frac{\psi(t_0)}{\Phi(t_0)}\right)$$

, т.е.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Доказательство

Рассмотрим функцию $y = \Psi(\Phi^{-1}(x))$. Она является композицией двух функций. Её производная в точке x_0 :

$$y'_x(x_0) = \Psi_t'(t_0)\, t'_x(x_0) = \left(\frac{\psi_t'(t_0)}{\Phi_t'(t_0)}\right) = \left(\frac{\psi'(t_0)}{\Phi'(t_0)}\right) \quad (*)$$

Равенство (*) справедливо в силу теоремы о производной обратной функции.