Способы задания множества

1) ***перечисление*** всех его элементов

$$A=\{1,5\};$$

2) с помощью ***характеристического свойства*** его элементов

$$A=\{x \mid x - \text{четное число}\}.$$

Пустое множество – $\varnothing$ –

множество, не содержащее ни одного элемента.

Универсальное множество или ***универсум*** – U –

множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении.

«$a \in A$» $\Leftrightarrow$ «элемент a принадлежит множеству A» $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ «для элемента a выполняется

характеристическое свойство множества A».

«$a \notin A$» $\Leftrightarrow$ «элемент a не принадлежит множеству A» или

$\Leftrightarrow$ «для элемента a не выполняется

характеристическое свойство множества A».

«$A \subset B$» $\Leftrightarrow$ « $B \supset A$» $\Leftrightarrow$ «A подмножество B» $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ «все элементы множества A принадлежат множеству B»

$\varnothing$ *и* B – ***несобственные подмножества множества*** B,

остальные подмножества – ***собственные***.

«$A = B$» $\Leftrightarrow$ « A и B ***равные*** (***совпадающие***) множества » $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ «$B \subset A$ и $A \subset B$»

Булеан множества A – $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subset A\}$ –

совокупность всех подмножеств множества A.

Операции теории множеств

На булеане $\mathcal{P}(U)$ определяются операции над множествами

$$A \in \mathcal{P}(U) \text{ и } B \in \mathcal{P}(U).$$

Объединением множеств A и B – $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением множеств A и B – $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.

Разностью множеств A и B – $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Симметрической разностью множеств A и B –

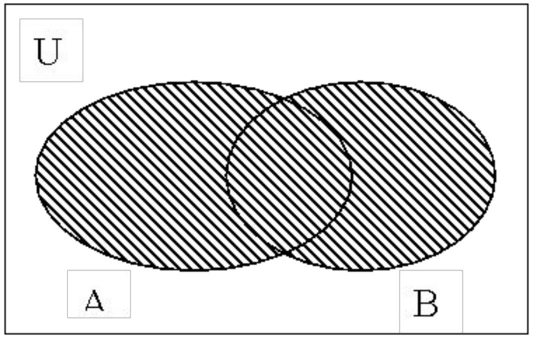
$$A \div B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \text{ или } x \notin A \text{ и } x \in B\} = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Дополнением **к множеству** A – $\overline{A} = \mathbf{U} \backslash A$.

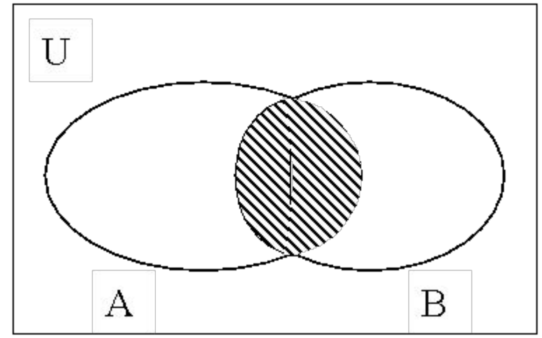
$\overline{}$
$\backslash$
$\cap$
$\cup$
$\div$

1

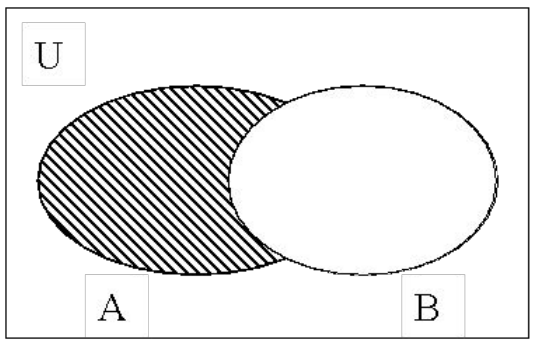
Диаграммы Венна



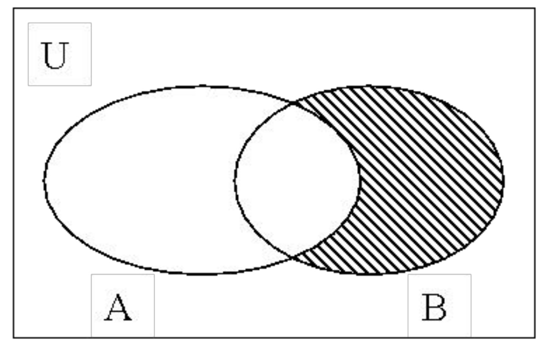
$A \cup B$



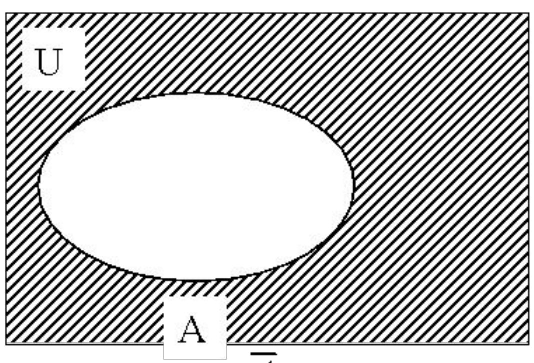
$A \cap B$



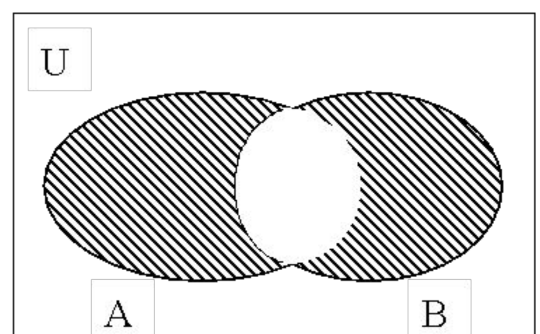
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$\overline{A}$



$A \div B$

Объединение некоторой совокупности (более двух элементов) множеств:

a) $\bigcup\limits_{A\in S} A$ – объединение всех множеств,

являющихся элементами множества S;

b) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ – объединение множеств A_i,

индекс i пробегает все значения множества I;

c) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ – объединение множеств A_i,

индекс i пробегает все значения от 1 до k;

d) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – объединение бесконечного количества множеств.

Аналогично определеяются: $\bigcap\limits_{A\in S} A,\ \bigcap\limits_{i\in I} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

Обозначения наиболее часто используемых числовых множеств

$\mathbb{N}$ – множество всех ***натуральных*** чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество всех ***целых*** чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество всех ***рациональных*** чисел;

$\mathbb{R}$ – множество всех ***действительных*** чисел;

$$\mathbb{Z}^+ = \left\{x \middle| x \in \mathbb{Z} \text{ и } x \geq 0\right\}, \qquad \mathbb{Z}^- = \left\{x \middle| x \in \mathbb{Z} \text{ и } x \leq 0\right\};$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{x \middle| x \in \mathbb{Q} \text{ и } x \geq 0\right\}, \qquad \mathbb{Q}^- = \left\{x \middle| x \in \mathbb{Q} \text{ и } x \leq 0\right\};$$

$$\mathbb{R}^+ = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ и } x \geq 0\right\}, \qquad \mathbb{R}^- = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R} \text{ и } x \leq 0\right\}.$$

Пример. Доказать, что для произвольных множеств A и B, если $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Пусть $a \in \overline{B}$.

Тогда по определению дополнения $a \in \mathbf{U} \setminus B$, где $\mathbf{U}$ – универсальное множество.

По определению разности множеств, из того, что $a \in \mathbf{U} \setminus B$, следует, что

$$a \in \mathbf{U} \text{ и } a \notin B.$$

По условию задачи известно, что $A \subset B$, т.е., что все элементы множества A есть в множестве B. Так как $a \notin B$, то элемента a в множестве B нет, а следовательно, его нет и в множестве A, т.е. $a \notin A$.

Итак, мы установили, что $a \in \mathbf{U}$ и $a \notin A$, а значит, $a \in \overline{A}$.

Аналогично доказывается обратное утверждение: если $\overline{B} \subset \overline{A}$, то $A \subset B$.

$$a \in \overline{B} \overset{\text{дополнения"}}{\Longrightarrow} a \in \mathbf{U} \text{ и } a \notin B \overset{\text{т.к. } A \subset B}{\Longrightarrow} a \in \mathbf{U} \text{ и } a \notin A \overset{\text{дополнения"}}{\Longrightarrow} a \in \overline{A}.$$

Основные законы теории множеств

1. Коммутативность операций $\cup$ и $\cap$:

   а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cap B = B \cap A$

2. Ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$:

   а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. Законы идемпотентности операций $\cup$ и $\cap$:

   а) $A \cup A = A$; б) $A \cap A = A$

4. Законы дистрибутивности:

   а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Законы поглощения:

   а) $A \cup (A \cap B) = A$; б) $A \cap (A \cup B) = A$

6. Законы де Моргана:

   а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7. Законы пустого и универсального множеств:

   $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\overline{\mathbf{U}} = \varnothing$

   $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$ $\overline{\varnothing} = \mathbf{U}$

8. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$

Теорема об единственности дополнения. Относительно заданного универсального множества $\mathbf{U}$ дополнение $\overline{A}$ любого множества $A \subset \mathbf{U}$, единственно.

Докажем от противного. Пусть существует два множества B и C, каждое из которых удовлетворяет требованиям дополнения множества A:

$$\text{а) } B \cap A = \varnothing; \qquad \text{б) } C \cap A = \varnothing;$$

$$\text{в) } B \cup A = U; \qquad \text{г) } C \cup A = U.$$

$$B = B \cap U \overset{\text{г)}}{\Rightarrow} B = B \cap \left(C \cup A\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{закон} \\ \text{дистрибутивност} \\ B \cap \left(C \cup A\right) = \left(B \cap C\right) \cup \left(B \cap A\right) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(B \cap C\right) \cup \left(B \cap A\right) \overset{\text{а)}}{\Rightarrow} B = \left(B \cap C\right) \cup \varnothing = B \cap C.$$

Аналогично исходя из условий в), б) получим:

$$C = C \cap U = C \cap \left(B \cup A\right) = \left(C \cap B\right) \cup \left(C \cap A\right) = \left(C \cap B\right) \cup \varnothing = C \cap B.$$

Итак, мы получили, что $B = B \cap C$ и $C = C \cap B$, а значит, в силу коммутативности пересечения $B = C$, что и требовалось доказать.

Декартово произведение и отношение

Декартовым или ***прямым*** произведением множеств A_1, A_2, ... , A_n называется множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots ,\ x_n \in A_n\}$.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$ называется ***n-й декартовой степенью*** множества A.

По определению $A^0 = \varnothing$.

Если хотя бы одно из множеств A_i пусто, то $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \varnothing$.

N-местным отношением (***соответствием***) P, или ***n-местным предикатом*** P на множествах A_1, A_2, ... , A_n, называется некоторое подмножество прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, т.е. $P \subset A^n$, то чаще используется термин «отношение»:

«P – ***n-местное отношение (предикат) на множестве*** A».

Если же $A_1 \neq A_2 \neq \ldots \neq A_n$, то обычно используют термин «соответствие».

При $n = 1$ отношение P является подмножеством множества A и называется ***унарным*** (***одноместным***) отношением (или ***свойством***) на множестве A.

При $n = 2$ отношение P называется ***бинарным*** (***двухместным***) ***отношением***.

Способы задания бинарных отношений

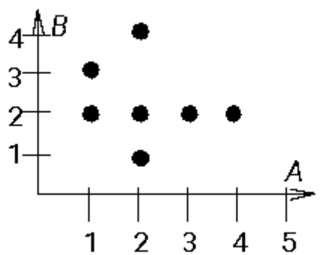
Аналитические

$P \subset A \times B, \quad A=\{6,7,8\}, B=\{5,6,7,8,9\}$

1. ***Перечислением элементов***
   $P=\{(6,5), (7,5), (7,6), (8,5), (8,6), (8,7)\}$
2. ***Характеристическим свойством***
   $P=\{(a,b) \mid a \in A, b \in B \text{ и } a>b\}$
3. ***(n,m)-матрицей***

P	5	6	7	8	9
6	1	0	0	0	0
7	1	1	0	0	0
8	1	1	1	0	0

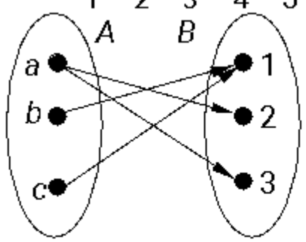
Графические



4. ***Множество точек на плоскости*** (A и B – числовые множества)

$P \subset A \times B, \quad A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{1,2,3,4\},$

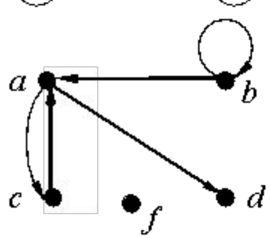
$P=\{(2,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (1,3), (2,4)\}.$



5. ***В виде диаграммы***

$P \subset A \times B, \quad A=\{a, b, c\}, B=\{1, 2, 3\},$

$P=\{(a,2), (a,3), (b,1), (c,1)\}.$



6. ***В виде графа*** ($A=B$)

$P \subset A \times B, \quad A=\{a, b, c, d, f\},$

$P=\{(a,c), (c,a), (b,a), (b,b),(a,d)\}$

Пусть P – некоторое бинарное отношение.

Область определения P

$\delta_P=\{x|(x,y)\in P$ для некоторого $y\}$.

Область значений P

$\rho_P=\{y|(x,y)\in P$ для некоторого $x\}$.

Обратное к P ***отношение***

$P^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in P\}$.

Композиция бинарных отношений $P_1\subset A\times B$ и $P_2\subset B\times C$

$P_3=P_1\circ P_2=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in C$ и найдется $z\in B$ такой, что $(x,z)\in P_1$ и $(z,y)\in P_2\}$.

Образ множества X относительно P

$P(X)=\{y|(x,y)\in P$ для некоторого $x\in X\}$.

Прообраз множества Y относительно P

$P^{-1}(Y)=\{x|(x,y)\in P$ для некоторого $y\in Y\}$.

П р и м е р .

Найти δ_P , ρ_P , P^{-1}, $P \square P$, $P^{-1} \square P$, $P \square P^{-1}$, если для отношения

$$P = \{(x,y) \mid x, y \in \square ,\ y \text{ делится на } x\}$$

$\square$

1) $\delta_P = \square$.

а) $\delta_P \subset \square$ по определению δ_P ;

б) $\square \subset \delta_P$, так как для произвольного $x \in \square$ можно подобрать y, например, $y = x$, такой, что $(x,y) \in P$.

2) $\rho_P = \square$.

а) $\rho_P \subset \square$ по определению ρ_P ;

б) $\square \subset \rho_P$, так как для произвольного $y \in \square$ можно подобрать x, например, $x = y$, такой, что $(x,y) \in P$.

3) $P^{-1} = \{(x,y) \mid x, y \in \square ,\ x \text{ делится на } y\}$

$$P = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ y \text{ делится на } x\}$$

4) $P \circ P^{-1} = \mathbb{N}^2$

а) $P \circ P^{-1} \subset \mathbb{N}^2$ по определению;

б) $(x,y) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и найдется z, например, $z = xy$, который делится на x и на $y \Rightarrow$

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и найдётся z, такой, что $(x,z) \in P$ и $(z,y) \in P^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in P \circ P^{-1}$.

5) $P^{-1} \circ P = \mathbb{N}^2$

а) $P^{-1} \circ P \subset \mathbb{N}^2$ по определению;

б) $(x,y) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и найдется, например, $z = 1$ такой, что x и y будут кратны $z \Rightarrow$

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и найдется z такой, что $(x,z) \in P^{-1}$ и $(z,y) \in P \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in P^{-1} \circ P$.

$$P = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ y \text{ делится на } x\}$$

6) $P \circ P = P$

а) $(x,y) \in P \circ P \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и нашелся $z \in \mathbb{N}$,

такой, что $(x,z) \in P$ и $(z,y) \in P \Rightarrow$

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и нашелся $z \in \mathbb{N}$,

такой, что z делится на x и y делится на z $\Rightarrow$

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и y делится на x $\Rightarrow (x,y) \in P$.

б) $(x,y) \in P \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и y делится на x

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и найдется $z \in \mathbb{N}$, например, $z = x$, такой,

что z делится на x и y делится на z $\Rightarrow$

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$ и найдется $z \in \mathbb{N}$ такой, что $(x,z) \in P$ и $(z,y) \in P \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in P \circ P$. ∎

Пример. Найти относительно множества P образ множества X и прообраз множества Y, если:

а) $P = \{(x, y) \mid x, y \in \square,\ y$ делится на $x\}$,

$X = \{2,3\}$, $Y = \{y \mid y \in N, 5 \le y < 10\}$;

б) $P = \{(x, y) \mid x, y \in \square,\ y = \sqrt{x} + 1\}$,

$X = \{x \mid x \in \square,\ 4 < x < 9\}$, $\qquad Y = \{y \mid y \in \square,\ 17 < y < 26\}$.

$\square$

а) $P(X) = \{y \mid y \in \square$ и y делится на 2 или на 3 $\} =$

$= \{y \mid y \in \square$ и для некоторого $m \in \square$ верно, что $y = 2m$ или $y = 3m\}$,

$$P^{-1}(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x \mid x \in \square,\ x < 10\}$$

б) $P(X) = P((4,9)) = \{y \mid y \in \square,\ 3 < y < 4\}$,

$$P^{-1}(Y) = P^{-1}((17,26)) = (16^2, 25^2) = \{x \mid x \in \square,\ 16^2 < x < 25^2\}\ \square$$

Специальные бинарные отношения $P \subset A^2, A \neq \varnothing$

Отношение обладает(+), не обладает (-) свойством:		Определение
рефлексивности	+	Если $(x,x) \in P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \notin P$
иррефлексивности	+	Если $(x,x) \notin P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \in P$
симметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$, следует, что $(y,x) \in P$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \notin P$
антисимметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$, следует $x=y$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \in P$, $x \neq y$
транзитивности	+	Если **для всех** $x,y,z \in A$ из того, что $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$, следует, что $(x,z) \in P$.
	–	Если **существуют** $x,y,z \in A$, такие, что $(x, y) \in P$, $(y, z) \in P$, $(x,z) \notin P$

рефлексивность

иррефлексивность

симметричность

антисимметричность

транзитивность

$P \subset A^2$, $A = \{1, 2, 3\}$

1) $P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

2) $P = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$

3) $P = \{(1,1), (2,3), (3,1)\}$

4) $P = \{(2,1), (1,2)\}$

$P \subset L^2$, L – множество людей

5) $P = \left\{ (x, y) \mid x, y \in L,\ x \text{ живет в одном городе с } y \right\}$

6) $P = \left\{ (x, y) \mid x, y \in L,\ x \text{ моложе } y \right\}$

7) $P = \left\{ (x, y) \mid x, y \in L,\ x \text{ не моложе } y \right\}$

8) $P = \left\{ (x, y) \mid x, y \in L,\ x \text{ знает адрес } y \right\}$

Специальные бинарные отношения $P \subset A^2, A \neq \varnothing$

Отношение обладает(+), не обладает (-) свойством:		Определение
рефлексивности	+	Если $(x,x) \in P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \notin P$
иррефлексивности	+	Если $(x,x) \notin P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \in P$
симметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$, следует, что $(y,x) \in P$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \notin P$
антисимметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$, следует $x=y$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \in P$, $x \neq y$
транзитивности	+	Если **для всех** $x,y,z \in A$ из того, что $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$, следует, что $(x,z) \in P$.
	–	Если **существуют** $x,y,z \in A$, такие, что $(x, y) \in P$, $(y, z) \in P$, $(x,z) \notin P$

$P \subset A^2$, $A = \{1, 2, 3\}$

1) $P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

2) $P = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$

Специальные бинарные отношения $P \subset A^2, A \neq \varnothing$

Отношение обладает(+), не обладает (-) свойством:		Определение
рефлексивности	+	Если $(x,x) \in P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \notin P$
иррефлексивности	+	Если $(x,x) \notin P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \in P$
симметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$, следует, что $(y,x) \in P$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \notin P$
антисимметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$, следует $x=y$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \in P$, $x \neq y$
транзитивности	+	Если **для всех** $x,y,z \in A$ из того, что $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$, следует, что $(x,z) \in P$.
	–	Если **существуют** $x,y,z \in A$, такие, что $(x, y) \in P$, $(y, z) \in P$, $(x,z) \notin P$

$P \subset A^2$, $A=\{1, 2, 3\}$

3) $P=\{(1,1), (2,3), (3,1)\}$

4) $P=\{(2,1), (1,2)\}$

Специальные бинарные отношения $\quad P \subset A^2,\ A \neq \varnothing$

Отношение обладает(+), не обладает (-) свойством:		Определение
рефлексивности	+	Если $(x,x) \in P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \notin P$
иррефлексивности	+	Если $(x,x) \notin P$ **для всех** $x \in A$
	–	Если **существует** $x \in A$, такой, что $(x,x) \in P$
симметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$, следует, что $(y,x) \in P$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \notin P$
антисимметричности	+	Если **для всех** $x,y \in A$ из того, что $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$, следует $x=y$
	–	Если **существуют** $x,y \in A$, такие, что $(x,y) \in P$, $(y,x) \in P$, $x \neq y$
транзитивности	+	Если **для всех** $x,y,z \in A$ из того, что $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$, следует, что $(x,z) \in P$.
	–	Если **существуют** $x,y,z \in A$, такие, что $(x, y) \in P$, $(y, z) \in P$, $(x,z) \notin P$

$P \subset L^2$, L– множество людей

5) $P = \{(x,y) \mid x,y \in L,\ x \text{ живет в одном городе с } y\}$

6) $P = \{(x,y) \mid x,y \in L,\ x \text{ моложе } y\}$

Специальные бинарные отношения $P\subset A^2,\ A\neq\varnothing$

Отношение обладает(+), не обладает (-) свойством:		Определение
рефлексивности	+	Если $(x,x)\in P$ **для всех** $x\in A$
	–	Если **существует** $x\in A$, такой, что $(x,x)\notin P$
иррефлексивности	+	Если $(x,x)\notin P$ **для всех** $x\in A$
	–	Если **существует** $x\in A$, такой, что $(x,x)\in P$
симметричности	+	Если **для всех** $x,y\in A$ из того, что $(x,y)\in P$, следует, что $(y,x)\in P$
	–	Если **существуют** $x,y\in A$, такие, что $(x,y)\in P$, $(y,x)\notin P$
антисимметричности	+	Если **для всех** $x,y\in A$ из того, что $(x,y)\in P$ и $(y,x)\in P$, следует $x=y$
	–	Если **существуют** $x,y\in A$, такие, что $(x,y)\in P$, $(y,x)\in P$, $x\neq y$
транзитивности	+	Если **для всех** $x,y,z\in A$ из того, что $(x, y)\in P$ и $(y, z)\in P$, следует, что $(x,z)\in P$.
	–	Если **существуют** $x,y,z\in A$, такие, что $(x, y)\in P$, $(y, z)\in P$, $(x,z)\notin P$

$P\subset L^2$, L– множество людей

7) $P=\{(x,y)\mid x,y\in L,\ x$ не моложе $y\}$

8) $P=\{(x,y)\mid x,y\in L,\ x$ знает адрес $y\}$

$P \subset A^2$, $A \neq \varnothing$

$id_A = \{(x,x) | x \in A\}$ – ***тождественное*** отношение (или ***диагональ***)
$u_A = A^2$ – ***универсальное*** отношение (или ***полное*** отношение).

<table>
<tr><td>P – отношение эквивалентности (эквивалентность)</td><td colspan="2">рефлексивно, симметрично, транзитивно</td></tr>
<tr><td>P – отношение нестрогого порядка</td><td rowspan="2">антисимметрично, транзитивно,</td><td>рефлексивно</td></tr>
<tr><td>P – отношение строгого порядка</td><td>иррефлексивно</td></tr>
</table>

Отношение P эквивалентности разбивает множество A, на непересекающиеся подмножества (***классы эквивалентности***):

$$(a,b) \in P \quad \Leftrightarrow \quad \text{«Элементы } a \text{ и } b \text{ из одного подмножества».}$$

Элементы $a \in A$ и $b \in A$ ***сравнимы по отношению*** P на множестве A, если

$$(a,b) \in P \text{ или } (b,a) \in P.$$

Множество A, на котором задано отношение порядка

– ***полностью упорядоченно***, если любые два элемента множества A сравнимы по отношению P,

– ***частично упорядоченно***, в противном случае.

Пример. Доказать, что если отношения P и S симметричны, то симметричны и отношения $P \cup S$, P^{-1}.

◄ Пусть (x, y) произвольная пара бинарного отношения $P \cup S$. Тогда из определения операции объединения следует, что

«$(x, y) \in P$, или $(x, y) \in S$»:

1) если $(x, y) \in P$, то в силу симметричности P $(y, x) \in P$,

2) если $(x, y) \in S$, то в силу симметричности S $(y, x) \in S$.

Таким образом, взяв произвольную пару (x, y) множества $P \cup S$, мы показали, что в одном из множеств P или S, а значит, в множестве $P \cup S$, будет присутствовать пара (y, x), что и требовалось доказать.

$$(x, y) \in P \cup S \overset{\text{df} \cup}{\Rightarrow} (x, y) \in P \text{ или } (x, y) \in S \overset{P \text{ и } S \text{ симметричны}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (y, x) \in P, \text{ или } (y, x) \in S, \overset{\text{df} \cup}{\Rightarrow} (y, x) \in P \cup S.$$

$$(x, y) \in P^{-1} \overset{\text{df } P^{-1}}{\Rightarrow} (y, x) \in P \overset{P \text{ симметрично}}{\Rightarrow} (x, y) \in P \overset{\text{df } P^{-1}}{\Rightarrow} (y, x) \in P^{-1}. ►$$

Пример. Доказать, что для произвольного бинарного отношения P композиция $P \circ P^{-1}$ является симметричным отношением.

$$(x,y) \in P \circ P^{-1} \overset{\text{df } \circ}{\Rightarrow} \text{ найдется такой } z \text{, что } (x,z) \in P \text{ и } (z,y) \in P^{-1} \overset{\text{df } P^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \text{найдется такой } z \text{, что } (z,x) \in P^{-1} \text{ и } (y,z) \in P \overset{\text{df } \circ}{\Rightarrow} (y,x) \in P \circ P^{-1}.$$

Пример. Доказать, что если отношение P симметрично и антисимметрично одновременно, то оно транзитивно.

$$\begin{cases}(x,y) \in P, \\ (y,z) \in P.\end{cases} \overset{P \text{ симметрично}}{\Rightarrow} \begin{cases}(x,y) \in P, (y,x) \in P, \\ (y,z) \in P, (z,y) \in P.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\overset{P \text{ антисимметрично}}{\Rightarrow} \begin{cases}(x,y) \in P, (y,x) \in P, x = y \\ (y,z) \in P, (z,y) \in P, y = z.\end{cases} \Rightarrow (x,z) \in P.$$

Пример. Доказать, что если отношение P симметрично и антисимметрично одновременно, то оно транзитивно.

$$\begin{cases}(x,y)\in P,\\(y,z)\in P.\end{cases}\overset{P\,\text{симметрично}}{\Rightarrow}\begin{cases}(x,y)\in P,(y,x)\in P,\\(y,z)\in P,(z,y)\in P.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{P\,\text{антисимметрично}}{\Rightarrow}\begin{cases}(x,y)\in P,(y,x)\in P,x=y\\(y,z)\in P,(z,y)\in P,y=z.\end{cases}\Rightarrow (x,z)\in P.$$

По условию известно, что P антисимметричное отношение, поэтому пары (x,y) и (y,x) могут одновременно принадлежать множеству, только если $x=y$, следовательно, наличие одновременно свойств симметричности и антисимметричности означает, что множество P состоит только из элементов вида (x,x). Для того, чтобы множество P было не транзитивно, должно выполняться условие $(x,y)\in P$, $(y,z)\in P$, $(x,z)\notin P$. С учетом того, что множество P состоит только из элементов диагонали, условие не транзитивности примет вид $(x,x)\in P$, $(x,x)\in P$, $(x,x)\notin P$ ($y=x$, $z=y$). Значит, P не может быть не транзитивным, что и требовалось доказать.

Функции

Бинарное отношение $f: A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется ***n-местной функцией*** (***функциональным отношением, однозначным отношением***), действующей из $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ в B, если $\delta_f \subset A$, $\rho_f \subset B$ и для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, из того, что $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$, следует $y_1 = y_2$.

Если f – функция, то вместо $((x_1, x_2, \ldots, x_n), y) \in f$ принято писать $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если $\delta_f = A$, то f – ***всюду определенная функция***,

иначе f – ***частично определенная функция***.

Функция f называется

– ***инъекцией***, если для всех x_1, x_2 из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$;

– ***сюръекцией***, если $\rho_f = B$.

– ***биекцией*** (***взаимно однозначным соответствием*** между A и B), если она является инъекцией и сюръекцией одновременно.

«f есть ***отображение*** A ***в*** B», если функция $f: A \to B$ всюду определена;

«f есть ***отображение*** A ***на*** B», если функция $f: A \to B$ всюду определена и сюръекция

Отображение $f: A \to A$ часто называют ***преобразованием множества*** A.

Функциональное отображение $f: A \to A$ часто называют ***перестановкой на множестве*** A.

Характеристическая функция множества A: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A \end{cases}$

Функции f и g ***равны***, если:

1) совпадают их области определения;
2) для любого элемента a из области определения $f(a) = g(a)$.

Функция $f^{-1}: B \to A$ называется ***обратной функцией*** к функции $f: A \to B$.

Функция $h: A \to C$ называется ***композицией*** функций $f: A \to B$ и $g: B \to C$, если

$$h(x) = f \circ g = g(f(x)), \text{где} \quad x \in A.$$

Суперпозицией функций $f_1, f_2, ..., f_n$ называется функция, полученная из $f_1, f_2, ..., f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов. Выражение, описывающее эту суперпозицию, называется ***формулой суперпозиции***.

Операции

Операция – функция, все аргументы и значения которой принадлежат одному и тому же множеству.

n-местная функция $\varphi : A^n \to A$ называется ***n-арной операцией*** на множестве A

($n = 1$ – ***унарная операция***, $n = 2$ – ***бинарная операция***.

Свойства бинарных операций

1) φ – ***коммутативна***, если для любых a, b: $a \varphi\ b = b \varphi\ a$.

2) φ – ***ассоциативна***, если для любых a, b, c: $(a \varphi\ b) \varphi\ c = a \varphi\ (b \varphi\ c)$.

3) φ – ***дистрибутивна слева*** относительно операции ψ, если для любых a, b, c:

$$a \varphi\ (b \psi\ c) = (a \varphi\ b) \psi\ (a \varphi\ c),$$

φ – ***дистрибутивна справа*** относительно операции ψ, если для любых a, b, c:

$$(a \psi\ b) \varphi\ c = (a \varphi\ c) \psi\ (b \varphi\ c);$$

4) φ – ***идемпотентна***, если для любых a: $a \varphi\ a = a$.