Дискретная математика

Преподаватель

Гутова Светлана Геннадьевна

доцент кафедры прикладной математики КемГУ,

кандидат технических наук

Адрес и телефон кафедры

ул. Терешковой, д.40, ауд.407,

тел. 54-25-09

Структура курса

1 часть

Теория множеств коллоквиум

Теория графов расчетно-графическая работа

Теория кодирования итоговый тест

Структура курса

2 часть

Алгебра логики коллоквиум, семестровая работа

Алгебра высказываний итоговый тест

Алгебра предикатов итоговый тест

Часть 4

Алгебра логики

Основные определения

Логическое множество B={0, 1}

0 – ложь, нет, false

1 – истина, да, truth.

Логическая функция (или функция алгебры логики) это операция типа:

$$f : B^n \to B$$

Иначе говоря, логическая функция от *n* переменных

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

функция, для которой выполняется:

$$y \in B,\ x_i \in B, \forall i = \overline{1, n}$$

Задание логической функции таблицей

x	y	z	f (x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
….	….	….	….

В левой части перечислены все наборы значений переменных в лексико-графическом порядке.

В правой части – значение функции на каждом наборе

Множество логических функций от n переменных - $P_2(n)$

Множество всех логических функций - P_2

Замечание: количество наборов значений переменных логической функции от n переменных равно:

$$\left|B_n\right| = \left|B^n\right| = 2^n$$

Утверждение:

$$\left|P_2(n)\right| = 2^{2^n}.$$

Доказательство:

Каждая логическая n переменных функция задается вектор-столбцом.

Его длина *k* - равна числу наборов значений аргументов:

$$k = 2^n.$$

Всего различных столбцов $2^k = 2^{2^n}.$

Единичным набором значений аргументов называется набор, на котором функция равна 1.

Единичным множеством называется множество единичных наборов функции *f* – M_f

Нулевым набором значений аргументов называется набор, на котором функция равна 0.

Нулевым множеством называется множество нулевых наборов функции f – $\overline{M}_f$

Переменная x_i называется фиктивной (несущественной), если от ее значения не зависит значение функции:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Таблица функций одной переменной

При n=1число логических функций равно:

$$|P_2(1)| = 2^{2^1} = 4.$$

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Названия функций одной переменной

$\varphi_0(x) = 0$ функция-константа 0;

$\varphi_3(x) = 1$ функция-константа 1;

$\varphi_1(x) = x$ тождество переменной x ;

$\varphi_2(x) = \bar{x}$ отрицание переменной x .

Функции-константы имеют 1 фиктивную переменную x.

Функции тождество и отрицание – не имеют фиктивных переменных.

Таблица функций двух переменных

При n=2 число логических функций равно:

$$|P_2(2)| = 2^{2^2} = 16.$$

x	y	**№0**	**№1**	**№2**	**№3**	**№4**	**№5**	**№6**	**№7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Продолжение таблицы логических функций 2 переменных

x	y	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№0	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 0 – ***константа 0***

Она принимает ***одно и то же значение*** 0 при любых наборах значений аргументов

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	**№8**	**№9**	**№10**	**№11**	**№12**	**№13**	**№14**	**№15**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 15 – ***константа 1.***

Она принимает ***одно и то же значение*** 1 при любых наборах значений аргументов

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№0	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 1 – ***конъюнкция х и у.***

Обозначение $x \wedge y = x \,\&\, y = x \cdot y = xy$

Конъюнкция принимает ***значение 1 только в случае, когда х и у равны 1.***

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№0	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 7 – ***дизъюнкция x и y.***

Обозначение $x \vee y$

Дизъюнкция принимает ***значение 1 тогда, когда x*** ***или*** ***y равны 1*** ***(т.е. хотя бы один аргумент).***

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 9 – ***эквивалентность х и у.***

Обозначение $x \sim y$

Эквивалентность принимает ***значение 1 только в случае, когда х и у равны.***

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№0	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 6 – ***сложение по модулю 2 x и y.***

Обозначение $x \oplus y$

Сложение по модулю 2 принимает ***значение 1 только в случае, когда сумма x и y нечетна.***

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 13 – ***импликация х и у.***

Обозначение $x \to y$

Импликация принимает ***значение 0 только в случае, когда из «истины» следует «ложь».***

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	**№8**	**№9**	**№10**	**№11**	**№12**	**№13**	**№14**	**№15**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 11 – ***импликация y и x***.

Обозначение $y \to x$

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 14 – ***штрих Шеффера x и y.***

Обозначение $x \mid y$

Штрих Шеффера является ***отрицанием конъюнкции***: $x \mid y = \overline{xy}$

Названия и свойства функций 2х переменных

x	y	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция № 8 – ***стрелка Пирса x и y.***

Обозначение $x \downarrow y$

Стрелка Пирса является ***отрицанием дизъюнкции:*** $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$

Функции с одной фиктивной переменной

Функции № 0 и № 15 – константы 0 и 1 ***имею две фиктивные переменные.***

Фиктивную y имеют

№ 3 – **тождество** x и

№ 12 – **отрицание** x.

Фиктивную x имеют

№ 5 – **тождество** y и

№ 10 – **отрицание** y.

x	y	№0	№3	№5	№10	№12	№15
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1

Общее количество функций с фиктивными переменными равно 6.