

Дифференциальные уравнения

Тема: *Уравнения в полных дифференциалах.
Интегрирующий множитель*

2011 г.

§9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (14)

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y).$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $u(x, y) = C$.

⇒ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x, y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Способы нахождения функции $u(x, y)$:

- 1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 1;
- 2) используя одну из следующих формул:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

где (x_0, y_0) — любая точка области непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$.

3) методом *интегрируемых комбинаций*.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («*интегрируемые комбинации*») и привести его таким образом к виду $du(x, y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln |x|),$$

$$x dy + y dx = d(xy), \quad \frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

§10. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем** уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, (14) если после его умножения на $\mu(x,y)$ левая часть уравнения становится полным дифференциалом некоторой функции.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ТЕОРЕМА 1 (о существовании интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$).

Пусть

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi, \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \psi.$$

1) Если $\varphi = \varphi(x)$, то уравнение (14) имеет интегрирующий множитель $\mu(x)$, который является решением уравнения

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \varphi(x);$$

2) Если $\psi = \psi(y)$, то уравнение (14) имеет интегрирующий множитель $\mu(y)$, который является решением уравнения

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\psi(y).$$

УПРАЖНЕНИЯ

- 1) Найти интегрирующий множитель для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
- 2) Найти интегрирующий множитель для уравнения Бернулли.
- 3) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy + ydx - xdy = 0$$

- 4) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(xy)$.

Найти общий интеграл уравнения

$$\left(3\frac{y}{x} + 2 + \frac{2}{y}\right)dx + \left(6 + \frac{x}{y} + \frac{3}{xy}\right)dy = 0$$